Martin Raussen
Aalborg Universitet
Postbox 159
9100 Aalborg
Denemarken
raussen@math.auc.dk

Christian Skau
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
7491 Trondheim
Noorwegen
csk@math.ntnu.no

Interview John G. Thompson en Jacques Tits

Wiskunde ontwikkelt zich met een natuurlijke snelheid, en dat is snel

Op 20 mei 2008 is voor de zesde keer de Abelprijs toegekend aan John G. Thompson en Jacques Tits "voor hun buitengewone bijdragen aan de algebra en in het bijzonder voor de wijze waarop zij de hedendaagse groepentheorie hebben vormgegeven". De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering als wiskundige tegenhanger van de Zweedse Nobelprijs. Elk jaar zal een commissie van vijf Noorse wiskundigen een kandidaat aanwijzen. Aan de prijs is een bedrag van zes miljoen kronen (760.000 euro) verbonden. Onderstaand interview met John G. Thompson en Jacques Tits is afgenomen op 19 mei.

Wij willen u namens de Noorse, Deense en Europese Wiskundige Genootschappen feliciteren met uw Abelprijs. Als eerste zouden wij willen weten wanneer u voor het eerst belangstelling kreeg voor wiskunde. Waren er wiskundige resultaten of stellingen die in het bijzonder indruk op u gemaakt hebben tijdens uw jeugd? Heeft u zelf in die tijd wiskundige resultaten behaald die u zich nog kunt herinneren? Tits: "Ik heb de basis van de rekenkunde erg vroeg geleerd; ik kon als klein kind al tellen, ik denk voor mijn vierde. Op mijn dertiende las ik wiskundeboeken uit de kast van mijn vader en kort daarna begon ik bijles te geven aan jongeren die vijf jaar ouder waren dan ik en het toelatingsexamen voor de École Polytechnique in Brussel voorbereiden. Dat is mijn eerste herinnering. In die tijd was ik geïnteresseerd in analyse, maar later werd ik meetkundige. Wat mijn werk in die tijd betreft, ik kan zeker geen grote ontdekkingen noemen, maar ik denk dat sommige resultaten die ik toen behaald heb niet zonder belang zijn.

Ik begon mijn wiskundeonderzoek met het bestuderen van de strikt drievoudig transitieve groepen; dit was zo ongeveer het onderwerp dat mijn professor (Paul Libois) mij gegeven had. Het vraagstuk was als volgt: we kenden de axiomatische projectieve meetkunde in dimensie groter dan een. Voor het eendimensionale geval had nog niemand een axiomatische definitie. Dit geval komt overeen met PSL(2). Mijn promotor gaf mij de opdracht om axioma's te formuleren voor deze groepen. Het idee was om als eerste axioma drievoudige transitiviteit te nemen. Ik begon dus met het volgende soort probleem: axioma's voor de projectieve meetkunde geven gebaseerd op drievoudige transitiviteit. Daarna ging ik natuurlijk ook viervoudige en vijfvoudige transitiviteit bestuderen. Dit is hoe ik alle Mathieugroepen herontdekt heb, behalve, vreemd genoeg, de grootste, de vijfvoudig transitieve. Die moest ik in de literatuur vinden!"

U kende de Mathieu-groepen dus nog niet toen u dit werk deed? Tits: "Nee, die kende ik nog niet."

Hoe oud was u toen? Tits: "Een jaar of 18 geloof ik. Ik vond in feite eerst alle strikt viervoudig transitieve groepen. Camille Jordan kende deze al. Maar ik kende toen zijn werk nog niet. Dat heb ik herontdekt."

U zult veel jonger geweest zijn dan uw medestudenten in die tijd. Was het een probleem om u aan te passen aan een omgeving waarin u verreweg de jongste was? Tits: "Ik ben erg dankbaar voor mijn medestudenten en ook voor mijn familie. Want ik was wat je soms een wonderkind noemt. Ik was veel sneller dan de anderen. Maar niemand merkte dat, ze deden er niets mee. Mijn vader was een beetje bang dat ik te snel zou gaan. Mijn moeder wist dat dit bijzonder was, maar ze heeft er nooit over opgeschept. Een buurvrouw heeft ooit tegen mijn moeder gezegd dat als zij zo'n zoon zou hebben, ze rond zou gaan om op te scheppen. Mijn moeder vond dat onzin. Ik ben niet op een voetstuk geplaatst. "

Hardy zei eens dat wiskunde een spel voor jonge mannen is. Bent u daar mee eens? Tits: "Ik denk dat dit tot op zekere mate waar is. Maar er zijn mensen die zeer moeilijke dingen doen op latere leeftijd. Chevalley deed zijn belangrijkste werk na zijn veertigste en mogelijk zelfs nog later. Het is geen absolute regel. Mensen vinden het leuk dit soort regels te stellen. Ik vind ze niet echt leuk."

Thompson: "Het is wel waar dat er geen wonderkinderen zijn in de politiek. Maar in schaken, muziek en wiskunde is er ruimte voor jeugdige genialiteit om zich te manifesteren. Dit is duidelijk zichtbaar bij muziek en schaken en in zekere mate ook bij wiskunde. Dit kan de verkeerde indruk wekken.

Wat de opmerking van Hardy betreft, ik weet niet hoe hij over zichzelf dacht toen hij hem maakte. Het kan een manier zijn geweest om te zeggen: 'Ik stap er nu uit, ik heb de leeftijd bereikt waarop ik niet verder wil.' Ik weet niet wat de sociologen en psychologen hiervan zeggen; dat laat ik aan hen over. Ik zie het niet als een absolute regel. Gezien onze leeftijd zijn Tits en ik zeker in geen positie er iets over te zeggen."

John von Neuman zei, wat overdrijvend, dat wat je in de wiskunde boven je dertigste doet niet de moeite waard is, tenminste vergeleken met wat je voor je dertigste gedaan hebt. Maar toen hij zelf de dertig passeerde schoof hij deze limiet op. Thompson: "Maar hij was een wonderkind." Tits: "Wij kennen allemaal zeer jonge en slimme wiskundigen. Waar het om gaat is dat je om diepe wiskundige resultaten te behalen niet noodzakelijk alle technieken nodig hebt. Ze kunnen diepe resultaten vinden zonder al die technieken ter beschikking te hebben."

Hoe zit het met uw vroege wiskundige herinneringen, Professor Thompson?

Thompson: "Ik heb geen bijzonder sterke herinneringen. Ik had een drie jaar oudere broer die heel goed in wiskunde was. Het kwam, denk ik, voor een groot deel door hem dat ik mijn interesseerde in zeer elementaire dingen. Hij was natuurlijk verder dan ik.

Wij speelden ook kaart in de familie. Ik hield van de combinatoriek in het kaartspel. In die tijd, ik was tien of twaalf, schaakte ik ook. Ik ben er nooit goed in geworden, maar ik vond het leuk. Toen mijn broer naar de universiteit ging leerde hij calculus en probeerde hij dat mij uit te leggen. Ik vond het compleet onbegrijpelijk, maar het maakte mij toch nieuwsgierig. Ik haalde zelf boeken uit de bibliotheek. Maar ik kwam zonder hem niet veel verder."

Vroege groepen theorie

U heeft de Abelprijs van dit jaar gekregen voor uw resultaten in de groepentheorie. Kunnen we beginnen met een korte historische inleiding in het onderwerp? Wij zouden u willen vragen om ons te vertellen hoe het begrip groep ontstaan is en hoe het in de 19e eeuw ontwikkeld is. Hebben Noorse wiskundigen er niet een vrij belangrijke rol in gespeeld? Tits: "Wel, als je het over groepen hebt is het natuurlijk om aan Galois te denken. Ik denk dat Abel geen groepen gebruikte in zijn theorie – weet jij dat?" Thompson: "Minstens impliciet. Ik denk dat de vijfdegraadsvergelijking er mee te maken heeft. Het was een grote verrassing. Ik heb zelf een zeer bekend artikel van Lagrange bestudeerd, ik denk van rond 1770, vóór de Franse revolutie. Hij bestudeerde vergelijkingen en zei ook iets over vijfdegraads vergelijkingen. Hij kwam zeker in de buurt van het begrip groep. Ik weet niet hoe het zit met de formule-definitie. Ik denk dat we dat aan Galois kunnen toekennen. Hij was in ieder geval degene die het concept van een normale ondergroep bedacht. Ik ben vrij zeker dat dat een idee van Galois was. Hij bedacht normale ondergroepen, wat echt fundamenteel is." Tits: "Maar ik denk dat de stelling over de vijfdegraadsvergelijking eerst door Abel ontdekt is. Galois had natuurlijk een techniek die bij veel verschillende soorten vergelijkingen hielp, en die Abel niet had. Galois was voornamelijk een algebraïcus, terwijl Abel duidelijk ook een analyticus was. Wanneer we het over abelse functies hebben: die ideeën komen van Abel."

Van links naar rechts: Christian Skau, Martin Raussen, Jacques Tits, John G. Thompson

Kunt u uitleggen waarom simpele groepen zo belangrijk zijn voor de classificatie van eindige groepen in het algemeen? Dat besef kwam, denken wij, met Camille Jordan en zijn ontbindingsstelling. Klopt dat? Tits: "Ziet u, ik denk dat een van de dromen van deze mensen altijd is geweest om alle groepen te beschrijven. En als je alle groepen wilt beschrijven, dan ontbind je ze. De factoren zijn dan simpel. Ik denk dat dit een van de doelen was van wat zij deden. Maar zij gingen natuurlijk niet zo ver. Het is pas kort geleden dat men alle eindige simpele groepen kon vinden, een oplossing voor het probleem waar Thompson een grote bijdrage aan geleverd heeft."

Hoe zit het met Sylow en Lie aan het begin van de groepentheorie? Thompson: "Dat zijn twee andere Noren." Tits: "Lie heeft een belangrijke rol gespeeld in mijn carrière. In feite concentreerde het hoofdonderwerp van mijn onderzoek zich zowat vanaf het begin op de exceptionele Liegroepen. Dus het werk van Lie is fundamenteel voor wat ik gedaan heb."

Kunt u iets zeggen over het werk van Frobenius en Burnside? Thompson: "Zeker. Één van de dingen die Frobenius in de tweede helft van de 19e eeuw deed is een sterke basis leveren voor de karaktertheorie van eindige groepen. Hij bewees de orthogonaliteitsrelaties en sprak over reciprociteit. Burnside kwam er op dit punt bij. En uiteindelijk bewees hij zijn $p^a q^b$-stelling, dat groepen van deze ordes oplosbaar zijn, met gebruik van representatietheorie. Volgens mij was dat een mooie stap vooruit. Het toonde de kracht van het stuk representatietheorie dat Frobenius al ontwikkeld had. Frobenius bestudeerde ook de representatietheorie van de symmetrische groepen en van de k-transitieve permutatiegroepen. Ik weet niet in hoeverre hij over de Mathieugroepen nagedacht heeft. Maar dit waren nogal vreemde objecten die al vóór de representatietheorie ontdekt waren. Een tijd lang was er vrij veel belangstelling voor k-transitieve permutatiegroepen: dit vereiste nogal ingewikkelde combinatorische argumenten. Burnside en Frobenius zaten er

Over John Griggs Thompson

John Griggs Thompson werd geboren op 13 oktober 1932 te Ottawa (Kansas, U.S.A.). Na een jaar theologie gestudeerd te hebben, begon hij met de wiskundestudie. Hij behaalde zijn B.A. aan de Yale University in 1955 en zijn doctoraat aan de University of Chicago in 1959. Vervolgens vervulde hij professoraten aan de universiteiten van Harvard (1961–1962), Chicago (1962–1968) , Cambridge (Engeland) (1970–1993) , Florida (1993–heden). In zijn dissertatie bewees hij het (oude) vermoeden van Frobenius en Burnside dat de Frobeniuskern van een eindige Frobeniusgroep nilpotent is. Daartoe bedacht hij nieuwe methoden die elders in de groepentheorie nog steeds gebruikt worden. Ook in het bewijs van de stelling 'Elke groep van oneven orde is oplosbaar' (1963, 253 blz. lang; gezamenlijk werk met Feit) gebeurde iets dergelijks. Verder vindt hij de zogeheten locale analyse op eindige groepen uit, en wendt die onder meer aan om die' enkelvoudige eindige groepen te bepalen wier echte ondergroepen alle oplosbaar zijn (410 blz., 1968–1974). Voor al dit werk zijn hem vele prijzen ten deel gevallen , zoals onder meer de Cole Prize in Algebra (1965), de Fields Medal (1970), en mede ook voor later werk, o.a. de Wolff Prize (1992), de Poincare' Prize (1992), de National Medal of Science (VS) (2000), en dan nu de Abel Prize (2008); bovendien is hij in het bezit van tenminste vier eredoctoraten. Zijn latere werk verwijst naar essentiële bijdragen aangaande zelfduale even codes, het niet-bestaan van het eindige projectieve vlak van orde 10, inverse Galoistheorie, eindige enkelvoudige groepen zoals die van Ree, Suzuki en het Monster van Fischer-Griess, en zijn 'eigen' sporadische enkelvoudige groep. Er zijn zeker een stuk of tien ver reikende, fundamentele stellingen naar Thompson vernoemd die alle voortdurend bijdragen tot nieuwe ontwikkelingen in de groepentheorie maar ook in disciplines daarbuiten zoals bijvoorbeeld de j-functie en de 'moonshine' rond Fischer's Monster groep. (Rob van der Waall)

toen midden in." Tits: "Als jonge wiskundige wist ik weinig van de literatuur. Ik heb bijvoorbeeld veel bekende resultaten over k-transitieve groepen opnieuw ontdekt; in het bijzonder over de strikt viervoudige en vijfvoudige transitieve groepen. Gelukkig deed ik dit met andere methoden dan degenen die eerder gebruikt waren. Dus mijn resultaten waren in zekere zin nieuw."

Was het een teleurstelling toen u leerde dat deze resultaten al eerder ontdekt waren? Tits: "Dat viel wel mee."

Burnside was ook interessant omdat hij problemen stelde en vermoedens uitsprak waar u en anderen later aan gewerkt hebben, nietwaar? Thompson: "Inderdaad, ik ben zo ongeveer begonnen aan het vermoeden van Frobenius, dat nog open was. Ik denk dat Reinhold Baer of misschien Marshall Hall mij over het vermoeden verteld had: dat de Frobenius kern van een Frobenius groep nilpotent was. Ik hield om de volgende reden van dit vermoeden: als je de groep van oriëntatiebehoudende isometrieën van het Euclidische vlak neemt, dan is het een meetkundig feit dat dit de translaties en de rotaties zijn. Ik hoop dat kinderen dat nog steeds leren. Het is een vreemd fenomeen. En de translaties vormen een normale ondergroep. Dat is iets waarvan de oorsprong werkelijk in de Oudheid ligt.

Frobenius wist dit ongetwijfeld. Dus toen hij zijn stelling over het bestaan van een normaal complement bewees was dat een link naar hele oude meetkunde. Dat was één van de dingen die het aantrekkelijk maakten. En daarna de poging om de stelling van Sylow en wat represesentatietheorie, wat dan ook, te gebruiken om het probleem aan te pakken. Dat is hoe ik het eerst geboeid werd door de zuivere wiskunde."

Mathieu ontdekte de eerste sporadische simpele groepen, de Mathieugroepen, in jaren '60 en '70 van de 19e eeuw. Waarom denkt u dat wij honderd jaar hebben moeten wachten voordat de volgende sporadische groep gevonden werd door Janko, na uw artikel met Feit? Waarom heeft dit zo lang geduurd? Thompson: "Een deel van het antwoord is de loop van de geschiedenis. De aandacht van de wiskundige gemeenschap was op andere onderwerpen gericht. Ik zou niet zeggen dat groepentheorie, en zeker niet de theorie van eindige groepen, in de 19e eeuw in het middelpunt van wiskundige ontwikkelingen stond. Één ding is zeker, Riemann kwam opdagen, topologie won invloed en oefende het ook uit, en zoals Jacques opmerkte, analyse was erg moeilijk en trok zeer begaafde wiskundigen aan. Het is waar, zoals u eerder opmerkte, dat Frobenius er was, en Burnside; dus de groepentheorie was niet volkomen op een zijspoor beland. Maar er gebeurde weinig. Nu is er natuurlijk erg veel aan de gang, zowel binnen de zuivere als binnen de toegepaste wiskunde. Er zijn veel dingen die mensen kunnen boeien. Waarom er dit gat was tussen de groepen die Mathieu vond en de nogal snelle ontwikkeling van de simpele groepen, inclusief de sporadische groepen, in de tweede helft van de 20e eeuw, dat moeten de historici maar verder uitzoeken. Maar ik vind het niet echt verbazend. Weet u, de wiskunde is een zeer uitgebreid vakgebied."

De Feit-Thompsonstelling

De bekende Feit-Thompsonstelling — eindige groepen van oneven orde zijn oplosbaar — die u begin jaren '60 bewees; dat was oorspronkelijk een vermoeden van Burnside, niet waar? Thompson: "Burnside had er mee te maken, ja. Hij had zelfs naar een aantal bijzondere gehele getallen gekeken en bewezen dat groepen van die orde oplosbaar waren. Hij had dus een begin gemaakt."

Toen u en Feit aan dit project begonnen, waren er bijzondere resultaten voor uw aanval op het Burnside vermoeden die u optimistisch stelden over de uitkomst? Thompson: "Zeker. Een geweldig resultaat van Michio Suzuki, de zogenaamde CA-stelling. Volkomen fundamenteel! Suzuki werd volwassen aan het einde van de tweede wereldoorlog. Hij is in Japan opgegroeid. Gelukkig kwam hij naar de University of Illinois. Ik denk dat het in 1952 was dat hij zijn artikel over CA-groepen van oneven orde publiceerde en bewees dat ze oplosbaar waren door karaktertheorie te gebruiken. Het is geen erg lang artikel. Maar het is vreselijk ingenieus, lijkt mij. Ik vind het nog steeds een erg mooi artikel. Ik vroeg hem later hoe hij erop gekomen was, en toen zei hij dat hij er twee jaar lang over nagedacht had, en hard aan gewerkt had. Toen lukte het uiteindelijk. Dat was echt een opening voor Feit en mij. Die opening werd breder en breder."

Tits: "Kunt u mij vertellen wat een CA-groep is? " Thompson: "Een CA-groep is een groep waarin de centralisator van elk niet-triviaal element abels is. Hier zie je Abel weer opduiken: abelse centralisator, dat is waar de A voor staat."

Het bewijs dat uiteindelijk door u en Feit opgeschreven is was 255 pagina's lang en het vulde bij publicatie een heel nummer van de Pacific Journal. Thompson: "Ja, het was erg lang."

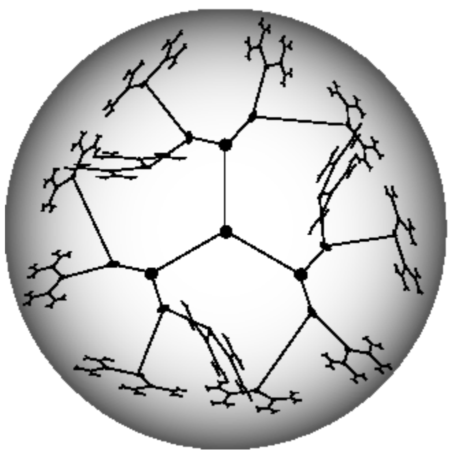
Het is zo'n lang bewijs en er moesten veel stukken met elkaar verbonden worden. Was u zenuwachtig dat er een gat in het bewijs zou zitten? Thompson: "Ik denk van wel, ja. Het bewijs openbaarde zich in wat ons een vrij natuurlijke manier leek; een deel groepentheorie, een deel representatietheorie en een grappig stukje getaltheorie aan het einde. Het leek allemaal goed in elkaar te passen. Maar we hadden een fout kunnen maken, zeker. Sindsdien heeft een aantal mensen er naar gekeken. Ik heb er geen slapeloze nachten van.”

Het lijkt of er toen, zeker in de theorie van eindige groepen, weinig aanknopingspunten zijn met andere wiskundegebieden zoals de analyse. Hierdoor moest u uw hulpmiddelen min of meer vanuit het niets opbouwen, met ingenieuze argumenten. Is dat een van de redenen waarom de bewijzen zo lang zijn? Thompson: “Het zou kunnen. Het kan ook zijn dat de bewijzen korter kunnen. Ik weet niet of dat zo zal zijn. Ik denk in elk geval niet dat de bewijzen tijdens mijn leven significant korter zullen worden. Het zijn verfijnde dingen, die bestudeerd moeten worden.” Tits: “Ziet u, er zijn resultaten die intrinsiek moeilijk zijn. Ik zou zeggen dat dit het geval is met het Feit-Thompsonresultaat. Ik geloof zelf niet dat het bewijs naar bijna niets teruggebracht zal worden.” Thompson: “Ik weet niet of het wel of niet zal gebeuren. Ik denk niet dat de wiskunde al uitgeput is.” Tits: “Het kan natuurlijk gebeuren dat men deze zeer mooie bewijzen, zoals dat van John, kan vermijden door zware machinerie te gebruiken zoals functionaalanalyse. Dan krijgt men ineens een grote machine die het resultaat verplettert. Dat is niet volstrekt onmogelijk. Maar de vraag is of het de moeite waard is.”

De theorie van gebouwen

Professor Tits, u noemde Liegroepen al als beginpunt. Simpele Lie groepen waren al voor een groot deel geclassificeerd eind 19e eeuw, eerst door Killing, en daarna door Elie Cartan, wat geleid heeft tot een serie matrixgroepen en de vijf exceptionele simpele Lie groepen. Hiervoor moest de theorie van Lie algebra’s ontwikkeld worden. Toen u begon te werken aan lineaire algebraïsche groepen waren er weinig hulpmiddelen beschikbaar. Chevalley had baanbrekend werk gedaan, maar het beeld werd pas duidelijk in het kader van gebouwen: meetkundige objecten geassocieerd met groepen. Kunt u ons uitleggen hoe het idee van gebouwen, bestaande uit appartementen, kamers, al die suggestieve woorden, bedacht werd, wat het bereikt heeft en waarom het zo productief gebleken is? Tits: “Ten eerste moet ik zeggen dat de terminologie zoals gebouwen, appartementen en zo niet van mij komt. Ik ontdekte deze dingen, maar Bourbaki gaf er namen aan. Zij schreven over mijn werk en vonden mijn terminologie een warboel. Ze ordenden het beter en zo zijn de begrippen zoals appartementen enzo ontstaan.

Ik bestudeerde deze objecten omdat ik de exceptionele Liegroepen meetkundig wilde begrijpen. Ik ben via de projectieve meetkunde in de wiskunde terecht gekomen. In de projectieve meetkunde heb je punten, lijnen, enzovoorts. Toen ik exceptionele groepen ging bestuderen zocht ik gelijksoortige objecten. Ik ontdekte, bijvoorbeeld – of liever, iemand anders ontdekte – dat de groep E_6 de automorfismengroep is van het projectieve vlak over de octonionen. En wat later vond ik een automatische manier om dergelijke resultaten te bewijzen, door vanuit de groep het projectieve vlak opnieuw op te bouwen. Ik kon deze procedure gebruiken om meetkundige interpretaties te geven voor de andere exceptionele groepen, bijvoorbeeld, E_7 en E_8. Dat was eigenlijk mijn beginpunt. Daarna probeerde ik deze meetkundige objecten abstract te construeren. In dit kader gebruikte ik termen zoals skelet, wat later appartement zou worden. Veel opgaven uit een van de boeken van Bourbaki zijn in feite gebaseerd op mijn vroegere werk.”



De Bruhat-Tits boom van $PGL(2, \mathbb{Q}_2)$, zie: *Notices of the AMS*. vol. 52. nr. 7, pp. 720–727

Nog een vraag over gebouwen: Dit begrip is erg productief gebleken en heeft verbanden met veel gebeiden in de wiskunde. Had u dat indertijd verwacht? Tits: “Voor mij waren het echt de meetkundige interpretaties van deze mysterieuze groepen, de exceptionele groepen, die mij inspireerden. Ander mensen hebben daarna deze gebouwen voor hun eigen werk gebruikt. Er zijn bijvoorbeeld analytici die ze gebruiken. Maar in het begin wist ik niets af van deze toepassingen.”

U vroeg een paar minuten geleden over CA-groepen. Misschien kunnen wij u vragen over BN-paren: wat zijn ze en waar zijn ze van toepassing bij het construeren van gebouwen? Tits: “Ik herhaal dat ik een axiomatische aanpak had van deze groepen. De BN-paren waren een axiomatische manier om een aantal algemene stellingen over simpele algebraïsche groepen te bewijzen. Een BN-paar is een paar bestaande uit groepen B en N met een aantal eenvoudige eigenschappen. Ik merkte dat deze eigenschappen voldoende waren om niet zozeer diepe maar verstrekkende resultaten te bewijzen; bijvoorbeeld, om de simpelheid te bewijzen. Als je een groep met een BN-paar hebt, dan krijg er gratis simpele ondergroepen bij. De notie van BN-groep ontstaat op een natuurlijke manier bij het bestuderen van gespleten simpele Liegroepen. Dergelijke groepen hebben een gegeven conjugatieklasse van ondergroepen, namelijk de Borel ondergroepen. Dit zijn de B’s van een gegeven klas BN-paren.”

De classificatie van eindige simpele groepen

Wij willen u vragen, professor Thompson, naar het classificatieproject, de poging om alle eindige simpele groepen te classificeren. Ook hier heeft het artikel door u en Feit uit 1962 een aantal technieken ontwikkeld. Is het eerlijk om te zeggen dat het project zonder het artikel niet te doen of zelf niet realistisch zou zijn geweest? Thompson: “Dat kan ik niet zeggen. ” Tits: “Ik zou ja zeggen.” Thompson: “Misschien, maar de geschiedenis heeft vertakkingen, dus we weten niet wat had kunnen gebeuren.”

De classificatiestelling voor eindige simpele groepen was waarschijnlijk de meest monumentale samenwerking in de wiskunde, en het heeft erg lang geduurd. Veel mensen zijn erbij betrokken geweest, het uiteindelijke bewijs was oorspronkelijk tienduizend pagina’s lang. Een groep mensen, oorspronkelijk geleid door Gorenstein, werkt nog steeds aan het meer toegankelijk maken van het bewijs.

Vijf jaar geleden hebben wij de ontvanger van de eerste Abelprijs, Jean-Pierre Serre, geïnterviewd. Toen vertelde hij ons dat er een gat in het bewijs gezeten had, dat zo ongeveer ten tijde van het interview gevuld zou worden. Daarvóór zou het voortijdig zijn geweest te zeggen dat men een bewijs had. Het ‘quasi-thin’-geval was nog over. Hoe is de situatie nu? Kan men erop vertrouwen dat de stelling eindelijk bewezen is? Thompson: “In elk geval is het ‘quasi-thin’-geval nu gepubliceerd. Het is zelf al een vrij massief werk, door Michael Aschbacher en Stephen Smith; vrij lang, meer dan duizend pagina’s. Een aantal sporadische simpele groepen komen er in voor. Zij karakteriseren ze omdat deze voor de ‘quasi-thin’ groepen nodig hebben. Ik vergeet

Over Jacques Tits

Jacques Tits werd geboren op 12 augustus 1930 te Ukkel in België. Hij studeerde aan de Université Libre de Bruxelles/Vrije Universiteit Brussel, promoveerde als twintigjarige over veralgemeniseringen van drievoudig transitieve groepen, werkte aan zijn Alma Mater tot 1962, in Bonn (Duitsland) tussen 1964 en 1973, en vanaf 1974 had hij de leerstoel voor groepentheorie aan het Collège de France. In het werk van Tits komt de visie van Felix Klein uit het Erlangenprogramma tot leven, dat "een meetkunde" hetzelfde is als "een transformatiegroep". Vanuit de groepentheorie en incidentiemeetkunde kwam Tits tot de theorie van *gebouwen*, misschien wel zijn meest bekende bijdrage tot de wiskunde, alhoewel niet de enige. De transformatiegroep van een meetkunde leidt tot deze incidentiestructuur, waarvan Tits vervolgens een onafhankelijke puur groepentheoretische karakterisatie in termen van zgn. BN-paren gaf. Tits levenswerk omvat klassificatieresultaten voor gebouwen, en de constructie van families enkelvoudige groepen op basis van deze theorie.

De gebouwen van Tits, opgetrokken uit mooie keien, werden zelf de bouwsteen voor de theorie van p-adische algebraïsche groepen, en hebben ondertussen toepassingen in de theorie van bomen, moduli ruimten van vectorbundels en het meetkundige Langlands vermoeden, in de abstracte groepentheorie, arithmetische groepen, automorfe vormen, incidentiemeetkunde, dynamica van groepen, discrete Laplacianen, uniformisatietheorie voor algebraïsche krommen, Arakelov meetkunde, groepenschema's, p-adische snaartheorie, maar ook in de praktische constructie van optimale expanderende grafen.

welke voorkomen, maar de Rudvalisgroep zit er zeker tussen. Het is verschikkelijk gedetailleerd.

Het lijkt mij dat ze een gedegen stuk werk geleverd hebben. Of men deze dingen echt kan geloven is moeilijk te zeggen. Het is zo'n lang bewijs dat er een aantal basisfouten in kunnen zitten. Maar ik zie wel ongeveer de grote lijn. Ik kan het nu volgen. Ik begrijp ongeveer waarom er waarschijnlijk niet meer sporadische simpele groepen zijn. Maar er is niet echt een bevredigende conceptuele reden ervoor.

Het lijkt alsof de wereld zo in elkaar zit. Dus gaan we verder. Ik hoop dat mensen naar deze artikelen zullen kijken en zien wat de argumenten zijn en hoe die in elkaar passen. Geleidelijk zal dit massief stuk werk zijn plaats innemen tussen de aanvaarde canon van wiskundige stellingen." Tits: "Er zijn twee soorten groeptheoretici. Sommige zijn als de ongelovige Thomas: zij geloven niet omdat zij niet alle details van het bewijs gezien hebben. Ik ben niet als zij, en ik geloof het uiteindelijke resultaat ook al weet ik er niets vanaf. De mensen die werken aan of gewerkt hebben aan de classificatiestelling kunnen natuurlijk ergens een klein detail vergeten zijn. Maar ik geloof niet dat die details erg belangrijk zijn. Ik ben vrij zeker dat het eindresultaat correct is."

Mogen wij u vragen naar de groepen die naar u vernoemd zijn? U heeft een sporadische simpele groep die de Thompsongroep heet. Hoe is deze tevoorschijn gekomen? Hoe was u betrokken bij het vinden ervan? Thompson: "Dit is in feite een bijproduct van de Monster groep. De zogenaamde Thompsongroep is in wezen de centralisator van een element van orde drie in het Monster. Conway en Norton en nog een aantal werkten – dit was voordat Griess het Monster construeerde – hard aan de interne structuur toen deze groep tevoorschijn kwam, samen met de Harada-Nortongroep en het Baby-Monster. We probeerden allemaal de karakters te vinden.

Het Monster zelf was te groot. Ik denk niet dat het met de hand gedaan kan worden. Livingstone vond de karaktertabel, de complexe irreducibele karakters van het Monster. Maar ik denk dat hij veel gebruik heeft gemaakt van een computer. En ik denk niet dat hij uitgesloten is. Dat is hoe het getal 196883 opkwam, de graad van de kleinste trouwe complexe representatie van de Monstergroep. Het is gewoon te groot om met de hand te doen. Maar we kunnen wel de kleinere ondergroepen doen."

De Titsgroep is met de hand gevonden, niet waar? En waar gaat dat over? Tits: "Dat was echt een soort trivialiteit. Men verwacht dat er daar een groep is, behalve dat men een ondergroep van index twee moet nemen om hem simpel te maken. En dat is alles wat ik ervan afweet."

Professor Tits, er is een verrassend verband tussen de Monstergroep, de grootste van de sporadische groepen, en elliptische functie theorie, of elliptische krommen via de j-functie. Zijn er verbanden met andere exceptionele groepen, bijvoorbeeld in de meetkunde? Tits: "Ik ben geen specialist wat betreft deze verbanden tussen de Monstergroep, bijvoorbeeld, en modulaire functies. Ik schaam mij om het toe te geven, maar ik weet hier niet echt wat van. Ik denk dat niet alleen de Monstergroep verband heeft met modulaire vormen, maar ook een aantal andere sporadische groepen. Maar het geval van het Monster is bijzonder bevredigend omdat de relaties in dat geval zeer eenvoudig zijn. Op een of andere manier geven kleinere groepen ingewikkeldere resultaten. In het geval van het Monster vallen de zaken mooi op hun plaats."

Het inverse Galoisprobleem

Mag ik u vragen, Professor Thompson, over uw werk aan het inverse Galoisprobleem? Kunt u eerst uitleggen waar het probleem over gaat? En wat de huidige stand van zaken is? Thompson: "Het inverse Galoisprobleem komt waarschijnlijk al van Galois. Hij associeerde een welgedefinieerde eindige groep aan een vergelijking; in het bijzonder aan vergelijkingen in één onbekende met gehele coëfficiënten. Deze groep heet nu de Galoisgroep. Het legt vrij veel eigenschappen vast van de wortels, de nulpunten van de vergelijking. Als men eenmaal het begrip lichaam heeft, dan heeft het lichaam voortgebracht door de wortels van een vergelijking bepaalde automorfismen en deze automorfismen geven ons Galoisgroepen.

Het inverse probleem is: Gegeven een eindige groep, is er een vergelijking, een polynoom in een onbekende met gehele coëfficiënten, waarvan het de Galoisgroep is? Voorzover ik weet is het nog open of dit waar is of niet. Neem bijvoorbeeld een eindige simpele groep: komt hij op deze manier voor? Is er een vergelijking die erbij hoort? Als er een vergelijking was, dan zouden er oneindig veel zijn. Dus we zouden niet weten hoe een standaard kanonieke vergelijking bij de groep te kiezen. Zelfs in het geval van simpele groepen is het inverse Galoisprobleem niet opgelost. Voor de meest algemene eindige groepen laat ik het aan algebraïsch meetkundigen of wie nog meer goede ideeën heeft over of het probleem hanteerbaar is. Veel van ons hebben eraan gewerkt en hebben er mee gespeeld, maar ik denk dat wij aan de oppervlakte van het probleem gebleven zijn. Het Monster is bijvoorbeeld een Galoisgroep over de rationale getallen. Dat kun je niet over alle sporadische groepen zeggen. De reden dat het Monster een Galoisgroep over de rationale getallen is, komt uit de representatietheorie. Het wordt gewoon gegeven."

Tits: "Dit is erg verrassend: je hebt dit groot object, en de deskundigen kunnen je vertellen dat het een Galoisgroep is. Ik zou graag een vergelijking willen zien."

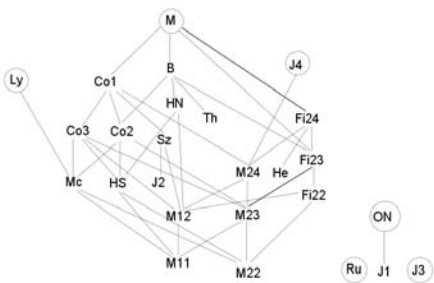
Is er iets bekend over een vergelijking? Thompson: "Het zou graad minstens 10^{20} moeten hebben. Ik vond het indrukwekkend, toen ik rondkeek in de literatuur over j-functies van vóór de computers, dat mensen zoals Fricke en anderen deze berekeningen konden doen. Als je kijkt naar de coëfficienten van de j-functie, dan zie je dat deze al snel groeien naar honderden miljoenen. Deze zijn berekend in het boek van Fricke. Het doet echt plezier dat deze getallen er al voor de computers waren. Getallen rond de 123 miljoen, die allemaal met de hand gevonden moesten worden. En nog correct ook." Tits: "Het is echt geweldig, wat ze gedaan hebben."

Zijn er resultaten in deze oude artikelen van Fricke en anderen waar men niet van op de hoogte is? Thompson: "Nee, men heeft helemaal door gespit." Tits: "Specialisten hebben deze artikelen bestudeerd."

Het E_8-verhaal

Kort geleden is er een andere samenwerking geweest, voor E_8: een groep wiskundigen heeft de representaties van E_8 uitgewerkt. In feite hebben ze de complete karaktertabel van E_8 uitgewerkt. Het resultaat is vorige jaar in een aantal Amerikaanse kranten gepubliceerd met als kop 'Een berekening zo groot als Manhattan' of iets vergelijkbaars. Thompson: "Het was misschien een beetje verdraaid. Ik heb het artikel wel gezien." *Kunt u uitleggen waarom wij allen geïnteresseerd zouden moeten zijn in een dergelijk resultaat? Als groeptheoreticus, algemene wiskundige, of man van de straat?* Thompson: "Het is op veel manieren interessant. Het kan zijn dat fysici contacten hebben bij de kranten. Fysici zijn als groep totaal onbevreesd. Elk wiskundig object dat zij kunnen gebruiken maken zij zich meteen eigen en zetten zij in een context waarin zij het kunnen gebruiken, wat goed is. In die zin is wiskunde een dienstmaagd voor andere dingen. En de fysici zijn zeker geïnteresseerd in exceptionele Liegroepen. En E_8 komt echt bij hen voor. Het is daar iets belangrijks."

Is er enige reden om te geloven dat een aantal van deze exceptionele groepen of sporadische groepen ons iets belangrijks vertellen – in de wiskunde of in de natuur? Thompson: "Ik ben geen fysicus. Maar ik weet dat fysici over dit soort dingen denken." Tits: "Het is misschien naïef dit te zeggen, maar ik denk dat wiskundige structuren die zo mooi zijn als het Monster iets met de natuur te maken moeten hebben."



Figuur 1 Diagram met sporadische eindige groepen en sporadische ondergroepen. 'Th' staat voor de Thompson groep.

Wiskundig werk

Zijn er bepaalde resultaten waar u het meest trots op bent? Thompson: "Een van de hoogtepunten van mijn wiskundig leven is natuurlijk mijn lange samenwerking met Walter Feit. Wij genoten ervan samen te zijn en genoten van het werk dat wij deden; en, natuurlijk, van de versmelting van ideeën. Ik voel mij bevoorrecht om dat contact gehad te hebben en trots dat ik meedeed." Tits: "Ik heb een groot deel van mijn carrière een zeer productief contact gehad met François Bruhat en het was zeer aangenaam om met elkaar te werken. Het was echt samen werken, zoals jij het, neem ik aan, met Walter Feit deed."

Was Armand Borel niet ook erg belangrijk voor uw werk? Tits: "Ja, ik heb ook veel samengewerkt met Borel. Maar in zekere zin was dat anders. Toen ik met Borel werkte had ik vaak de indruk dat wij beiden hetzelfde gevonden hadden. Wij voegden onze resultaten samen om het niet te dupliceren. Wij schreven onze artikelen voornamelijk over resultaten die wij elk afzonderlijk gevonden hadden. Terwijl het met Bruhat echt gezamelijk werk was, complementair werk."

Heeft een van u ooit de plotselinge gewaarwording meegemaakt zoals beschreven door Poincaré; ineens de oplossing zien voor een probleem waar je lang mee geworsteld hebt? Tits: "Ik denk dat dit in wiskundig onderzoek vrij vaak gebeurt; dat men ineens ontdekt dat iets werkt. Maar ik kan geen specifiek voorbeeld geven. Ik weet dat het mij overkomen is en dat het John zeker overkomen is. Het is zeker zo dat een aantal ideeën die men heeft inderdaad werken, maar het verdwijnt zowaar in een waas." Thompson: "Ik denk dat mijn vrouw kan getuigen dat wanneer ik 's morgens opsta ik meteen aan de slag wil gaan. Mijn naïeve gedachte is dat er dingen doorgaan terwijl ik slaap. En dan word je wakker en zeg je: 'Laten we aan de slag gaan en het doen'. En dat is een geweldig gevoel."

U hebt allebei in verschillende landen als hoogleraar gewerkt. Kunt u wat zeggen over de verschillende werkomgevingen in deze plaatsen en de mensen waar u mee gewerkt heeft en waar u het beste mee kon samenwerken? Tits: "Ik denk dat het land waar het beste met jonge mensen wordt samengewerkt Rusland is. De Fransen hebben natuurlijk een lange traditie en hebben zeer goede zeer jonge mensen. Maar ik denk dat de Russische wiskunde in zekere zin levendiger is dan de Franse. De Franse wiskunde is meteen al veel te precies. Ik zou zeggen dat dit de twee landen zijn waar de toekomst van de wiskunde het duidelijkst is. En tegenwoordig zijn de Verenigde Staten een soort middelpunt van de wiskunde geworden, omdat ze zoveel geld hebben. Omdat ze ..."

... de beste onderzoekers kunnen kopen? Tits: "Dat is een te negatieve manier om het te verwoorden. Natuurlijk gaan veel jonge mensen naar de VS omdat zij niet genoeg geld verdienen in hun eigen land."

En er waren de rampzalige gebeurtenissen in Europa in de jaren '30, met het nazisme. Veel mensen zijn naar de VS gegaan. Hoe zit het met u, Professor Thompson? U was lang in Engeland. Hoe was die ervaring vergeleken met het werken aan een Amerikaanse universiteit? Thompson: "Nou, ik ben meer of min gewend mijn eigen gang te gaan, om mijn eigen rol te vervullen. Mensen vielen mij in geen enkel plaats veel lastig. Ik heb aangename herinneringen aan alle plaatsen die ik bezocht heb, voornamelijk in de VS. Maar ik heb ook een aantal andere landen bezocht, voor kortere perioden, zoals Rusland, Duitsland en Frankrijk. Wiskundig voel ik mij vrij op mijn gemak waar ik ook ben. Ik ga mijn eigen gang.

Ik ben niet echt betrokken geweest bij beslissingen in het voortgezet onderwijs. Wat dat betreft ben ik niet echt bevoegd om te oordelen over wat er internationaal gebeurt."

Over de ontwikkeling van de wiskunde

U heeft geleefd in een tijd van snelle wiskundige ontwikkeling, in het bijzonder in uw eigen vakgebieden, waaronder uw eigen bijdragen. Een tijd terug zei Lennart Carleson, die twee jaar geleden de Abelprijs ontving, in een interview dat de 20e eeuw mogelijk het gouden tijdperk van de wiskunde was, en dat het moeilijk zou zijn zich een ontwikkeling voor te stellen die even snel zou gaan. Wat denkt u? Hebben wij al het gouden tijdperk van de wiskunde gehad, of zullen de ontwikkelingen nog sneller doorgaan? Tits: "Ik denk dat het op zijn natuurlijke snelheid door zal gaan, en dat is snel; sneller dan het vroeger was." Thompson: "Ik herinner mij ooit een citaat gelezen te hebben dat aan Laplace toegeschreven was. Hij zei dat wiskunde zo moeilijk zou kunnen worden dat wij zo diep zouden moeten graven, dat het in de toekomst niet zou lukken om alles te doorgronden. Dat is eigenlijk een nogal beangstigende gedachte. Het is waar dat de vereisten aanzienlijk zijn, maar mensen zijn vindingrijk. Onderwijstechnieken kunnen veranderen. De basis van wat men leert kan veranderen. Maar de wiskunde is een dynamisch geheel. Ik hoop dat het niet stopt." Tits: "Ik heb er vertrouwen in dat het door zal groeien. "

Traditioneel is de wiskunde voornamelijk verbonden met de natuurkunde. Veel motivatie komt daarvandaan, en veel toepassingen zijn in de natuurkunde. De laatste jaren zijn er ook biologie, bijvoorbeeld met het menselijke genoomproject, economie mij haar financiële wiskunde, informatica en computerwerk geweest. Wat denkt u van deze nieuwe verbanden? Zullen zij in de toekomst even belangrijk voor de wiskunde worden als de natuurkunde? Tits: "Ik zou zeggen dat de wiskunde die afkomstig is van de natuurkunde van hoge kwaliteit is. Sommige van de beste resultaten die we in de wiskunde hebben zijn door fysici ontdekt. Ik ben minder zeker over sociale wetenschappen en de menswetenschappen. Ik denk dat de biologie een zeer belangrijk onderwerp is maar ik weet niet of het moeilijke problemen heeft opgeleverd in de wiskunde. Maar ik kan mij vergissen. Ik weet bijvoorbeeld dat Gromov, een eerste-klas wiskundige, zich nu in de biologie interesseert. Ik denk dat dit een geval is waar wiskunde, zware wiskunde, met de biologie meegaat. Wat ik eerder over de sociale wetenschappen zei, bijvoorbeeld, is niet waar voor de biologie. Sommige biologen zijn ook zeer goede wiskundigen." Thompson: "Ik accepteer dat er zeer slimme mensen zijn, verspreid over de intellectuele wereld. Als zij wiskunde nodig hebben bedenken zij wiskunde. Ofwel ze vertellen de wiskundigen wat ze nodig hebben ofwel ze bedenken het zelf."

Over het onderwijzen van wiskunde

Hoe moet wiskunde aan jongeren onderwezen worden? Hoe zou u jongeren stimuleren om zich in wiskunde te verdiepen? Thompson: "Ik raad altijd het boek *One Two Three ... Infinity* van Gamow aan en *What is Mathematics* van Courant en Robbins en nog wat overzichtswerk dat je in de bibliotheek kunt vinden. Het is geweldig om nieuwsgierigheid te stimuleren. Als er recepten waren, dan zouden die al bekend zijn. Sommige kinderen worden geprikkeld, anderen zijn gewoon niet ontvankelijk. Hetzelfde geldt voor muziek. Sommige kinderen zijn zeer ontvankelijk voor muziek, anderen niet. We weten niet waarom." Tits: "Ik weet niet wat ik moet zeggen. Ik heb weinig contact met zeer jonge mensen. Ik heb een aantal zeer goede studenten gehad, maar altijd gevorderde studenten. Ik ben zeker dat het fascinerend is te zien hoe jonge mensen hier over denken. Maar ik heb er geen ervaring mee."

Jean-Pierre Serre zei eens in een interview dat men jongeren niet moest stimuleren om wiskunde te doen. In tegendeel zou men ze moeten ontmoedigen. Degenen die daarna nog verlangen om wiskunde te doen moet je koesteren. Thompson: "Dat is nogal bestraffend. Maar ik begrijp het. Je probeert ze terug te houden en als ze zich verzetten laat je ze uiteindelijk los. Daar zit wat in. Maar ik denk niet dat Serre zijn bibliotheek zou afsluiten en de kinderen er niet in zou laten."

Misschien wil hij benadrukken dat onderzoek in de wiskunde niet voor iedereen is. Thompson: "Ja, dat zou kunnen. " Tits: "Maar ik zou zeggen dat, al is wiskunde voor iedereen, niet iedereen er in kan slagen. Het is zeker niet goed om jongeren zonder aanleg aan te moedigen iets te proberen, want dat zou niet goed eindigen."

Persoonlijke interesses

In onze laatste vraag willen wij informeren naar uw persoonlijke interesses buiten de wiskunde. Wat doet u in uw vrije tijd? Waar bent u verder in geïnteresseerd? Tits: "Ik ben vooral geïnteresseerd in muziek, en eigenlijk in geschiedenis. Mijn vrouw is een geschiedkundige; daarom ben ik altijd zeer geïnteresseerd in geschiedenis."

Naar welke soorten muziek luistert u? Welke componisten? Tits: "Oh, nogal oude componisten."

En de geschiedenis: is dat oude of moderne geschiedenis? Tits: "Zeker geen hedendaagse geschiedenis, maar moderne en middeleeuwse geschiedenis. Alles wat met de specialisatie van mijn vrouw te maken heeft." Thompson: "Ik zou een aantal dezelfde interesses noemen. Ik houd van muziek. Ik speel een beetje piano. Ik houd van lezen. Ik houd van bibliografieën en geschiedenis; algemene lectuur, zowel hedendaagse als oudere schrijvers. Mijn vrouw is een wetenschapper. Ik ben geïnteresseerd in haar wetenschappelijk werk. Negentiende-eeuwse Russische literatuur; dat was een tijd van fantastische prestaties. Zeer interessante dingen! Ik volg ook de groei van mijn kleinkinderen." Tits: "Ik ben ook zeer geïnteresseerd in talen, bijvoorbeeld het Russisch."

Spreekt u Russisch? Tits: "Nee, maar ik heb wat Tolstoï in het Russisch gelezen. Ik ben het een beetje vergeten. Ik lees vrij veel. Ik heb wat Chinees geleerd. Ik heb een aantal jaren lang elke zondagochtend een uur lang Chinees gestudeerd. Maar ik was al vrij oud toen ik begon, dus ik vergat wat ik leerde."

Zijn er bepaalde schrijvers waar u van houdt? Tits: "Zeg maar alle goede schrijvers." Thompson: "Ik denk dat we beide lezers zijn. Eindeloos. "

Laat ons, tenslotte, u hartelijk bedanken voor dit plezierige interview; namens de Noorse, Deense en de Europese Wiskundegenootschappen. Hartelijk dank. Thompson: "Dank u. " Tits: "Dank u voor het interview. U heeft ons veel interessante onderwerpen gegeven om over te praten!"

Verantwoording
Dit interview is eerder verschenen in *Newsletter of the European Mathematical Society*, Issue 69 September 2008.