Jan van de Craats
Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
J.vandeCraats@uva.nl

Boekbespreking: The Poincaré Conjecture – In Search of the Shape of the Universe

De vorm van het heelal

Het schrijven over wiskunde voor een algemeen publiek is een hachelijke onderneming. De grote onderzoeksresultaten worden steeds ingewikkelder en zijn vaak niet eens goed te verwoorden zonder gebruik te maken van technische taal. Recent verscheen er weer een boek dat een groot resultaat, het Poincarévermoeden, op een toegankelijke wijze tracht uit te leggen. Is de auteur geslaagd? Jan van de Craats geeft zijn oordeel.

Het verhaal van het bewijs van het vermoeden van Poincaré door de Russische wiskundige Grigory Perelman lijkt alle clichés over wereldvreemde wiskundegenieën te overtreffen. In de media en de vaktijdschriften is het dan ook breed uitgemeten; het zou perfect in een filmscenario passen. Hoofdpersoon Grigory Perelman (Grisha voor intimi) geeft al op jonge leeftijd blijk van een exceptionele aanleg voor de wiskunde. In 1982 wint hij als zestienjarige scholier goud op de Internationale Wiskunde Olympiade in Boedapest met een perfecte score. Direct daarna begint hij zijn wiskundestudie aan de universiteit van zijn geboortestad Leningrad. Na zijn promotie brengt hij als jonge onderzoeker enige jaren in de Verenigde Staten door. Daarbij boekt hij opzienbarende resultaten op het gebied van de differentiaalmeetkunde en de topologie, met als gevolg dat hij in 1994 een van de *invited speakers* is tijdens het *International Congress of Mathematicians* in Zürich. In 1996 kent de *European Mathematical Society* hem een prijs toe, die hij echter weigert, naar verluidt omdat hij het toekennende comité incompetent vindt. Hij leidt daarna een teruggetrokken leven als onderzoeker aan het Steklovinstituut in Sint Petersburg.


Henri Poincaré

Perelman: het verhaal

In 2003 bezoekt Perelman op uitnodiging opnieuw de Verenigde Staten om daar aan verschillende universiteiten voordrachten te geven over drie artikelen die hij enige maanden eerder op het internet geplaatst heeft. Ze hebben direct na verschijning een sensatie veroorzaakt, niet in het minst omdat ze een bewijs bevatten van het beroemde *vermoeden van Poincaré*, een van de zeven *millennium problems* waarop het Clay Institute een prijs van een miljoen dollar gezet heeft. Vakgenoten storten zich op de artikelen en komen in groten getale op zijn lezingen af. Vragen en opmerkingen beantwoordt hij geduldig en overtuigend, maar op aantrekkelijke aanbiedingen van vooraanstaande Amerikaanse universiteiten gaat hij niet in. In plaats daarvan keert hij na zijn tournee snel weer terug naar Sint Petersburg, waar hij zijn kluizenaarsbestaan voortzet. Hij blijft weg als hem op het *International Congress of Mathematicians* in Madrid in 2006 een *Fields medal*, de hoogste eer voor een wiskundige, wordt toegekend. Hij weigert zijn internetartikelen aan vaktijdschriften aan te bieden, en tart daarmee een van de voorwaarden voor het toekennen van de Clay prijs van een miljoen dollar. Het prijzencomité onderzoekt nu of ze Perelman het prijzengeld buiten die regels om kunnen uitkeren, maar het is onduidelijk of hij het geld zal accepteren, mocht dat gebeuren. En als klap op de vuurpijl verschijnt er halverwege 2006 een artikel van de Chinese wiskundigen Huai-Dong Cao en Xi-Ping Zhu met die beweren dat zij tekortkomingen in het bewijs van Perelman hebben gerepareerd. Zij worden ondersteund door hun leermeester Shing-Tung Yau, zelf Fields medaillist in 1982. Die claimt daarna dat zijn leerlingen, en niet Perelman dus recht zouden hebben op de milleniumprijs. Anderen betwisten dat weer; Perelman houdt zich buiten de controverse.

De beroering die dit allemaal teweeg heeft gebracht, is al uitgebreid in Nieuw Archief voor Wiskunde behandeld; het grote artikel dat Sylvia Nasar en David Gruber erover schreven in *The New Yorker* van 21 augustus 2006 is integraal in het maartnummer van 2007 opgenomen [1], gevolgd door een deskundig commentaar van Josef Steenbrink [2]. Overigens, een mooi artikel door Roland van der Veen over het vermoeden van Poincaré zelf en de oplossing ervan door Perelman was al in 2006 gepubliceerd in Pythagoras [3].

Wat is eigenlijk het vermoeden van Poincaré, en wat is het belang van het bewijs ervan voor het onderzoek in de wiskunde? Populariserende uiteenzettingen erover kunnen niet om die twee vragen heen, en daarmee beginnen meestal ook de moeilijkheden. Want net zoals bij het oudste en beroemdste millenium probleem, de *Riemann-hypothese* uit 1859, zijn zulke vragen niet in een paar volzinnen te beantwoorden. De vermoedens zelf kunnen allebei wel in één zin geformuleerd worden, maar daar wordt de niet-ingewijde weinig wijzer van. Bij de Riemann-hypothese luidt die zin: *alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn*. En het Poincarévermoeden is: *elke compacte enkelvoudig samenhangende 3-variëteit is homeomorf met de 3-sfeer*. Duidelijk? Nee dus. Om de nieuwsgierigheid van de geïnteresseerde leek te bevredigen, is meer nodig, bijvoorbeeld een boek.

Over de Riemannhypothese zijn al enige goede populaire boeken geschreven. Mijn favorieten zijn die van John Derbyshire [4] en Marcus du Sautoy [5]. Bij de succesvolle UVA-webklas wiskunde voor scholieren over de Riemann-hypothese hebben we ze als prijs aan de beste deelnemers uitgereikt. Bestaat er ook zo'n aanbevelenswaardig boek over het vermoeden van Poincaré? Zeker! Het boek van Donal O'Shea waaraan deze bespreking gewijd is, is zo'n voltreffer. Het is goed en toegankelijk geschreven, wiskundige voorkennis is nauwelijks vereist, de hoofdtekst bevat geen formules (alleen in de eindnoten komen een paar formules voor) maar toch heb je als lezer op het eind het idee dat je een goed uitzicht hebt gekregen op de moderne meetkunde.

Hoe krijgt O'Shea dat voor elkaar? Onder meer door het niet alleen maar over de wiskunde te hebben, maar ook aandacht te schenken aan relevante menselijke en sociale aspecten. Zo ontbreekt het hierboven geschetste spannende relaas over de wederwaardigheden van Grisha Perelman en zijn baanbrekende ideeën natuurlijk niet. Maar in de eerste plaats gaat het boek toch over wiskunde. Over meetkunde en topologie om precies te zijn. Het bevat een brede historische schets van de lange weg die leidde tot het vermoeden dat Poincaré in 1904 formuleerde. En van de vele pogingen in de twintigste eeuw om het te bewijzen. Het vertelt hoe anderen stukje bij beetje de weg effenden, maar toch steeds op onoverkomelijke moeilijkheden leken te stuiten totdat Perelman uiteindelijk nieuwe instrumenten schiep waarmee hij het raadsel tot klaarheid kon brengen.

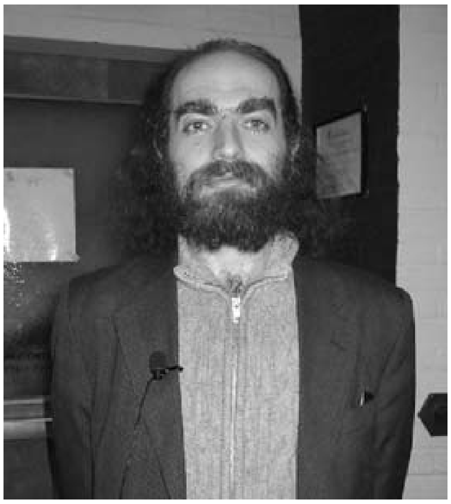
Klassieke meetkunde

Het boek van O'Shea beschrijft vrijwel de gehele geschiedenis van de meetkunde van de oude Babyloniërs tot aan de baanbrekende inzichten van Gauss, Riemann en Poincaré zelf. Daarnaast geeft het direct al in de hoofdstukken 3 en 4 een heldere inleiding in de topologie, de wereld van vormen, oppervlakken en variëteiten. Een kort historisch hoofdstuk over de ontdekking van de bolvorm van de aarde en de moeilijkheid om het aardoppervlak op platte kaarten weer te geven is eraan voorafgegaan.

De historische lijn wordt in hoofdstuk 5 weer opgepakt met een bespreking van de meetkunde van Euclides en de axiomatische methode. Deskundig en met veel respect behandelt O'Shea de betekenis van *de Elementen*, het monumentale werk van Euclides dat bijna twee millennia lang het gezicht van de wiskunde heeft bepaald. De logische, axiomatische opbouw ervan wordt uitgebreid beschreven, maar O'Shea plaatst ook kritische kanttekeningen. Zoals kenners weten, zijn de meetkundige axioma's en postulaten bij nadere beschouwing minder helder dan ze op het eerste gezicht lijken, en ook op de logische afleiding van veel stellingen valt heel wat af te dingen. Veel is daarover in de loop der tijden al geschreven, en tal van aanvullingen en verbeteringen zijn voorgesteld. Dat heeft generaties van schoolmeesters en filosofen er echter niet van weerhouden de Elementen voor te stellen als het beste dat de menselijke geest heeft voortgebracht. Voor hen was en bleef het werk van Euclides een onaantastbaar monument, een toonbeeld van vlekkeloos redeneren en bewijzen. Op school was de axiomatische methode van Euclides tot ver in de vorige eeuw de leidraad voor het meetkundeonderwijs.

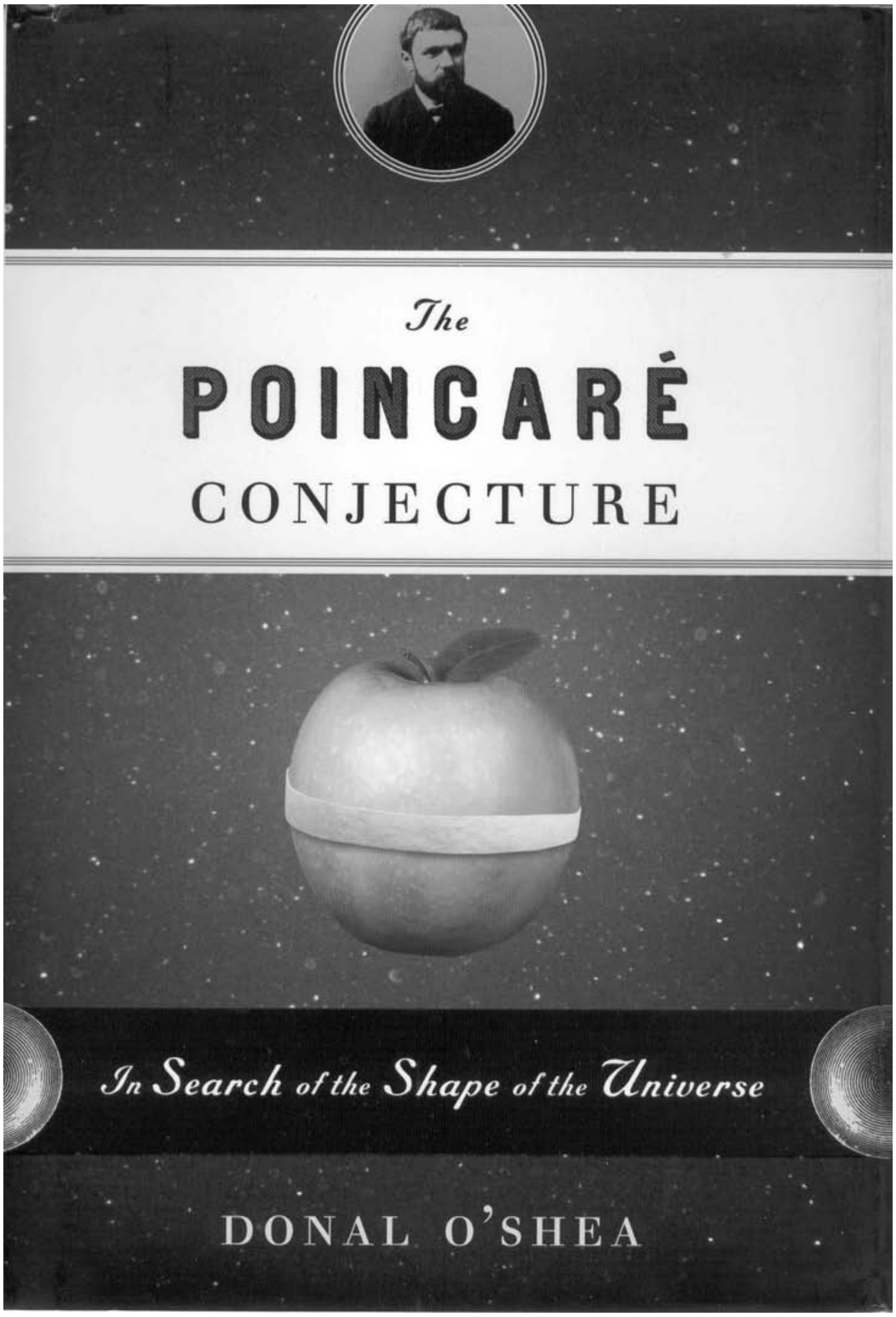
O'Shea is daar weinig gelukkig mee. Hij stelt zelfs dat de axiomatische behandeling van de vlakke meetkunde op school menig kritisch bètatalent van de wiskunde kan hebben weggevoerd omdat de gepretendeerde logica eerder verwarrend en willekeurig dan systematisch en overtuigend is. "Unless you are unusually rebellious, it is easy to blame yourself and conclude that mathematics is beyond you." (p. 52).

Dat zou best eens zo kunnen zijn. In elk geval geldt het in nog heviger mate voor de Euclidische 'voortgezette meetkunde' in het huidige vwo-vak wiskunde B, waarin leerlingen gedwongen worden pseudobewijzen te geven uitgaande van stellingen op de formulekaart die ze op gezag moeten accepteren. Ik heb gemerkt dat veel wiskundig getalenteerde scholieren tegen die meetkunde een grote weerzin hebben ontwikkeld. Jammer, maar wel begrijpelijk. Ook jammer is het dat we er nog tot minstens 2013 mee opgescheept zitten, want


Grigory Perelman

dan pas zullen er nieuwe programma's van kracht worden. Overigens, hoe moeilijk een correcte axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde is, zie je direct als je verrijkend lesmateriaal op dat gebied bekijkt dat speciaal voor schoolgebruik geschreven is. Zelfs als de auteurs ervan wiskundige strengheid pretenderen, is het niet moeilijk er cirkelredeneringen en logische missers in aan te wijzen.

Maar laat ik niet afdwalen en met O'Shea de historische lijn volgen. Gauss, Bolyai en Lobatchevsky, de *non-Euclideans*, zoals O'Shea ze noemt, rekenen in het begin van de negentiende eeuw af met de pretentie van de euclidische meetkunde als enige mogelijke meetkunde, maar de echte revolutie komt pas wanneer Bernhard Riemann in 1854 in Göttingen in het bijzijn van Gauss zijn *Habilitationsvortrag* houdt onder de titel *Über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen*. Het belang ervan voor de moderne wiskunde kan niet worden overschat. O'Shea maakt dat overtuigend duidelijk. Hij noemt daarbij als eerste het onderscheid dat Riemann maakt tussen werkelijkheid en wiskundig model. Zijn voordracht gaat alleen maar over wiskundige modellen. Visionair is het beeld dat Riemann schetst van wat de begrippen *ruimte* en *meetkunde op een ruimte* inhouden. De moderne definitie van een n-variëteit (Engels: n-*manifold*) als een ruimte waarin elk punt een omgeving heeft die homeomorf is met $\mathbf{R}^n$, is op Riemanns voordracht terug te voeren. Revolutionair is Riemanns inzicht dat een omvattende euclidische ruimte daarbij niet nodig is; hij gaat hierin veel verder dan Gauss, die gekromde oppervlakken altijd wel in een omvattende driedimensionale ruimte plaatste. Riemann beperkt zich ook niet tot twee of drie dimensies, maar laat ruimtes toe met willekeurig veel dimensies, zelfs oneindig veel.



Meetkunde als opgelegde structuur

Een gegeven ruimte kan allerlei verschillende vormen van meetkunde herbergen. Meetkunde is een extra structuur op de ruimte die Riemann definieert door wat we tegenwoordig een krommingstensor noemen, een instrument waarmee lengtes van krommen, hoeken tussen krommen en oppervlaktes van driehoeken kunnen worden gemeten. De kromming van een ruimte kan van punt tot punt variëren. Einsteins algemene relativiteitstheorie is zonder deze ideeën ondenkbaar.

Zoals op alle terreinen was Riemann ook in de meetkunde zijn tijd ver vooruit. In feite kun je de meetkunde van de negentiende eeuw nog voor een belangrijk deel zien als een gevecht om de Euclidische axiomatische methode verder te vervolmaken, met als eindpunt Hilberts *Grundlagen der Geometrie* uit 1899 waarin hij de Euclidische vlakke meetkunde volledig axiomatisch fundeert. Maar daarmee was dat hoofdstuk afgesloten; alleen op school zou de euclidische methode in de vlakke meetkunde nog lang voortleven.

Het was vooral Poincaré, volgens velen de grootste wiskundige na Riemann, die op Riemanns meetkundige ideeën voortbouwde. Zo werd hij onder meer ook de schepper van de topologie, de studie van de eigenschappen van n-variëteiten die niet veranderen bij continue vervormingen (homeomorfismen). Hebben twee n-variëteiten een verschillende topologische invariant, dan kunnen ze dus niet homeomorf zijn. Zo'n invariante eigenschap is bijvoorbeeld *enkelvoudige samenhang*, die inhoud dat je elke lus in zo'n variëteit kunt samentrekken op een punt. De n-sfeer, de verzameling van alle punten in $\mathbf{R}^{n+1}$ met afstand 1 tot de oorsprong, is enkelvoudig samenhangend, en hetzelfde geldt dus voor iedere n-variëteit die met de n-sfeer homeomorf is. Het vermoeden van Poincaré zegt dat voor iedere compacte 3-variëteit ook het omgekeerde geldt: als ze enkelvoudig samenhangend is, is ze homeomorf met de 3-sfeer.

Ik weersta de verleiding om nog meer over de inhoud van dit boek te vertellen. In plaats daarvan sluit ik af met een paar woorden over de ondertitel: 'In Search of the Shape of the Universe'. Die lijkt te wringen met het strikte onderscheid dat Riemann maakte tussen werkelijkheid en wiskundige modellen. De ondertitel suggereert dat het bewijs van het vermoeden van Poincaré iets zegt over het heelal waarin we leven. Dat is aanvechtbaar. Het vermoeden is een wiskundig vermoeden dat betrekking heeft op compacte 3-variëteiten. Of dat bruikbare modellen zijn voor het ons omringende heelal, is een vraag die we moeten overlaten aan fysici en kosmologen.

The Poincaré Conjecture – In Search of the Shape of the Universe, *Donal O'Shea*, Walker & Company, New York, 2007, ISBN 978-0-8027-1532-6.

Referenties

1 Sylvia Nasar, David Gruber, 'Manifold Destiny', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (1) (2007), pp. 34–43

2 Josef Steenbrink, 'Rechtvaardiging of heiligverklaring?', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (1) (2007), pp. 44–45

3 Roland van der Veen, 'De vorm van de ruimte', *Pythagoras* 45(4), pp. 4–10

4 John Derbyshire, *Prime Obsession — Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington, D.C., 2003

5 Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*, Harper, London, 2003