

De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

*Redacteur: Ferdinand Verhulst
e-mail: f.verhulst@uu.nl*

Wis en waarachtig?

De afscheidsrede van professor Jan de Graaf [1] is een boeiend relaas van zijn ervaringen aan de Bewaarschool van de nonnen te Raamsdonksveer en de Technische Universiteit te Eindhoven. Zijn kritische opvattingen over het onderwijs, zowel van toen als van nu, steekt hij niet onder stoelen of banken. Zo merkt hij onder andere op dat bij de godsbewijzen, waaraan hij in zijn jeugd werd blootgesteld, het abstract wiskundig vervaardigde opperwezen ook tirannieke eigenschappen heeft gekregen, terwijl zijn kritiek op het rekengeklungel aan de huidige basisschool ook niet zuinig is. Kortom, een verhaal waar (vrijwel) iedereen het mee eens kan zijn.

Het wordt minder overtuigend als het gaat over wiskunde als waarheid. Natuurlijk, een wiskundestelling is waar omdat hij met de regels van de logica bewezen kan worden. De vraag is echter of de vergelijkingen waarmee natuurverschijnselen beschreven worden in dezelfde zin ook waar zijn. Het antwoord is een hartgrondig nee.

Zelfs de Maxwellvergelijkingen, die door de Graaf als bijna onaanastbaar gezien worden, zijn onhoudbaar gebleken bij verfijning van de meetapparatuur. Soms kan het helpen een beetje aan de vergelijkingen te knoeien en bijvoorbeeld de diëlectrische constante van de frequentie af te laten hangen. Hoe dan die frequentieafhankelijkheid er precies uitziet kan niet tot iedere gewenste precisie berekend worden. Zelfs de geldigheid van de Maxwellvergelijkingen is beperkt als niet-lineaire effecten een rol gaan spelen. Om deze effecten te elimineren kunnen zuiverder experimenten gedaan worden, zoals de verstrooiing van licht aan electronen. Dan blijkt echter alras dat alleen de gekwantiseerde vorm van de Maxwellvergelijkingen, gekoppeld aan de vergelijkingen voor het electron, de metingen kunnen verklaren. Na ± 1930 werd deze Quantum Electro Dynamica (QED) tot de allesverklarende theorie uitgeroepen. Ondanks een aantal onvolkomenheden was dit een verbluffend succesvolle theorie, die echter de laatste vijftig jaar weer het veld heeft moeten ruimen voor het Standaardmodel, waarin het tot nu toe ontbrekende Higgsdeeltje het enige schoonheidsfoutje is. Naast enorme experimentele inspanningen heeft dit model zijn ontstaan te danken gehad aan de truc die men van Yang en Mills geleerd had, om van ijkvarianties te eisen dat ze ook lokaal geldig zouden moeten zijn.

De eenvoudigste manier om dit te begrijpen is om het artikel van Kobe [2] te lezen, waarin wordt aangetoond dat de Maxwellvergelijkingen afgeleid kunnen worden uit de eis van vorminvariantie van de Lagrangiaan. Omdat dit zuivere wiskunde is wordt De Graaf, en velen met hem, verleid om te denken dat de wiskunde iets zegt over de wereld om ons heen, ondanks het feit dat hij tegen de studenten zegt dat de wiskunde nergens over gaat. Deze houding, die blijkt uit het feit dat hij het jammer vindt dat er geen magnetische monopolen zijn, is trouwens in strijd met het citaat van de door hem zo verheerlijkte Hertz, die zegt: "Nochtans laten zulke veelomvattende en juiste vergelijkingen zich pas ontdekken, als iedere subtiele hint naar de waarheid, die de natuur prijsgeeft, met de scherpste blik wordt geduid."

Heden ten dage voelen veel studenten in de theoretische natuurkunde zich aangetrokken tot deze manier, in de hoop om alleen met eenvoudige wiskundig geformuleerde uitgangspunten en zonder onmiddellijk contact met experimenten, door te dringen tot diepzinnige inzichten over de natuur. Dit lijkt mij een ijdele hoop omdat ik niet kan geloven dat de vorm de inhoud bepaalt.

Bovendien maken deze studenten, die zich op de stoel van een schepper wanen, een ernstige denkfout, omdat ze zelfs met alle kennis

van hoe de wereld op het sub,sub, . . . 33 maal sub niveau in elkaar steekt, niet in staat zijn het kookpunt van water te berekenen.

Kom daarom terug op aarde en ga werken aan de dingen die er zijn [3].

Bibliografie

1. J.de Graaf, 'Waarheid, Spel of Taal', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1 (maart 2008), p.12.
2. D.H.Kobe, 'Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics', *Am.J.Phys.*, 48 (1980) 348.
3. Multatuli, Idee 577.

Th.W.Ruijgrok (Instituut voor Theoretische Fysica, Utrecht)

Het eenvoudige leven

In zijn artikel pleit Uittenbogaard voor een andere rekenaanpak dan die Van de Craats voorstaat. Wel beschouwd vervangt Uittenbogaard het ene algoritme door het andere: dat van Van de Craats door het zijne. Logisch gezien vervalt daarmee elk bestaansrecht voor zijn kritiek op algoritmes. Wellicht dat de emotionele toon van zijn stuk andere drijfveren verradt. De arena der speculaties betreed ik echter liever niet. Een groot deel van de discussie die Uittenbogaard poogt te voeren is semantisch. Zijn methode zou tot 'inzicht' leiden (en die van Van de Craats dus niet). Wat 'inzicht' is, wordt niet beschreven. Als enige anekdotische onderbouwing noemt hij het feit dat beroepsmatige wiskundigen sommen oplossen volgens zijn methoden. Dat lijkt me helemaal niet verwonderlijk: algoritmes zijn voor ervaren gebruikers niet per definitie de meest effectieve methode. Voor onervaren schoolkinderen bieden ze echter structuur en zekerheid. De vlucht naar de rekenmachine bij 'grote getallen' die Uittenbogaard propageert, is onzinnig. Wat is het nut van 'handig rekenen' bij alleen kleine getallen? Didactisch een twijfelachtige keuze, want wie trekt de scheidlijn en op basis waarvan? Of laten we dat over aan de zelfstandige lerende leerling? In dat laatste geval durf ik een gokje te wagen waar de scheidlijn terechtkomt (het getal 1 is immers ook best groot). Uittenbogaard illustreert met zijn 200x200-voorbeeld helder waar zijn redenering mank gaat. Zijn 'algoritme', "[...] Terwijl je boerenverstand zegt: een 4 met vier nullen, klaar!", werkt alleen voor hen die het Van de Craats-algoritme al ontelbare malen hebben zien werken en in de uitkomsten structuur hebben ontdekt. Dat is nu juist kenmerkend voor boerenverstand: verstand gebouwd op de jarenlange ervaring dat je in augustus het beste oogst en niet in februari al nieuwe aardappels moet verwachten. Uittenbogaard verzucht: "was het leven maar zo eenvoudig" in reactie op de stelling van Van de Craats "Voor elk van de vier hoofdbeweringen is er één universeel, werkend recept." Het leven is zo eenvoudig. Een kind dat gaat leren fietsen, leg je ook niet eerst uit wat impulsmoment is en waarom je al rijdend eigenlijk niet meer kunt omvallen. Je houdt het zadel vast gedurende enkele tientallen oefenritjes totdat je vermoedt dat het goed zal gaan.

Ralph Hanzen (vier jaar eerstegraadsleraar wiskundedocent op vmbo, havo, vwo, thans werkzaam in het bedrijfsleven)

Zo simpel kan het niet zijn

In zijn artikel "Geen catechismus leren, maar nadenken" levert Willem Uittenbogaard fikse kritiek op Jan van de Craats. Jammer dat het zo persoonlijk wordt, dat vertroebelt de discussie met sentimenten die niet bevorderlijk zijn voor een open en eerlijke gedachtewisseling.

Uittenbogaard geeft direct aan het begin van zijn betoog een voorbeeld. Dit voorbeeld is kenmerkend zowel voor de problematische gevolgen van het realistisch rekenen als voor de misvattingen van Uittenbogaard. Hij schrijft:

"Bij eerstejaars pabostudenten schrijf ik op het bord: $2/3 \times 4/5$ en vraag studenten om dat op te lossen. Er zijn er altijd wel een paar die roepen: gelijknamig maken. En zo komt er op het bord: $2/3 \times 4/5 = 10/15 \times 12/15 = 120/15 = 8$ (Dat '= 8' voeg ik er meestal aan toe).

Bij het stemmen over het al dan niet juist zijn van dit antwoord is altijd ongeveer de helft vóór. Nogal wat studenten twifelen aan hun antwoord van 8/15. Dat lijkt zo simpel. Dat kan niet goed zijn. Daar sta je dan als opleider. Ook mijn: 'hoeveel zou 2/3 van 80 cent zijn?', helpt weinig studenten verder."

Ik kan dit voorbeeld aanvullen met vele vergelijkbare voorbeelden, niet alleen bij Pabostudenten, maar ook bij studenten economie of techniek in het HBO.

Het eerste wat je hieruit kunt concluderen is dat het met de rekenvaardigheid van deze studenten erg slecht gesteld is. Aangezien ze hebben leren rekenen in de huidige tijd, de tijd dat alle rekenmethoden geënt zijn op het realistisch rekenen, heeft de didactiek van realistisch rekenen kennelijk geleid tot zeer zwakke rekenaars op het HBO. Alleen dat is al reden genoeg om ernstig te twifelen aan de zegeningen van het realistisch rekenen.

De reacties van de studenten geven verdere aanwijzingen dat realistisch rekenen niet werkt. Zo is het opmerkelijk dat de realistische hulp van Uittenbogaard (de vraag wat 2/3 van 80 cent zou zijn) geen enkel effect heeft. Als de realistische didactiek effectief zou zijn, dan zou je dat toch ook hier moeten zien, maar dat blijkt niet het geval. Dat is overigens in overeenstemming met mijn eigen ervaringen.

De studenten die wel het goede antwoord hebben twifelen aan zichzelf. Ze denken dat hun oplossing verkeerd is omdat het zo eenvoudig is. Kennelijk hebben zij geleerd dat dergelijke sommen (alle reken-sommen?) vreselijk ingewikkeld zijn, en dat een eenvoudige oplossing verdacht is.

Ik concludeer dat deze studenten allemaal zijn opgegroeid met realistisch rekenonderwijs, een zeer geringe rekenvaardigheid hebben, geen baat hebben bij aanwijzingen volgens de didactiek van het realistisch rekenen, een beeld hebben dat rekenen buitengewoon complex is, niet in staat zijn de eigen antwoorden te controleren, noch door middel van methoden binnen het kale rekenen zelf, noch door middel van het gebruik van realistische contexten, en tenslotte alle zelfvertrouwen ontberen.

En toch pleit Uittenbogaard voor realistisch rekenen. Sterker nog, hij pleit hiervoor op basis van precies dit voorbeeld, zijn eigen voorbeeld, een voorbeeld dat hij jaar na jaar opnieuw tegenkomt. Vasthoudendheid? Of stijfkoppigheid?

Van de Craats daarentegen geeft twee redenen waarom het ontbreken van standaard algoritmes tot verwarring leidt. Standaard algoritmes zijn eenvoudig en met geringe foutkans uit te voeren, en leerlingen hoeven niet te verzinnen welke van de (voor hen totaal verschillende) oplossingsmethoden ze nu weer moeten gebruiken. Het voorbeeld van Uittenbogaard toont dit feilloos aan.

De keuze tussen een didactiek die inmiddels aan alle kanten beproefd is en die beproefd heeft welk degelijk te werken, is toch niet moeilijk. Om de studenten van Uittenbogaard te parafraseren: inderdaad, zo simpel kan het zijn.

Gerard Verhoef (Docent wiskunde Hogeschool van Amsterdam)