

Bernard Meulenbroek

Toegepaste Wiskunde,

Technische Universiteit Delft

Mekelweg 4

2628 CD Delft

B.J.Meulenbroek@ewi.tudelft.nl

Vakantiecursus

Bliksem boven de wolken

Hoe ontstaat de bliksem? Ook al is nog lang niet alles bekend over dit fenomeen, toch weten we al heel wat over allerlei aspecten. Bernard Meulenbroek, onderzoeker aan de Technische Universiteit Delft, deed promotie-onderzoek aan het CWI naar bliksem boven de wolken. De basisprincipes geeft hij in dit artikel, dat eerder verscheen in de Vakantiecursus van het CWI.

Bliksem is een van de meest indrukwekkende natuurverschijnselen. Recent is gebleken, dat er zich rond onweerswolken veel meer afspeelt dan dat men oorspronkelijk dacht. Niet alleen onder en tussen de onweerswolken is bliksem te zien, ook boven de wolken zijn allerlei lichtverschijnselen waargenomen. Sommige zelfs tot in de ionosfeer, op 90 kilometer hoogte. Een overzicht van deze verschijnselen zien we in figuur 1, links.

Deze verschijnselen heeft men namen gegeven als 'sprites', 'elves', 'blue jets' en 'pixies'. Als je toch niet weet wat voor verschijnselen het zijn, kun je net zo goed wat fantasie gebruiken bij de naamgeving.

Al deze lichtverschijnselen zijn het gevolg van gasontladingen. Het basismechanisme dat hiervoor verantwoordelijk is, werkt als volgt. Tussen de onweerswolk en de grond en tussen de wolk en de ionosfeer is een potentiaalverschil en dus een elektrisch veld. In de

lucht zijn altijd wel wat vrije elektronen en ionen aanwezig (bijvoorbeeld ten gevolge van kosmische straling) en deze worden versneld in dat veld. Wanneer een elektron hard genoeg gaat, kan het een stikstofmolecuul ioniseren; bij deze botsing komt er een extra elektron vrij alsmede een N_2^+ ion. Op deze manier krijgen we een lawine van elektronen. Die zijn zelf niet te zien, maar naast het feit dat ze moleculen ioniseren, kunnen ze ook moleculen aanslaan (een elektron uit de buitenste schil van het molecuul in een hogere energietoestand brengen). Wanneer zo'n molecuul terugvalt naar de grondtoestand, zendt het een foton uit. En dat zijn de fotonen die waargenomen kunnen worden. Nu is natuurlijk de vraag of een dergelijk eenvoudig mechanisme verantwoordelijk kan zijn voor de grote verscheidenheid aan patronen in figuur 1, links.

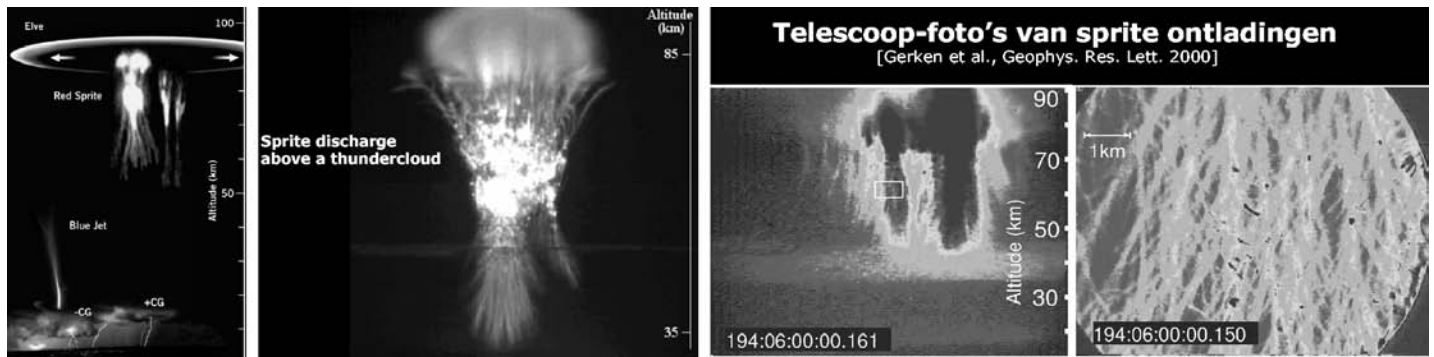
In de volgende paragrafen gaan we kijken

in hoeverre we die vraag kunnen beantwoorden. Allereerst gaan we kijken of we ook experimenteel vat kunnen krijgen op deze verschijnselen. Vervolgens proberen we een wiskundig model op te stellen vanuit de microscopische vergelijkingen van het elektromagnetisme. Tenslotte moeten we de wiskundige vergelijkingen die uit dit model volgen oplossen en kijken of de oplossingen inderdaad lijken op de waargenomen patronen.

Van waarnemingen naar experiment

Laten we eens wat beter kijken naar een 'sprite'ontlading.

Wanneer we inzoomen, zien we dat een sprite opgebouwd is uit een groot aantal kanaaltjes, zogenaamde streamers. Willen we het hele object begrijpen, dan moeten we dus eerst deze streamers begrijpen. Maar hoe kunnen we ooit zo'n enorm grote ontlading in een laboratorium bestuderen? Hier worden we geholpen door de schaling. Hoger in de lucht is de dichtheid lager, op 70 km een factor 10^5 . Dat betekent, dat het veel langer duurt voor moleculen tegen elkaar botsen. De vrije weglengte is een factor 10^5 groter. Maar af-



Figuur 1 Links: verschillende soorten gasontladingen boven onweerswolken; midden: opname van sprite-ontladingen; rechts: sprite-ontladingen ingezoomd

standen worden gemeten in termen van de vrije weglengte: het maakt niet uit hoeveel meter een deeltje heeft afgelegd, het aantal vrije weglengtes is van belang. Zaken liggen op het aardoppervlak veel dichter bij elkaar dan hoog in de lucht en wel een factor 10^5 . En dat betekent, dat een kilometersgrote ont-lading hoog in de lucht slechts centimeters groot is op het aardoppervlak. Er zit echter wel een addertje onder het gras. De relevante energieschaal is de ionisatie-energie van stikstof; die schaal is niet. Dit betekent dat snelheden ook niet schalen (de kinetische energie van de elektronen schaal is niet). Dat betekent, dat gebeurtenissen niet alleen veel groter zijn op 70 km hoogte, maar ook veel langer duren. (het quotient is immers constant). En dus zijn de gebeurtenissen in het lab veel sneller dan in de lucht. Een gasontlading van een seconde doet er in het lab maar een paar microsecondes over.

Dit stelt hoge eisen aan de experimenten. Voor het maken van foto's van de ontladingen is een camera nodig die in een nanoseconde een foto kan maken. In figuur 2, links, zien we de opstelling. Tussen de naald boven en de plaat beneden wordt een hoog elektrisch veld aangelegd. In principe kan de samenstelling en de druk van het gas in de kaner gekozen worden, meestal wordt omgevingslucht gebruikt. Door het hoge veld vindt een gasontlading plaats; hiervan wordt een foto genomen. En dan krijgen we het volgende resultaat: een streamer die van boven naar beneden loopt; het hele kanaal lijkt licht te geven. Maar is dat wel wat er echt aan de hand is? Als we de belichtingstijd van de camera verkorten, zie figuur 2 rechts, zien we alleen nog maar een aantal lichtgevende spots. Alleen de voorkant van het kanaal geeft licht. Doordat we in figuur 2 midden, een langere belichtingstijd hadden, hebben we eigenlijk een aantal foto's bij elkaar geteld, waarbij het kanaal steeds verder propageerde.

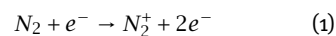
Als we dus een nog kortere belichtingstijd

zouden kunnen nemen, zouden we dus steeds kleinere spots zien. Natuurlijk zouden we graag een video-opname van het experiment maken om te controleren of het inderdaad de voorkant is, die als enige lichtgeeft. De camera die deze snapshots maakt, heeft seconden nodig (door het uitlezen van de data naar de computer) voor een nieuw snapshot gemaakt kan worden. Een serie snapshots (en dus een video-opname) kunnen we zo dus vergeten.

Nu hebben we dus al een beter beeld van wat een streamer is: een propagerend kanaaltje waarvan alleen de kop actief is (alleen daar zijn vrije elektronen). Kunnen we dit ook theoretisch begrijpen?

Van microscopische vergelijkingen naar een wiskundig model

Laten we kijken of we de propagatie van streamers kunnen begrijpen met zo min mogelijk ingrediënten. In de experimenten hebben we twee parallelle platen waartussen een grote spanning wordt aangelegd. In het model moeten dus zeker het elektrisch veld $\mathbf{E}$ en de potentiaal ϕ een rol gaan spelen. Verder kan de samenstelling van het gas gekozen worden; laten we beginnen met te kijken naar pure stikstof. Dan hebben we elektronen en ionen nodig. We schrijven n_e voor de elektronendichtheid en n_+ voor de dichtheid van de N_2^+ ionen. Hier komt dus een aanname in het model; we nemen alleen de reactie



mee. Eigenlijk zouden we de N_2 dichtheid ook moeten meenemen, omdat die afneemt door bovenstaande reactie. De stikstof is echter in overmaat aanwezig en kan dus als constant beschouwd worden.

Nu moeten we de wetmatigheden zoeken die n_e , n_+ , $\mathbf{E}$ en ϕ aan elkaar relateren. Het is handig om de elektronenstroomdichtheid $\mathbf{J}$

te introduceren. Deze voldoet aan de wet van Ohm:

$$\mathbf{J} = n_e \mathbf{E}.$$

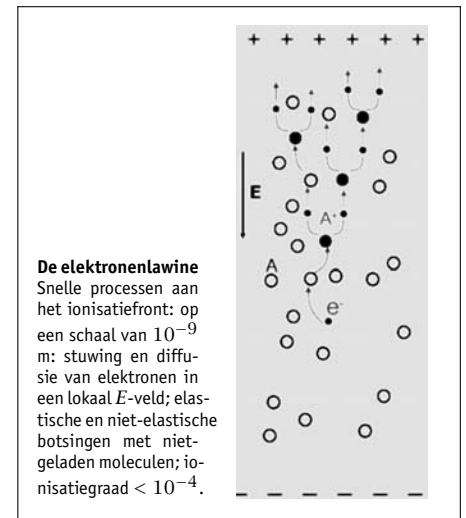
(dit is niet de gebruikelijke vorm $V = IR$, maar komt op hetzelfde neer in een draad met oppervlak A en lengte L ; $I = JA$, $V = LE$ en $R = L/An_e$.) De elektronen zijn veel lichter dan de ionen en stromen dus veel sneller; we nemen aan dat de ionen niet stromen tijdens het proces en schrijven voor de ionenstroomdichtheid $\mathbf{J}_+ = 0$.

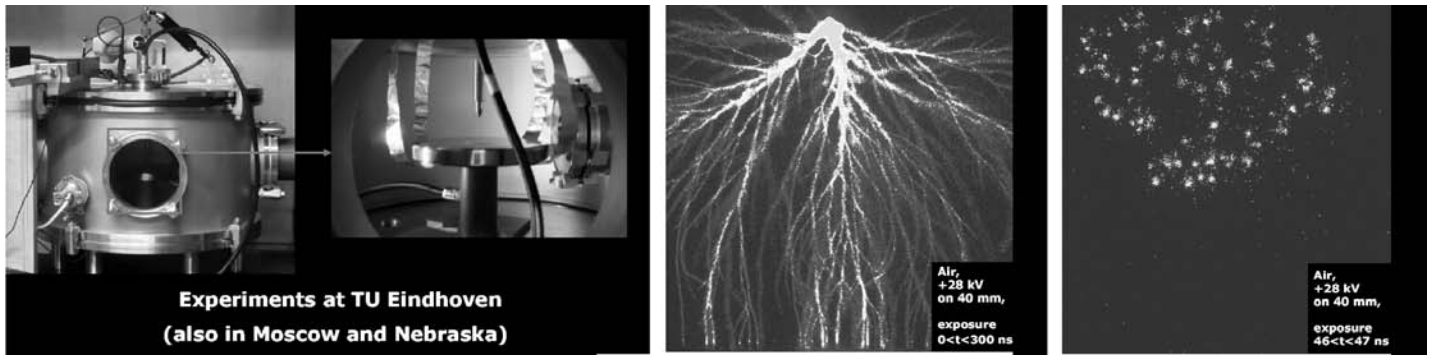
Nu gebruiken we de eerste wetmatigheid uit de natuurkunde: behoud van elektronen. Zou er geen creatie van elektronen zijn, dan geldt:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2)$$

Hier staat in feite, dat de afname van de lading gelijk is aan de stroom.

Aangezien de reactie (1) extra elektronen-ionen paren genereert is de rechterkant van vergelijking (2) niet nul; er is een bron van nieuwe elektronen.





Figuur 2 Links: opstelling van het experiment; midden en rechts: resultaten van de experimenten

We moeten dus hebben

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J} = \text{bron.} \quad (3)$$

Een zelfde soort vergelijking hebben we voor de ionen. Iets eenvoudiger aangezien ze niet stromen en met dezelfde bron (elektronen en ionen worden in paren gecreeerd: behoud van lading):

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = \text{bron.} \quad (4)$$

Nu moeten we een uitdrukking vinden voor de bron: hoeveel extra elektronen worden er gegenereerd bij gegeven aantal en veld? Dit is een complex proces, maar we weten zeker dat de bron nul is in afwezigheid van ofwel $\mathbf{E}$ of n_e . Deze bronterm is experimenteel gemeten voor verschillende waarden; de uitkomsten blijken goed gefit te kunnen worden door de formule:

$$\text{bron} = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}. \quad (5)$$

Hier staat in feite het product van de elektronenstroom $n_e |\mathbf{E}|$ en de kans dat er ionisatie plaatsvindt $e^{-1/|\mathbf{E}|}$. En nu lijken we klaar te zijn; de beginvoorwaarde, het externe elektrische veld, bepaalt de bronterm (5) waardoor de PDE's voor de elektronen (3) en ionen (4) volledig vastliggen. Er zit echter een addertje onder het gras. Aanvankelijk is deze benadering wel goed, maar gedurende het proces worden er steeds meer vrije ladingen gecreeerd, en die wijzigen het elektrische veld. We moeten oplossen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e. \quad (6)$$

(Zie kader voor de afleiding.) Voor lage ladingsdichtheden geeft dit wel het constante achtergrondveld, maar voor hoge dichtheden zal deze vergelijking meegenomen moeten worden. Tenslotte werken we in de elektrostatistische benadering. Magneetvelden (die wel degelijk aanwezig zijn door de stromen-

de lading) kunnen verwaarloosd worden. Dat betekent dat we ook hebben

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Samenvattend hebben we:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (n_e \mathbf{E}) = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e, \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (10)$$

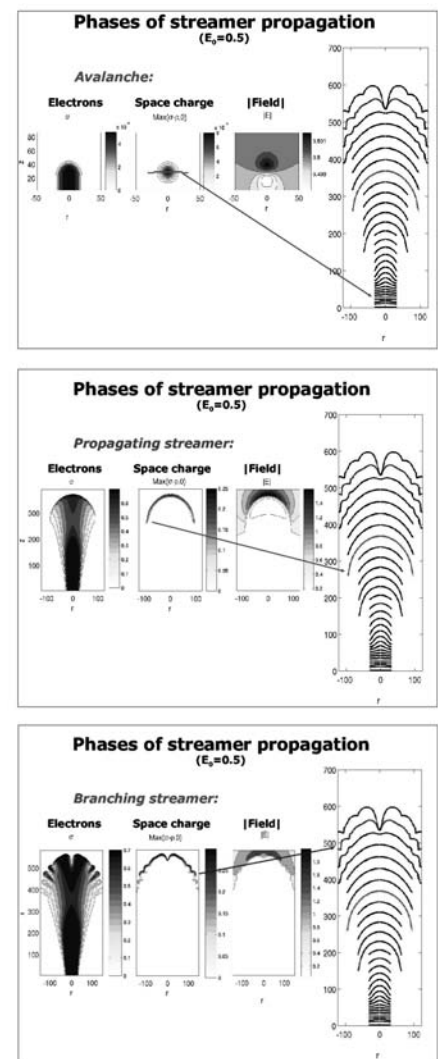
Oplossen van het model

Op het eerste gezicht lijkt het niet lastig het model (7)-(9) op te lossen. Gegeven een achtergrondveld en een beginconfiguratie van de lading (bijvoorbeeld een enkel elektron) kan via vergelijking (9) het gewijzigde elektrische veld uitgerekend worden. Vervolgens kunnen nieuwe ladingsdichtheden berekend worden met de vergelijkingen (7) en (8) en kunnen we weer terug naar de eerste stap. We lopen echter tegen allerlei problemen aan. Ten eerste blijkt een volledige 3D simulatie erg moeilijk; we nemen aan dat de streamer cilindrisch symmetrisch is en gebruiken de coördinaten r en z . Wanneer dit op de computer gezet wordt krijgen we de volgende serie plaatjes. In de drie plaatjes links staan achtereenvolgens elektronendichtheid, netto lading en elektrisch veld. We zijn met een elektron in de oorsprong begonnen en we zien dat er een lawine aan elektronen is ontstaan die tegen de richting van het elektrisch veld in propageert. Het elektrisch veld wijkt nu nog niet veel af van het achtergrondveld, zie figuur 3, bovenste plaatje.

Laten we de simulatie verder lopen, dan zien we dat de streamer verder naar boven propageert en dat er een dun ladingslaagje

aan de voorkant ontstaat. Ook zien we dat daar het veld fors verschilt van de achtergrondwaarde, zie figuur 3, middelste afbeelding.

Laten we de simulatie nu nog verder lopen, dan wordt het veld nog hoger en splitst de streamer zich spontaan, zie figuur 3, onderste plaatje.



Figuur 3 Numerieke simulatie, eerste, tweede en derde snapshot

Calculus van elektrische stroom

Gegeven een object E met oppervlak S in de $\mathbf{R}^3$. Stel dat we een stromingsveld (van bijv. water) $\mathbf{v}$ hebben; dan wordt de hoeveelheid water die door S stroomt de flux genoemd; deze flux kan berekend worden met behulp van een integratie over dit oppervlak:

$$\text{flux} = \int \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

Een standaardstelling uit de analyse geeft

$$\int \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV. \quad (11)$$

Vergelijk met de hoofdstelling van de analyse: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Aan de linkerkant staat de functie op de rand van het domein, aan de rechterkant de afgeleide binnen het domein, net als in vergelijking (7). Wij gebruiken deze vergelijking met het vectorveld $\mathbf{J}$; de flux is in dit geval de lading die wegstroomt door een oppervlak S :

$$\text{flux} = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV.$$

Deze flux moet gelijk zijn aan de afname van de elektronen in dit gebied:

$$\text{afname lading} = \int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV.$$

Wanneer we deze gelijkstellen, krijgen we

$$\int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV$$

en aangezien dit voor een willekeurig object E moet gelden, krijgen we

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Op soortgelijke wijze kan vergelijking (6) afgeleid worden. We weten dat voor een puntlading q geldt

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Hieruit volgt direct de wet van Gauss:

$$\int \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

en op dezelfde wijze, aangezien de lading

$$q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV$$

krijgen we

$$\begin{aligned} \int \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \\ &= q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV. \end{aligned}$$

Dit moeten weer voor een willekeurig volume E gelden en dus krijgen we weer $\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e$

Hierna houdt de code ermee op, zijn de resultaten niet meer betrouwbaar. Op het plaatje aan de rechterkant staat de plaats en de vorm van de voorkant van de streamer op verschillende tijdstippen.

Theoretisch begrip

Waarom wordt het gladde oppervlak aan de voorkant van de streamer nu ineens zo bobbelig en oneffen? Dit lijkt verrassend, maar soortgelijke patronen zijn bekend uit andere takken van de natuurkunde, zoals zich vertakende sneeuwvlokken. Het volgende is namelijk aan de hand. In de bulk van de streamer is inmiddels zoveel lading aanwezig, dat die bulk geleidend is geworden. Geen elektrisch veld aanwezig, dus is de potentiaal constant. Voor de streamer zijn geen ladingen aanwezig en dus geldt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

of in termen van de potentiaal

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (12)$$

Verder wordt de snelheid, waarmee de ene regio (geleidend) de andere regio (leeg) binnendringt door de grootte van het lokale elektrische veld bepaald. Een dergelijke situatie leidt tot een Laplaceaanse instabiliteit; kleine bobbels aan de voorkant van de streamer gaan harder groeien (steiler, dus hoger veld, dus sneller) dan hun burens en worden dus steeds groter. De voorkant wordt dus steeds bobbeliger en tenslotte splitst de streamer zich. Deze situatie van het groeien van oneffenheden wordt een instabiliteit genoemd (vergelijking (12) wordt de Laplace vergelijking genoemd, vandaar de naam voor dit soort instabiliteiten).

Conclusies en vragen

In hoeverre zijn deze numerieke resultaten betrouwbaar? Is het eenvoudige model inderdaad al in staat propagatie en splitsing van streamers te verklaren? De resultaten lijken bemoedigend. Dit was het punt waar ik mijn promotieonderzoek begon, met als doel om ook analytisch vat te krijgen op het streamerprobleem. Dit onderzoek voert veel te ver om hier te behandelen, maar lijkt de numerieke resultaten te ondersteunen. En zo is er een begin gemaakt met het begrijpen van de patronen in figuur 1, links, maar is ook nog een lange weg te gaan.

Analyse van scalar- en vectorvelden

Op het internet of in een boek over vectorcalculus kunt u al het onderstaande veel uitgebreider terugvinden; ik vat de belangrijkste resultaten die ik nodig heb hier samen. Een scalarveld is een afbeelding $f(\mathbf{x})$ van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}$. Een voorbeeld van een scalarveld is de dichtheid van een object $\rho(x, y, z)$ en de temperatuur $T(x, y, z)$; dit zijn afbeeldingen van $\mathbf{R}^3$ naar $\mathbf{R}$. Een vectorveld is een afbeelding $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$.

Een voorbeeld van een vectorveld is het snelheidsveld

$$\begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix};$$

dit is een afbeelding van $\mathbf{R}^3$ naar $\mathbf{R}^3$.

Wij gebruiken scalaire velden $n_e(x, y, z)$, $n_+(x, y, z)$ en $\phi(x, y, z)$ en de vectorvelden $\mathbf{E}(x, y, z)$ en $\mathbf{J}(x, y, z)$.

Differentiëren

We definiëren de gradient van een scalair veld als volgt

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

De gradient ('afgeleide') van een scalair veld is dus een vectorveld. We definiëren de divergentie van een vectorveld als volgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

en levert dus een scalairveld op. Wanneer we deze twee combineren krijgen we de divergentie van de gradient van een scalairveld, ook wel de Laplaceaan genoemd:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

notatie $\nabla^2 \phi$, of ook wel eens $\Delta \phi$.