

Jeroen Spandaw

Faculteit EWI, Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4, 2628 CD Delft
j.g.spandaw@tudelft.nl

Onderwijs

Wiskunde in de bèta-profielen

De bordjes zijn weer verhangen, de wiskundevakken op de middelbare school zijn gereorganiseerd. Wat is er veranderd? Wat is er verschoven en wat is er verdwenen? Opvallend is het ontbreken van statistiek bij Wiskunde B. Er zullen dus na twee jaar hele lichten vwo-ers op de universiteit komen die niets van statistiek weten. Zullen leerlingen die later een bètastudie willen gaan doen, zich dit wel realiseren? Jeroen Spandaw, wiskundevakdidacticus van de Technische Universiteit Delft licht ons in.

Dit schooljaar is de wiskunde voor de bovenbouw van havo en vwo weer op de schop gegaan. De leerlingen in 4-havo en 4-vwo krijgen niet langer wiskunde A1, A12, B1 of B12, maar wiskunde C, A, B of B en D. Volgend jaar wordt dit systeem voortgezet naar de vijfde klas en in 2010 zal de eerste lichting studenten die volgens dit nieuwe systeem wiskundeonderwijs hebben genoten de universiteiten binnenstromen. De aanleiding voor deze veranderingen, die overigens niet beperkt blijven tot de wiskunde, was niet inhoudelijk, maar organisatorisch van aard: de wens om de zogenaamde deelvakken af te schaffen en alle vakken evenveel studielasturen toe te delen. Dit laatste is uiteindelijk niet gelukt.

Behalve de havisten in het profiel *Cultuur en Maatschappij*, die wiskunde na de derde klas mogen laten vallen, moeten alle leerlingen kiezen tussen wiskunde A, B en C. Leerlingen die wiskunde B doen, mogen er wiskunde D bij kiezen. In de tabel staan de minimum-eisen per profiel. Grofweg kan men stellen dat wiskunde A en C zijn bedoeld voor de leerlingen in de maatschappijprofielen, terwijl wis-

kunde B en D zich richten op de bèta's.

Een leerling kan echter als zijn school dit toestaat een zwaardere variant kiezen. Een CM-leerling kan dus bijvoorbeeld wiskunde A kiezen, maar een NT-leerling niet. In het vervolg zal ik me beperken tot de natuurprofielen van het vwo.

Wiskunde voor bèta's

Zoals de tabel aangeeft, kunnen leerlingen in het NG-profiel volstaan met wiskunde A. Voor veel bèta-studies zullen zij dan waarschijnlijk slechter voorbereid zijn (als ze al worden toegelaten) dan de huidige NG-leerlingen die minstens wiskunde B1 in hun pakket hebben. Ook in het meest exacte profiel, NT, is er sprake van een achteruitgang: wiskunde B heeft met 600 studielasturen (slu) 160 slu moeten inleveren ten opzicht van wiskunde B12.

Als we het programma van het nieuwe vak wiskunde B vergelijken met het programma van het oude vak wiskunde B1, dan zien we dat, ondanks de gelijke omvang van 600 slu, de volgende (sub)domeinen de vernieuwing niet hebben overleefd:

- discrete analyse: subdomein rijen;
- meetkunde: ruimtelijke objecten, berekeningen;
- combinatoriek en kansrekening;
- continue dynamische modellen;
- normale verdeling en toetsen van hypothesen.

De continue dynamische modellen werden

overigens in het oude systeem niet in het centraal schriftelijk examen getoetst. Uit het programma van wiskunde B12 zijn bovendien gesneuveld:

- voortgezette analyse: rijen en convergentie van rijen;
- delen van voortgezette meetkunde: afstanden en grenzen en meetkundige plaatsen en kegelsneden.

Hier staat tegenover dat in wiskunde B in tegenstelling tot wiskunde B1 aandacht besteed wordt aan redeneren en bewijzen in de meetkunde. Bovendien is het domein Vaardigheden uitgebreid met het subdomein algebraïsche vaardigheden.

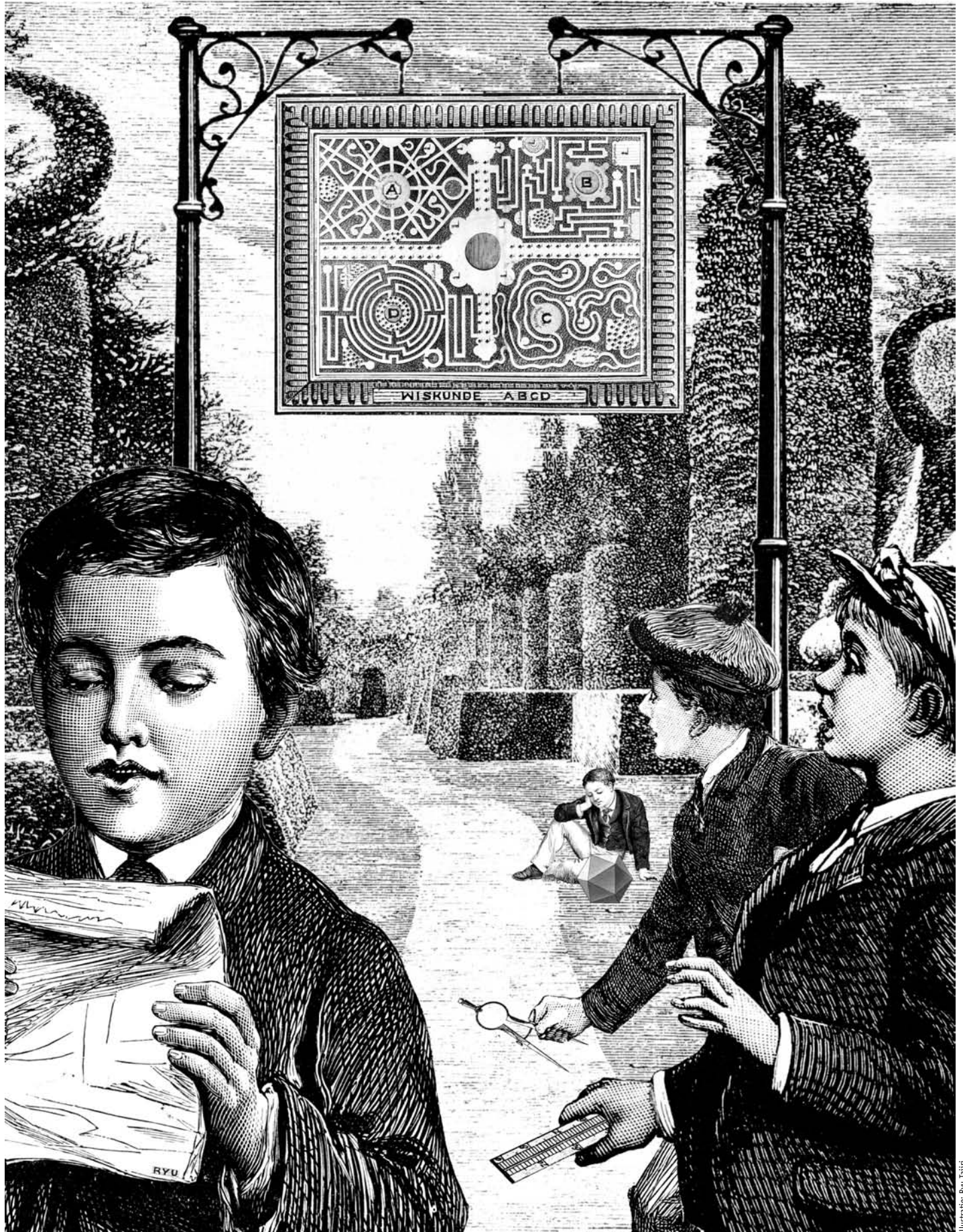
Algebraïsche vaardigheden

Over de gebrekkige algebraïsche vaardigheden van vwo-leerlingen heerst alom onvrede. In de nieuwe vakken wiskunde A en B krijgt dit onderwerp daarom een belangrijkere plaats. In de syllabi, die te vinden zijn op [4], worden de eisen in detail beschreven. De voorbeelden uit deze syllabi in het kader op pagina 166 zijn illustratief voor het niveau dat wordt nagestreefd.

Wiskunde D

Behalve de hernieuwde aandacht voor algebraïsche vaardigheden is er nog een lichtpuntje: wiskunde B kan worden aangevuld met het vak wiskunde D, dat een omvang heeft van maar liefst 440 slu. Het vak wordt afgesloten met een schoolexamen; er is dus geen centraal examen wiskunde D. Dit geeft de docenten enige vrijheid bij de inhoudelijke invulling van het vak. Scholen zijn overigens niet verplicht om wiskunde D aan te bieden. Vervolgopleidingen kunnen dit vak dan ook niet als toelatingseis opnemen. Anderzijds mag

profiel	oud	nieuw
Cultuur & Maatschappij	A1	C
Economie & Maatschappij	A12	A
Natuur & Gezondheid	B1	A of B
Natuur & Techniek	B12	B (en D)



Illustratie: Ryu Tajiri

een school wiskunde D verplicht stellen voor het NT-profiel. Verder moet wiskunde D concurreren met de andere profielkeuzevakken informatica, biologie en het nieuwe bètavak *Natuur, Leven & Technologie* (NLT).

In dit eerste jaar heeft ongeveer de helft van de leerlingen in 4-vwo en ongeveer een kwart van de leerlingen in 4-havo wiskunde B gekozen (zie [9]). Voor wiskunde D hebben slechts 7% van de vwo-ers en 3% van de havo-leerlingen gekozen, terwijl dit vak wordt aangeboden door 70% van de scholen voor vwo en iets meer dan de helft voor havo. Er zijn scholen die wiskunde D pas vanaf 5-vwo gaan aanbieden, dus volgend jaar kunnen deze cijfers gunstiger zijn.

Er zijn twee varianten van wiskunde D voor het vwo: het *schoolmodel* en het *samenwerkingsmodel*. De overlap van deze twee modellen bestaat uit de volgende domeinen:

- Domein A: Vaardigheden
 - Domein B: Kansrekening en statistiek (160 sl)
 - Domein C: Dynamische modellen 1 (80 sl)
 - Domein D: Meetkunde (80 sl)
 - Domein H: Keuzeonderwerpen (40 sl)
- Het domein A wordt in samenhang met andere vakken ingevuld. De resterende 80 sl worden in het schoolmodel gevuld door
- Domein E: Complexe getallen (40 sl)
 - Domein F: Dynamische modellen 2 (40 sl)
- en in het samenwerkingsmodel door
- Domein G: Wiskunde in wetenschap (80 sl)

In de rest van dit artikel worden eerst de domeinen van het schoolmodel toegelicht. Vervolgens komt het domein G *Wiskunde in wetenschap* van het samenwerkingsmodel aan bod.

De domeinen van het schoolmodel

De domeinen van het schoolmodel spreken grotendeels voor zich, dus hierover kan ik kort zijn. Het domein *Vaardigheden* omvat zowel algemene studievaardigheden als meer specifieke vaardigheden als onderzoeken, ontwerpen, modelleren, redeneren, beheersing van vaktaal, conventies en notaties, oplossings- en algebraïsche vaardigheden. De subdomeinen van *Kansrekening en Statistiek* zijn combinatoriek, kansrekening, verwerking van statische gegevens, kansverdelingen en het toetsen van hypothesen. Bij *Dynamische Modellen* worden zowel discrete als continue dynamische modellen behandeld. Het domein *Meetkunde* van wiskunde D betreft analytische meetkunde. (De meetkunde in wiskunde B daarentegen is synthetisch.) Het domein *Complexe getallen* beperkt zich

tot de basisoperaties. Bij de *Keuzeonderwerpen* tenslotte kunt u denken aan thema's als π , Fermat, fractals, chaos, geschiedenis van de wiskunde, speltheorie, enzovoorts.

Overigens wordt al gewerkt aan een aanpassing van het programma in 2013. De meest opvallende verandering betreft het domein *Dynamische modellen*. Hier komt de nadruk weer meer te liggen op de wiskundige analyse van het model. Dit gaat ten koste van de aandacht voor het opstellen van dit model en de interpretatie.

Domein G: Wiskunde in wetenschap

Zoals al eerder vermeld, kunnen scholen kiezen voor het *samenwerkingsmodel*. De domeinen E en F van het *schoolmodel* worden dan vervangen door domein G: *Wiskunde in wetenschap*. Dit nieuwe domein beoogt volgens de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO)

“... leerlingen zicht te geven op wiskunde als wetenschap en op de manier waarop wiskunde binnen exacte wetenschappen functioneert. Het gaat hierbij niet alleen om de wiskundige resultaten, maar ook om het proces van het bedrijven van wetenschap. Wiskunde in wetenschap wordt vormgegeven in nauwe samenwerking met universiteiten, wat de term ‘samenwerkingsmodel’ verklaart. Een dergelijke samenwerking bevordert de doorlopende leerlijn van vo naar ho en komt niet alleen de kwaliteit en actualiteit van de inhoud ten goede, maar heeft ook een positief effect op de doorstroming. Met het oog hierop zullen binnen de universiteiten steunpunten wiskunde D worden ingesteld, die worden gefaciliteerd.” (zie [5], *Rapport Wiskunde D 2007*).

Aan de universiteiten van Amsterdam, Utrecht, Nijmegen, Delft, Eindhoven en Twente wordt sinds 2006 gewerkt aan de concrete invulling van dit samenwerkingsmodel (zie [7]). Hiertoe zijn aan de drie technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Twente) en de Radbouduniversiteit Nijmegen, samenwerkend onder de naam *T(R)U's*, kerngroepen van vwo-leraren onder leiding van universitair docenten gevormd. Deze kerngroepen zijn te rade gegaan bij wetenschappers, die hen van onderwerpen, ideeën en bronnen hebben voorzien. Vervolgens hebben zij deze input omgezet in bruikbaar materiaal voor het vwo. Er wordt echter wel een beroep gedaan op de professionaliteit van de docenten wiskunde D op het vwo: zij kunnen de door de kerngroep gemaakte modules naar eigen inzicht aanpassen. De ondersteuning voor docenten bestaat uit les- en achtergrondmate-

Voorbeelden van gewenste algebraïsche vaardigheden voor het VWO

Bron: CEVO [4].

1. $G = 10 \cdot \log(I) + 90 \Rightarrow I = \dots$
2. $S = \frac{1000}{R^3}$ en $R = \sqrt{100 + x^2} \Rightarrow S = 1000 \cdot (100 + x^2)^{-1,5}$
3. Druk O uit in V en omgekeerd als $V = R^3$ en $O = 6R^2$
4. $\left(6, 9 + \frac{298,5}{7} \cdot 3600\right) \cdot L = 6, 9L + 0, 083T$
5. $\frac{1300 - A}{1 + 44 \cdot 0,87^t} = 44 \cdot 0,87^t \Rightarrow A = \frac{1300}{1 + 44 \cdot 0,87^t}$
6. $\sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
7. $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$
8. $x + \sqrt{8 + x} = 4 \Rightarrow x = \dots$
9. $\frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 + 1 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$

(De laatste vijf voorbeelden zijn alleen voor wiskunde B vereist.)

riaal, docentenhandleidingen en scholingen. De practica, die in principe aan de universiteiten plaatsvinden, worden gegeven door universitair docenten. Ze sluiten aan bij de stof die op school is bestudeerd. De onderwerpen van domein G bij de T(R)U's zijn *Optimaliseren in netwerken* in Delft, *Cryptografie en beslissen* in Eindhoven, *Astrofysica* in Nijmegen en *Modelleren* in Twente.

Concreet is in Delft gewerkt aan modules over minimaal opspannende bomen, kortste paden en maximale stromen. Een kenmerk van de Delftse modules is het gebruik van bronnen op academisch niveau, zoals [1], [2] en [3]. De modules bevatten tips die leerlingen moeten helpen dergelijke teksten, die een heel ander karakter hebben dan schoolboeken, te leren bestuderen. De vwo-docent vindt tal van suggesties over de mogelijke vormgeving van dit onderwijs. Op deze manier hoopt de Delftse kerngroep leerlingen beter voor te bereiden op het universitair onderwijs. In [10] vindt u meer informatie over de Delftse modules.

De Eindhovense module *Cryptografie* start met eenvoudige systemen als Caesar en Vigenère. Op de site van het Eindhovense steunpunt (zie [7]) zijn applets te vinden die leerlingen helpen bij het kraken van dergelijke systemen door middel van frequentieanalyse. Vervolgens wordt het bekende RSA-systeem behandeld, inclusief de benodigde getaltheorie. In de module *Beslissen* komen grafentheorie, lineair programmeren en speltheorie aan de orde. Deze module is gemaakt in samenwerking met de Fontys-hogeschool en is ook geschikt voor het havo. Het werk

van de kerngroep Eindhoven wordt uitvoeriger beschreven in [11].

De Nijmeegse modules *Vectoren en zwaartepunten*, *Krommen in het platte vlak*, *Krommen in de ruimte* en *Uitproduct tot Kepler* (zie [6]) richten zich op een paradox over de duur van de maand, dat wil zeggen de omlooptijd van de maan om de aarde. Aan de ene kant neemt deze namelijk toe, omdat de maan zich met ongeveer 4 centimeter per jaar van de aarde verwijderd. Aan de andere kant ontdekte de Engelse astronoom Edmond Halley in 1695 dat de maand *uitgedrukt in 'dagen'* juist *afneemt*. (Hierbij is een 'dag' de rotatieperiode van de aarde om haar as.) In de module komen ook andere planeten en hun manen aan de orde. Een deel van deze module is ook te lezen in de Vakantiecursus 2007 van het CWI, herdrukt in dit blad [8].

In Twente is rond het thema *Modelleren* een serie modules gemaakt over golven. Na een algemene inleiding op modelleren in de startmodule en een inleidende module over *waves* in sportstadions, volgt een module over tsunami's. Het gaat hierbij voornamelijk over de afhankelijkheid van profiel en voortplantingssnelheid van de diepte. De laatste modules behandelen filevorming en krommen. Voor meer informatie, zie [12].

Zoals reeds vermeld, hebben behalve de T(R)U's ook de universiteiten van Amsterdam en Utrecht activiteiten ontplooid in het samenwerkingsdomein *Wiskunde in wetenschap*. De Vrije Universiteit (VU) en de Universiteit van Amsterdam (UvA) en de Hogeschool van Amsterdam (HvA) werken hierbij samen in een regionaal steunpunt. De Am-

sterdamse activiteiten zijn zeer gevarieerd: enerzijds gaan studenten naar scholen om les te geven over discrete wiskunde, anderzijds is er een statistiekcursus voor docenten en een *e-klas* voor leerlingen over dynamische modellen. Deels wordt gebruik gemaakt van bestaand materiaal, deels van materiaal dat door ontwikkelgroepen van leraren is gemaakt in samenwerking met de universiteiten en hogeschool. Weer een andere ontwikkeling is de *ITS-academie*: leerlingen van een aantal scholen komen samen op één locatie, waar les wordt gegeven door een docent uit het hoger onderwijs over analytische meetkunde, dynamische modellen, discrete wiskunde en statistiek.

Door de samenwerking met de HvA is er ook een aanbod voor het havo, bestaande uit logistiek, statica (vectorrekening en zwaartepunten) en logica. Net als bij de T(R)U's is het materiaal gemaakt door een groep leraren, maar wordt het onderwijs op school verzorgd door de leraren aldaar. Aan het eind van een module komen de leerlingen naar de HvA voor een afsluitend practicum.

Ook in Utrecht werken universiteit en hogeschool samen. Het *Bètasteunpunt voor VO – regio Utrecht* biedt ondersteuning voor havo en vwo, niet alleen voor wiskunde D, maar ook voor het eerder genoemde *Natuur, Leven en Technologie*. Er zijn 4 modules van 40 slus ontwikkeld: *Complexe getallen en goniometrische functies* voor havo 4, *Problemen oplossen én uitleggen* voor havo 4 en vwo 5, *Diofantische vergelijkingen: gehele oplossingen gezocht!* voor vwo 5 en *Muziek en de Fast Fourier Transform* voor vwo 6. Deze modules

worden aangeboden aan de Hogeschool respectievelijk de Universiteit van Utrecht. Het betreft een reeks van 5 bijeenkomsten van ieder 4 uur.

Toepassingen en bètastudies

In dit artikel heb ik geprobeerd een beeld te schetsen van de veranderingen in het wiskundeonderwijs in de bèta-profielen. Zoals u ziet, is dit een nogal complexe aangelegenheid, die bovendien nog in ontwikkeling is. Toch zijn er trends te ontwaren, zoals de toegenomen aandacht voor algebraïsche vaardigheden in wiskunde A, B en D. Dit zou de aansluiting van voortgezet naar hoger onderwijs moeten verbeteren. Hopelijk gaat de versterkte nadruk op wiskundige vaardigheden niet ten koste van aandacht voor toepassingen. Deze zijn immers belangrijk om leerlingen te motiveren en om het beeld van wiskunde als wereldvreemd vak te corrigeren.

Een andere trend is de samenwerking tussen universiteiten, hogescholen en het voortgezet onderwijs. In allerlei projecten, waarvan het wiskunde-D-domein *Wiskunde in wetenschap* er een van is, wordt geprobeerd leerlingen enthousiast te krijgen voor bèta-studies. Regionale bèta-steunpunten moeten scholen helpen hun weg te vinden in het woud van initiatieven op dit terrein.

Voor meer informatie over het samenwerkingsmodel kunt u terecht op [7]. Op de website [5] van de *Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs* (CTWO) vindt u niet alleen informatie over wiskunde D, maar ook over de varianten A, B en C. ←

Referenties

- Hillier, Lieberman *Introduction to Operations Research*, 8th Edition, McGraw-Hill International Edition, Boston, 2005.
- Kees Roos *Optimaliseren in Netwerken*, Kaleidoscoop college, www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos
- Henk Tijms, *Operationele analyse*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2004.
- www.cevo.nl
- www.ctwo.nl
- www.ratio.ru.nl
- www.wiskunded.nl
- Rainer Kaenders, 'Dubbelplaneten', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (4), 287–298
- 'Vernieuwde Tweede Fase, start in cijfers', *Tweede Fase Adviespunt*, december 2007, www.tweedefase-loket.nl
- Wim Caspers et al., 'Wiskunde in Wetenschap: Optimaliseren in netwerken', te verschijnen in *Euclides*.
- Hans Sterk, 'Steunpunt TU/e: Wiskunde in Wetenschap', *Euclides* (3), december 2007, jaargang 83, pp. 105–107
- UT-Kerngroep, 'Wiskunde in Wetenschap: Visie op een domein in Wiskunde D', *Euclides* (5), maart 2007, jaargang 82, pp. 173–175