

Jan de Graaf

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

j.d.graaf@tue.nl



Jan de Graaf

Afscheidsrede

Waarheid, Spel of Taal?

In zijn afscheidsrede als hoogleraar wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven bespreekt Jan de Graaf verschillende manieren waarop in de wereld om ons heen tegen wiskunde aan wordt gekeken. Wat is wiskunde eigenlijk? Een belangrijke vraag, want elk antwoord op deze vraag vindt zijn reflectie in de manier waarop wiskunde wordt onderwezen.

Uit mededogen met en waardering vóór het zeer gevarieerde bonte gezelschap dat hier thans verwachtingsvol, èn in afwachting van de receptie, voor mij zit, zal mijn afscheidscollege flink wat lichtvoetige en anecdotische ingrediënten bevatten.

Op de eerste plaats wil ik u graag wat onderhouden en wat vertellen over de rol die de Wiskunde en ook de Natuurkunde in mijn leven, zowel vakmatig als emotioneel gespeeld hebben.

Ook wil ik u, omdat ik van de Bewaarschool af aan de meest uiteenlopende onderwijsfilosofien onderworpen ben geweest, mijn ervaringsdeskundigheid op dat gebied zeker niet onthouden.

Tenslotte, het kan niet anders, zal ik het ook hebben over de rol die onderwijs *in* en beoefening *van* de Wiskunde, in het huidige tijdsgewricht, aan deze Technische Universiteit zou kunnen of moeten spelen. Mijn suggesties zullen vooral de wiskunde als taal betreffen.

Ik zal mijn betoog structureren aan de hand van de drie gedaanten waarin de wiskunde zich, in mijn leven, aan mij heeft voorgedaan:

- Als Waarheid
- Als Spel
- Als Taal

Interessant genoeg zijn dit ook historische verschijningsvormen van de wiskunde. Net als bij de ontwikkeling van het embryo lijken historische verschijningsvormen zich te herhalen op individueel niveau.

Wiskunde als 'Waarheid'

Het naïeve en primitieve idee dat wiskunde bestaat uit waarheden over echt bestaande objecten is wijd verbreid, zowel geografisch als in de tijd, en komt in de hoogste en sjiekste kringen voor. In haar lange geschiedenis was wiskunde vaak verbonden met mystieke en theologische inzichten of vermeende inzichten. Pythagoras, Plato en de jonge Aristoteles dachten dat wiskundige hersenspinnels een eigen bestaan leidden, buiten ons om. Net zoals Amerika al bestond, buiten de Europeanen om, voordat Columbus het ontdekt had.

Maar, je hoeft geen tweeëneenhalfduizend jaar in de tijd terug te gaan voor zulke opvattingen. Onlangs nog, in de NRC van Zaterdag 21 juni 2007, schrijft Erik Verlinde, hoogleraar moderne mathematische fysica aan de UvA: ergens ligt een principe dat alles in elkaar laat passen. Als U het niet verder vertelt: ik beken dat ook ik dolgraag platonisch fantaseer. En daar sta ik niet alleen in.

Er is in dit verband een indrukwekkend citaat van Heinrich Hertz dat ik u niet wil onthouden. Het citaat betreft de vergelijkingen van Maxwell. Daarom eerst iets over Maxwell. Bij niet-bèta's is dit een onbekend persoon. Echter, deze Maxwell is zonder enige twijfel de persoon uit de negentiende eeuw met verreweg de meeste invloed op onze westerse beschaving. Als onze beschaving over duizend jaar nog bestaat en namen als Napoleon, Bismarck, Thorbecke, koningin Emma, en weet ik wie al niet, al lang vergeten zijn, zullen

Maxwell en zijn vergelijkingen die elektriciteit, licht- en radiogolven regeren nog altijd genoemd en geroemd worden.

Hier zijn de Maxwellvergelijkingen, voor wie ze nog niet kende, in laat negentiende-eeuwse vectoranalysetaal.

Maxwellvergelijkingen in vectorvorm

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} &= \mathbf{0} & \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} &= -\mathbf{J} \\ \text{div } (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho & \text{div } (\mu \mathbf{H}) &= 0 \end{aligned}$$

U mag en kunt deze formules bewonderen als een schitterend abstract kunstwerk. Het grote verschil met een normaal abstract kunstwerk is echter, dat dit kunstwerk *objectief* ergens op slaat!

Dan nu het schitterende citaat van Hertz [6] betreffende deze vergelijkingen:

“Man kann diese wunderbare Theorie nicht studieren, ohne bisweilen die Empfindung zu haben, als wohne den mathematischen Formeln selbständiges Leben und eigener Verstand inne, als seien dieselben klüger als wir, klüger sogar als ihr Erfinder, als gäben sie uns mehr hinaus, als seinerzeit hineingelegt wurde. Es ist dies auch nicht geradezu unmöglich; es kann eintreten, wenn nämlich die Formeln richtig sind über das Maß dessen hinaus, was der Erfinder sicher wissen konnte. Freilich lassen sich solche umfassende und richtigen Formeln nicht finden, ohne daß mit dem schärfsten Blicke jede leise Andeutung der Wahrheit aufgefaßt wird welche die Natur durscheinen läßt” (Heinrich Hertz, *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität*, september 1889).

Tot mijn grote vreugde vond ik dit citaat een paar maanden geleden terug in het proef-

schrift van Janne Brok [2]. Ik lees u haar vertaling voor: Men kan deze prachtige theorie niet bestuderen, zonder zo nu en dan het gevoel te krijgen dat deze wiskundige vergelijkingen een zelfstandig leven leiden, dat zij wijzer zijn dan wij, zelfs wijzer dan hun geestelijke vader, dat ze ons meer geven dan er ooit werd ingestopt. Dit is ook niet onmogelijk; het kan zijn dat de vergelijkingen *waar* zijn op een manier die de kennis van de ontdekker overstijgt. Nochtans laten zulke veelomvattende en juiste vergelijkingen zich pas ontdekken, als iedere subtiele hint naar de waarheid, die de natuur prijsgeeft, met de scherpste blik wordt geduid. Merk op dat 'Erfinder' wordt vertaald met 'ontdekker'. Daar zou ik zelf niet voor gekozen hebben. Toch wordt Hertz wel recht gedaan omdat het citaat zo platonisch overkomt.

Een wat banalere versie van 'platonische identificatie van wiskunde met de werkelijkheid' ben ik tijdens mijn carrière vele malen tegengekomen bij discussies met fysici en technici. Uitspraken als 'Existentie- en uniciteits-stellingen hebben wij fysici niet nodig. Wij weten wat er fysisch aan de hand is', moet je je dan laten welgevalen. Voor zover dergelijke mededelingen intellectueel geduid kunnen worden, duiden ze op diepgeworteld platonisme.

Mijn eigen jeugdige confrontaties met begrippen die uitsluitend wiskundig te interpreteren zijn, waren *beduidend* minder diepzinnig. Die betroffen het begrip *oneindig*. Dit begrip kwam voor in de *rekenkunde* en in het *godsdiensonderwijs*.

De eerste keer was dat zestig jaar geleden, in 1947, op de Bewaarschool van de nonnen te Raamsdonksveer.

Overigens, de naamgeving 'Bewaarschool' geeft de functie van dit instituut duidelijker weer dan de, typisch Hollandse, egaliserende benaming 'groep 1'. Gelukkig is deze gekkigheid nog door geen van onze Europese burens overgenomen.

Op de Bewaarschool werden wij door nonnen vrijwel dagelijks theologisch onderricht in de belangrijkste feiten van de heilsgeschiedenis. Soeur Josephine legde ons uit dat er twee soorten oneindig zijn. Het Opperwezen (God) heeft geen begin en geen einde. Is dus *Oneindig*. Ons mensen bestaan, daarentegen, is slechts naar één kant oneindig. Wij hebben een begin, maar bestaan altijd voort. En dat heet dan *eeuwig*. De aarde als geheel, en de planten en dieren in het bijzonder, zijn eindig: Zij hebben een begin en een einde en dienen ons slechts tot lust en last. Benadrukt werd

dat hemel, en vooral ook de hel, eeuwig zouden. Ik nam mij toen heftig voor dat ik niet in de hel wilde komen. Op een nadere uitleg van de eeuwigheid van de hel kom ik zo dadelijk nog even terug.

Was dat soort *dagelijks* onderwijs niet een beetje moeilijk voor vijfjarigen? Hoor ik sommigen in de zaal zich afvragen. Ach welnee! Ik vermoed dat Soeur Josephine intuïtief deed wat wij hier aan de universiteit niet meer doen of niet meer durven, maar wel zouden moeten doen. Zij richtte haar onderwijs op de slimste bovenlaag! Dat was zeer prijzenswaardig van Soeur Josephine. Kinderen die nog niet aan hogere wetenschap toe waren, zaten er bij en moesten hun mond houden. Als ze dat niet deden werd er wat aan gedaan: Pratende mondjes werden rigoreus afgeplakt met een strip wit papier, ingesmeerd met dikke witte behangplak. Ondanks het feit dat ik bij Soeur Josephine, tijdens haar vele wetenschappelijke beschouwingen, aan haar lippen hing, zal het u niet verbazen dat ook mij deze gruwelijke mishandeling overkomen is. En, in die tijd had je nog geen *professionele hulpverleners*!

Na de Bewaarschool bezocht ik drie Lagere Scholen. Daar werd veel uit het hoofd geleerd: Overigens uitsluitend nuttige zaken waar je de hele rest van je leven iets aan hebt, zoals de tafels van vermenigvuldiging, de antwoorden op de 548 vragen van de Catechismus voor de Nederlandse Bisdommen. Van elk onzer vaderlandse provincies een rijtje van zo'n vijftien plaatsnamen, aan te wijzen op een blinde kaart. Voor een bovenlaag het Latijn van de Mis en een basiswoordenschat Frans vanaf de vijfde klas.

In die vijfde klas, nadat inmiddels de jongens die goed konden leren gescheiden waren van de overigen, kwamen de theologische en wiskundige begrippen betreffende het oneindige weer heel dicht bij elkaar.

De oneindig lange duur van de hellestraf werd ons andermaal uitgelegd. Ik wil U die uitleg niet onthouden. Stel je, om te beginnen, een blok graniet van een kubieke kilometer voor.

Tussen haakjes, inmiddels wisten wij heel goed wat een kubieke kilometer was. We hadden alles geleerd van maten en gewichten, uitgelegd door een onderwijzer, die zich weliswaar nog geen leraar mocht noemen, maar, ondanks dat, het zelf allemaal heel goed begrepen had. Hij kon niet alleen met maten en gewichten goed uit de voeten, maar wist ook schitterende dicteezinnen als "De moeder baadt het kind. Zij denkt: Baat het niet het schaadt ook niet", niet alleen te ver-

zinnen maar ook zonder fouten op te schrijven.

Goed, stelt U zich voor, U zit in de hel, tot Uw nek in een gloeiende oven, reikhalzend te kijken naar een granieten blok van een kubieke kilometer. Stelt U zich voor, eens in de duizend jaar komt een merel langs en strijkt met zijn mooie gele snavel één keertje langs dat blok. Welnu, als dat blok helemaal is afgesleten is er nog geen uur, geen minuut, geen seconde van de hellestraf voorbij! Daarover nadenkend kwam je, al griezelen, op het idee dat willekeurige kleine delen van de hellestraf toch net zo omvangrijk waren als het geheel. En dat komt heel dicht bij de wiskundige definitie van het begrip 'oneindig'.

In de vijfde klas werd ook nog flink gerekend. Er waren maar een stuk of vijf algemeen geldende *methodische* rekenrecepten: Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, staartdelen en rekenen met breuken. Daarnaast werden er ook nog wortels getrokken en ggd's en kgv's bepaald. Een randverschijnsel was een klein vakje *Hoofdrekenen* waar de kunstjes werden geoefend die tegenwoordig *uitsluitend* het rekenonderwijs op de basisschool bepalen. Voor meer hier over zie: Jan van de Craats [3]. Lees dat stuk vooral als u uw kinderen of kleinkinderen moet helpen bij het moderne rekengeklungel met 'happen nemen' en zo: Als je 80 door 26 moet delen dan neem je drie happen van 26 en dan heb je 2, de 'rest', over. Prima. Maar als je 8070 door 26 moet delen wordt het nemen van happen een hele organisatie die gegarandeerd in de soep loopt. Bij het uitvoeren van de klassieke staartdeling wordt het 'happen nemen' daarentegen perfect georganiseerd. Helaas is de staartdeling weg uit het onderwijs.

De ouderen onder u herinneren zich dat een staartdeling 'niet altijd uitkomt'. De rij cijfers aan de rechterkant loopt *oneindig* lang door. Omdat ik graag rekende had ik diverse malen geconstateerd dat zich na enige tijd een zich *oneindig* herhalend cijferpatroon voordoet:

$$\frac{1}{7} = 0, \underbrace{142857}_{142857} \underbrace{142857}_{142857} \dots$$

$$\frac{23}{38} = 0, \underbrace{6052631578947368421}_{6052631578947368421} \dots$$

Ik vroeg aan mijnheer Kleemans of dat altijd zo was. Hij dacht even na en gaf het, in de onderhavige context juiste antwoord: ja. Mijnheer Kleemans had, in het huidige tijdsge-richt gemakkelijk professor kunnen worden!

Als laatste spannende voorbeelden van ‘platonische identificatie van wiskunde met de werkelijkheid’, waar ik in mijn jeugd mee geconfronteerd ben, zou ik de godsbewijzen willen noemen. De godsbewijzen die wij in onze tienerjaren voor onze kiezen kregen, waren die van St Anselmus (1033-1109) en van St Thomas van Aquino (1224-1274). Deze werden ons overigens niet als wiskunde aangeboden. Pas later in mijn leven ben ik daar tegenaan gaan kijken als *wiskundige modellen*. Bij werken met wiskundige modellen dienen zich altijd twee fundamentele vragen aan:

1. Is de wiskunde in het model correct?
2. Correspondeert het wiskundig verkregen object met een werkelijk bestaand object?

Voor de Platonisch ingestelde middeleeuwer was het antwoord op de tweede vraag vanzelfsprekend bevestigend. En dat gold ook voor ons, 50 jaar geleden. Blijft over vraag 1.

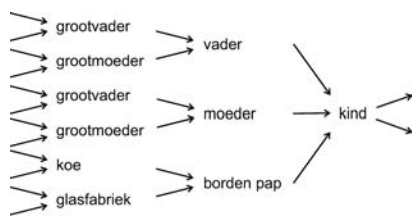
Het oorzakelijkheidsbewijs van St Thomas doet, even voor ingewijden, denken aan het Lemma van Zorn (waar ik als tiener natuurlijk nog niet van gehoord had). Ieder object wat je in je omgeving aantreft, inclusief je zelf, zit gevangen in een keten van oorzaken en gevolgen. Denk aan

Lineair geordende keten

... → grootmoeder → moeder → kind ...

Elk object staat tussen precies één oorzaak en één gevolg. Behalve natuurlijk aan een eventueel begin of eventueel einde van een keten. In het echte leven lopen de ketens allemaal door elkaar heen wegens meervoudige oorzaken. Denk aan

Partieel geordende keten



Het Lemma van Zorn laat ons weten dat je, om tot het bestaan van een eerste object, een beginobject, te besluiten, je ‘slechts’ hoeft na te gaan of *iedere* lineaire deelketen een eerste element heeft.

Helaas is eenduidigheid niet gegarandeerd, zodat er mogelijkheden tot polytheïsme blijven. Blijft de noodzaak te be-

wijzen dat iedere lineaire keten een begin heeft. Thomas beredeneert dat in de *Summa* als volgt: Stel dat er géén eerste oorzaak was, dan was er geen vervolgoorzaak en ook geen derde vervolgoorzaak, enzovoort. Kortom dan was er niets. Omdat wij wel ‘iets’ waarnemen moet er ‘een object’ aan het begin staan: de niet-veroorzaakte, alles-veroorzakende oorzaak (voor de originele tekst zie [1], I-Q.2-ART.3). Hier klopt iets niet, dacht ik, en ik herinner me levendig de didactisch-demagogische truc die de leraar gebruikte om mij dit toch aan te praten. Stel je voor, zo sprak deze, dat je ongeduldig bij een spoorwegovergang staat te wachten voor een eindeloos lange goederentrein die langzaam voorbij dendert. Elke wagon wordt voortgetrokken door de voorafgaande. In die zin is zo’n trein een lineair geordende keten. Waarom beweegt die trein? Het antwoord dat ie beweegt *omdat* ie oneindig lang is, is zo onbevredigend dat niemand die verklaring pikt. De trein is er en beweegt vanwege een eerste beweging: de locomotief.

Daar kon je het dan mee doen. Hoe dan, tenslotte, dit abstracte wiskundig vervaardigde opperwezen zijn nabij-oostelijke tirannieke eigenschappen heeft opgelopen, ook dat zit niet in het model.

Wiskunde als spel en als ritueel

Veel buitenstaanders denken dat wiskundigen erg van spelletjes houden, vooral van schaken. Zelf heb ik geen bovengemiddelde neiging naar *dat soort* spelletjes. Wel heb ik het beoefenen van de wiskunde zelf vaak ervaren als een spannend en opwindend spel. Die opwindende bezorgt mij, zelfs op mijn gevorderde leeftijd, soms nog een halve slapeloze nacht.

Wat zou je onder een *spel* moeten verstaan? Zo vraag je je dan af.

Als het om ‘spel’ en ‘spelen’ gaat kom je binnen het nederlandse cultuurgood onvermijdelijk Huizinga tegen. In 1938 verscheen *Homo Ludens, Proeve ener bepaling van het spelelement der cultuur*, Pandora Pocket 1997/Tjeenk Willink 1951. Huizinga’s zeer wel-luidende definitie van “Spel” is de volgende:

“Spel is een vrijwillige handeling of bezigheid, die binnen zekere vastgestelde grenzen van tijd en plaats wordt verricht naar vrijwillig aanvaarde doch volstrekt bindende regels, met haar doel in zich zelf, begeleid door een gevoel van spanning en vreugde, en door een besef van ‘anders zijn’ dan het ‘gewone leven’.” ([7] p47)

Merkwaardig is dat Huizinga in zijn schitterende boek met talloze voorbeelden uit al-

le culturen, nergens de wiskunde noemt als testcase of leidraad bij de opzet van zijn literair verwoorde theorie. Het woord wiskunde heb ik slechts twee keer kunnen vinden in zijn tekst. Op pagina 261 poogt hij wel, binnen twee bladzijden, ‘het spelgehalte der *moderne wetenschap* te determineren’. Hij vindt de moderne wetenschap niet binnen zijn spelbegrip vallen, immers “Het spel is tijdelijk, het loopt af en heeft geen enkel doel buiten zichzelf. Het wordt gedragen door een bewustzijn van blijde verpozing buiten de eisen van het gewone leven. De regels [...] van de wetenschap zijn niet, als die van een spel, eens voor al onwrikbaar. Zij wordt voortdurend door de ervaring gelogenstraft en wijzigt dan zichzelf [...] Wetenschap is ook polemisch” Hoe zit dat dan met de wiskunde? De wiskundige bewerkingen en de spelregels van de wiskunde zijn weliswaar niet geheel en al onwrikbaar maar lijken toch veel meer eeuwigheidswaarde te hebben dan veel regels en wetten van wetenschap en technologie. Bijvoorbeeld: De werking van een AM-radio-ontvanger laat zich met heel eenvoudige wiskunde beschrijven. Echter, de veranderingen in de technische realisatie van zo’n AM-ontvanger gedurende de laatste halve eeuw zijn gigantisch. In tegenstelling tot een halve eeuw geleden kan ik tegenwoordig geen radiotoestellen meer repareren.

Blijkbaar laat Huizinga zich er niet over uit of de wiskunde binnen zijn spelbegrip valt.

Naar mijn bescheiden mening valt de wiskunde *wel* onder Huizinga’s spelbegrip. Laten we die gedachte volgen en let dan in Huizinga’s definitie van ‘spel’ vooral op de zinsne- de ‘met haar doel in zich zelf’. Die zou je lomp kunnen vertalen met: een spel, volgens de definitie van Huizinga gaat nergens over.

Ik heb vele jaargangen eerstejaars verbaasd doen opkijken door ze mede te delen: ‘De wiskunde is zo exact (kan zo exact zijn) omdat ze nergens over gaat’. Na van het beoogde en verhoopte schokeffect genoten te hebben nuanceerde ik dan: ‘De wiskunde is zo exact omdat ze nergens speciaal over hoeft te gaan, daarom is ze universeel bruikbaar’. Dames en Heren. Illustratiemateriaal voor deze bewering wordt meteen al geleverd door het rekenen met natuurlijke getallen en met breuken waarvelen in dit gezelschap op de lagere school nog mee zijn opgevoed: Optellen, de tafels van vermenigvuldiging, gelijknamig maken ...etc. Waar ging dat vroeger over? In het begin heel even over appels en pannenkoeken. Maar het werd al gauw een abstract spel.

Het kwam in niemands hoofd op om af-

zonderlijke sommetjes te maken voor kinderen die groentenboer, dan wel timmervrouw, notaris of ingenieur wilden worden.

Hoe anders gaat dat hier en nu op onze universiteit! Veel faculteiten wensen wiskunde in kontekst te behandelen. Dat is zoiets als notarissen met breuken leren rekenen aan de hand van het erfrecht. Ik vind dat erg onacademisch!

Ik pleit er voor om, ook aan deze universiteit, wiskundevaardigheden in 1e instantie kontekstvrij, uniform en op zichzelf staand aan te bieden. Gevolgd door toepassingen van alle faculteiten.

De trillingen van een draaibank bij Werktuigbouwkunde gehoorzamen vaak aan dezelfde differentiaalvergelijkingen als de trillingskringen in een radio-ontvanger. Zulke wetenswaardigheden mogen voor aspirant academici niet verborgen gehouden worden.

Sommigen zullen denken 'wat ouderwets' en 'dat deden ze vroeger'. Nou en....! Onze voorouders waren niet op hun achterhoofd gevallen!

De geschetste spelaanpak van het wiskundeonderwijs doet en deed de goede studenten uiteindelijk veel plezier. De belangrijkste redenen waarom ik een paar jaar geleden met het oude-dictatenproject [4] ben gestart zijn de vele ongevraagde loftuitingen van oudstudenten op ons oude uniforme wiskundeonderwijs voor alle faculteiten.

De keuze van de wiskundeonderwerpen in de hogere jaren ligt natuurlijk bij de faculteiten. Zij dienen zich echter wel te realiseren dat je geen villa kunt bouwen die uitsluitend uit een vrijzwevende speelzolder bestaat. Onder zo'n zolder moeten een paar paaltjes staan! Bouwkundigen begrijpen dit nog het beste, denk ik.

Om een spel goed te kunnen spelen moet je de regels paraat hebben. Ik betreur het dan ook zeer dat het moderne onderwijs het gigantische vermogen dat jonge mensen heb-

ben om zaken van buiten te leren zo schandelijk ongebruikt laat liggen.

Ik heb studenten die moeite hadden met, bijvoorbeeld, de definitie van 'limiet' te bevatten. Linksonder ziet u haar. Deze definitie is ook moeilijk. Vond ik ook, vroeger. De mensheid heeft dat ook pas honderdvijftig jaar geleden verzonnen. Maar... leer die tekst van buiten. En je zult zien dat het inzicht 'is dat alles' plotseling toe kan slaan. Uit eigen ervaring weet ik dat je dat kan gebeuren op een saai feestje, of in nog spannender omstandigheden, terwijl je, echt, met totaal iets anders bezig bent. Dat wonder gebeurt natuurlijk alleen maar als je iets in je hoofd hebt gestopt.

Wiskunde als omgangstaal in wetenschap

Aan het begin van deze rede hebben we de beroemde Maxwellvergelijkingen getoond. Deze vergelijkingen beschrijven alles wat over het (macroscopische) elektromagnetisme te weten valt. Een aanzienlijk deel van de wiskundige verrichtingen van de negentiende eeuw zijn overigens nodig om die wetenswaardigheden er uit te krijgen. Een vaak gestelde vraag is: kun je de eigenschappen van het elektromagnetische veld niet 'gewoon' in 'normale mensentaal melden'? Het antwoord is nee! Die eigenschappen kunnen alleen ten volle worden medegedeeld en begrepen in de *kunsttaal* die wiskunde heet. Je kunt er wel veel over en omheen kletsen. Dat wordt veel gedaan en dat helpt ook wel wat voor het begrip. Maar kwantitatief kun je daar niks mee. Heel graag citeer ik Heinrich Hertz nog een keer, vrij vertaald: de elektromagnetische theorie bestaat uit niets meer en niets minder dan de Maxwellvergelijkingen. Mensen met een wat hooghartige houding jegens de wiskunde hebben mij wel eens toegevoegd: Wiskunde is toch alleen maar boekhouden!

Is Wiskunde een vorm van boekhouden voor exacte wetenschappen? Dat is het óók. 'Correct boekhouden' is erg belangrijk. Toch is het slechts een gering en niet erg spannend deel van de Wiskunde! Wiskundigen raken niet opgewonden van formule-orgieën. Integendeel, het zijn veeleer de niet-wiskundigen die daar dol op zijn.

Wat is wiskunde dan meer dan boekhouden? Het gaat in de Wiskunde om *verbanden* tussen concepten en niet om *absolute betekenissen* van concepten. Wiskunde is het gereedschap bij uitstek om, enerzijds, zaken die niks met elkaar te maken hebben ook uit elkaar te houden, en anderzijds, zaken die oppervlakkig niks gemeen lijken te hebben onder één noemer te brengen. Wiskunde schept orde.

Maxwellvergelijkingen in klassieke analyse-taal

$$\mu \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = 0$$

$$\mu \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$$

$$\mu \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial y} + \frac{\partial H_2}{\partial z} = -J_1$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial x} = -J_2$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t} - \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} = -J_3$$

$$\frac{\partial(\varepsilon E_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_3)}{\partial z} = \rho$$

$$\frac{\partial(\mu H_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H_3)}{\partial z} = 0$$

Laten we de strijd aanbinden met die boekhoudopvatting en nog eens naar de Maxwellvergelijkingen kijken. Maxwell zelf schreef zijn vergelijkingen helemaal uit (cf [8]). Wat vereenvoudigd en geordend zag er dat rond 1864 uit zoals te zien is in het kader hierboven. Maxwell gaf hier de schitterende uitleg bij. Later in de negentiende eeuw werd dit opgeschreven in *vectoranalyse-taal*, de manier waarop onze studenten tot op heden met de Maxwellvergelijkingen geconfronteerd worden.

Je kunt tegen deze vergelijkingen aankijken als een stenografische weergave van de vorige set. Een boekhoudtruc dus. Er is echter veel meer aan de hand. De ruimtelijke variabelen x, y, z zijn verdwenen en vervangen door de operaties *rotatie* en *divergentie*. Deze maken maken de onderliggende Euclidische meetkunde van de 'ruimte' expliciet en vergemakkelijken overgang op andere (orthogonale) coördinaten zeer. Alleen de tijdsafhankelijkheid t zit er nog 'los' in.

Maxwellvergelijkingen in vectoranalyse-taal

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = -\mathbf{J}$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \quad \text{div}(\mu \mathbf{H}) = \mathbf{0}$$

Er is echter nog een latere versie, in *differentiaalvormtaal*. Die oogt typografisch wel erg simpel.

Een functie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto f(x)$ heet *continu* in een punt $a \in \mathbf{R}$, als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbf{R} :$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

In woorden:

Voor ieder getal ε groter dan 0 bestaat er een getal δ groter dan 0 zodanig dat de afstand tussen de waarden $f(x)$ en $f(a)$ gegarandeerd kleiner is dan ε indien de afstand tussen x en a kleiner dan δ genomen wordt.

Maxwellvergelijkingen in differentiaalvormtaal

$$\begin{cases} dF = 0 \\ d * F = S \end{cases}$$

Het kunnen lezen van deze formules vergt wel enige initiële inspanning. Je moet de differentiaalvormtaal leren en ook wat meer van de taal van de abstracte algebra (voor een eenvoudige afleiding zie [5]). In deze differentiaalvormtaal worden tijd en ruimte op gelijke voet behandeld. De $*$, 'Hodge-afbeelding', stelt de meetkunde van de ruimte-tijd voor. Ook tegen deze versie kun je aankijken als een nog verder gaande stenografische versie van de voorafgaanden. Beide vorige voorstellingen kunnen er 'boekhoudkundig' uit afgeleid worden.

Hier is echter nog veel meer aan de hand! De speciale relativiteitstheorie zit er automatisch in. De laatste voorstelling kan zelfs voor elektromagnetische verschijnselen in een gekromde 'ruimte-tijd' geïnterpreteerd worden! De weergave in willekeurige kromlijnige coördinaten wordt een fluitje van een cent. Het *allerspannendste* is echter dat de onderhavige vergelijkingen de *allereenvoudigste* zijn die je *in deze taal* op kunt schrijven! Als je eenmaal de goede taal gevonden hebt, dan blijkt de natuur de gemakkelijkste weg te kiezen. De geniale Maxwell, die de oervorm van deze formules heeft bedacht, had van dat alles nog geen weet! Mede omdat hij zijn vergelijkingen in een andere, primitievere wiskundetaal opschreef. Het citaat van Hertz aan het begin van mijn betoog krijgt hiermee een nog diepere lading!

Als wiskunde een taal is, kun je er dan ook gedichten in schrijven? Jazeker! We hebben er net een gezien. De Maxwell vergelijkingen vormen een wonderschoon gedicht. Maar de twee regels rijmen niet, zullen sommigen zeggen. Inderdaad ziet het er wat oneerlijk uit: De ene formule krijgt een mooie letter S aan de rechterkant en de andere een 0 , helemaal niks dus. We kunnen de formules eleganter en symmetrischer maken door een aanvulling aan te brengen die ik hier alleen in de laatste genoemde differentiaalvormversie geef:

Maxwellvergelijkingen met magnetische monopolen

$$\begin{cases} dF = K \\ d * F = S \end{cases}$$

Helaas wil de natuur deze mooiere formules niet. De toegevoegde letter K betekent dat magnetisme in 'losse' noord- en zuidpolen voor kan komen. Net zoals er in de natuur losse elektrische ladingen van het $+$ en $-$ type voorkomen. Maar in het echt komt een magnetische noordpool altijd in combinatie met een magnetische zuidpool voor. Iedereen die in zijn jeugd fietsdynamo's heeft gesloopt en heeft geprobeerd, met een botte ijzerzaag, de noord- en zuid-pool van de magneet van elkaar te scheiden, weet dat. Wat betreft het wiskundeonderwijs voor die faculteiten aan deze instelling die wiskunde nodig hebben zou ik primair willen pleiten voor het leren van correct wiskundig taalgebruik. Daarmee bedoel ik vooral *het correct benoemen* van de gebruikte wiskundige objecten als: getallen, functies, (on-)afhankelijke variabelen, vectoren, vectorvelden, matrices, tensoren, ... Natuurlijk voorzien van motivatie en heel veel oefenen. De subtiliteiten van wiskundige bewijzen kunnen eventueel later. Laat ik een paar ervaringen melden die dat motiveren.

Beginnende eerstejaars, die de intelligentie uit de ogen straalt, hebben vaak geen enkel benul meer van 'rekenen met letters'. Ze vragen je: Waarom rekenen jullie toch met a , x , s , α ? Waarom niet 'gewoon' met getallen. Mijn antwoord in dat stadium, wij willen zien waar alles blijft, dringt heel langzaam of niet door. De benodigde incubatieperiode voor deze nieuwe levensvisie had in middelbare schooltijd dienen te vallen. Lering: de student moet, zonder grafische rekenmachine, bijgebracht worden wat 'getallen', 'functies' en vectoren zijn. Ook dat dit onderling totaal verschillende objecten zijn. Niet zomaar typografische schroothopen waar je wat in rommelt.

Het werken met niet nader gespecificeerde getallen, functies, identiteit, ongelijkheid, vectoren, vectorvelden moet intensief getraind worden aan de hand van voorbeelden.

Inzicht gaat niet vooraf aan vaardigheden! Het groeit er samen mee op. Wij moeten, vanaf het begin, op geen enkele manier meer toegeven aan 'concreet rekenen'. Numerieke resultaten komen helemaal op het eind. Pas dan mogen getallen worden ingevuld.

Bij examens loop je aan tegen een totale afwezigheid van het functiebegrip. Een vijftienjarige timmermansleerling van vijftig jaar geleden zou zich voor het volgende schamen.

Opgave: Vind een x zodat $\sin x = 1$.

Antwoord van een student: $x = \frac{1}{\sin}$.

Geïnfecteerd door het hollandse welzijnswerkersvirus probeer je van ganser harte hier iets waardevols in te vinden. En dat lukt zowaar. Via de Amerikaanse calculusboeken die erg in de mode zijn, en waarvan het gebruik ons dus door de faculteiten wordt opgedrongen. Goedmoedig denk je dan: De student bedoelde natuurlijk, op z'n Amerikaans,

De student bedoelt: $x = \sin^{-1}(1)$.

Wat ik echter wil zien is, tenminste, een van de vier: $x = \sin^{-1}(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Mijn suggesties voor het lagerejaars wiskundeonderwijs aan de Technische Universiteit Eindhoven zijn de volgende:

1. Breek meteen, vanaf het begin, radicaal met de 'wiskunde'-gewoonten van de middelbare school. Richt je op correct wiskundig taalgebruik. Schaf die zware Amerikaanse tekstboeken af.
2. Gebruik een korte uniforme tekst, niet meer dan een A4-tje per week, waarin concepten en notaties efficiënt staan samengevat.
3. Laat *iedereen* kennis maken met eenvoudige wiskundige toepassingen van *alle* faculteiten.
4. Verstrek stevig oefenmateriaal en examineer over veel grotere porties dan thans. Sta eventueel toe dat één *eigenhandig beschreven* A5-je meegenomen mag worden naar het examen.

Deze punten zal ik stuk voor stuk toelichten.

1. Hier heb ik al over gesproken. Mede door de grote rol die de computer en computer-algebra speelt is bezinning op correct wiskundig taalgebruik meer nodig dan ooit.

Commerciële uitgevers overspoelen ons met hun 'producten'. Tot voor kort had ik zowat een kubieke meter Amerikaanse calculus- en lineaire algebra-boeken op mijn kamer. De te behandelen stof staat er veelal krakkemikkig homeopathisch verdund over meer dan duizend pagina's. De sommetjes zijn te onnozel. Veel studenten hebben grote moeite met het gebezigde engels.

2. Een korte tekst noodt meer tot langer nadenken over concepten, dan een lange. Verwijs, voor degenen die er het fijne van willen weten, voor moeilijke mathematisch-technische details naar boeken (op internet). Een mooie oefening voor studenten zou zijn om in formulevoorstellen uit het eigen vakgebied de fei-

telijke wiskundeconcepten te benoemen. Zoiets als het taalkundig en redekundig ontlede ooit.

3. Dit deden we vroeger met veel succes. Draagt kolossaal bij aan de *academische* vorming van onze studenten.
4. Als we weer over ouderwets grote porties gaan examineren dwingt dat de student tot een betere verwerking en ordening van de stof. Te denken valt aan, bijvoorbeeld, één combinatievak calculus plus lineaire algebra per semester.

Nogmaals: ik streef geen gedwongen winkelnering na van allerlei verplichte wiskundige subtiliteiten. Ik zou niet durven. De karikaturen vliegen me al om de oren.

Studenten mogen echter best weten dat een afgeleide veel meer dan een raadselachtige boekhoudtruc is die x^4 in $4x^3$ omtovert. Differentiëren is onderdeel van een taal die spreken over bètawetenschappelijke zaken mogelijk maakt!

Ook bij moeilijke fundamentele vakken van de faculteiten zou de moeite genomen moeten worden eerst wat te doen aan elementaire wiskundige concepten. Schitterende vakken, zoals bijvoorbeeld de thermodynamica, die voor de opeenvolgende studentengeneraties buitengewoon duister zijn geweest, kunnen daardoor gaan schitteren van schoonheid en helderheid.

Nostalgieisch nawoord

Ik behoor tot een buitengewoon gelukkige generatie. Onze ouders hebben economische crises en oorlog meegemaakt. Wij, daarentegen alleen maar groei in welvaart en mogelijkheden. Weliswaar waren we in onze tienerjaren, naar huidige normen gemeten, straatarm. Maar daar hadden we geen weet van. Je had veel tijd om allerlei intellectuele zaken te verwerken. Geen bijbaantjes. Geen televisie. Geen hectiek. Voor begaafde jonge mensen van mijn generatie was er geen enkele financiële belemmering meer om te gaan studeren. Als je ouders niet konden of niet wilden betalen kreeg je een renteloos voorschot. En als je

hoge cijfers behaalde werd dat ook nog kwijt gescholden.

Over de hoogte van de bedragen moet U zich overigens geen illusies maken. Ik kreeg een volledige beurs van 2400 gulden per jaar. Zo'n 1100 Euro. Een beetje net-werkende jongere besteedt dat thans aan telefoneren.

Aan toelatingseisen werd evenwel strikt de hand gehouden. Met een diepe onvoldoende voor Frans kon je niet naar de universiteit.

Omdat ik nooit zo goed wist wat ik precies wilde heb ik nogal uiteenlopende studies gedaan en ook afgemaakt. Ik heb in vele verschillende weiden mogen grazen en dat heeft me een gelukkig mens gemaakt.

Wat de bètawetenschappen betreft had ik na enige tijd genoeg van elektrotechniek en stapte over naar natuurkunde. Weer enige tijd later stortte ik mij op de wiskunde. Formeel bleef ik bij natuurkunde omdat ik, als jonge twintiger, de wiskundeomgeving maar grijs en saai vond. Bovendien trof ik bij wiskunde geen maoïstische vriendjes waar ik ruzie mee kon maken.

Ik ben zo oud dat ik nog door de koningin in mijn ambt benoemd ben. Een koninklijke benoeming betekende, formeel, volstrekte onafhankelijkheid in zake onderwijs en onderzoek. Eigenlijk zoals rechters onafhankelijk zijn. Eind zeventiger jaren stond zo'n koninklijke benoeming eigenlijk al op gespannen voet met de toen heersende nieuwe wet op het hoger onderwijs, de Wet op het Universitair Bestuur (WUB). Het prettige anachronisme 'kroondocenten' is echter pas in de tachtiger jaren opgeheven. Een goede wet was dat overigens, die WUB. Ik denk met heimwee en waardering terug aan onze uitstekende faculteitsraad. Toen nog een machtig orgaan dat volledige openheid verschafte en dat individuen, ongeacht rang of stand, tot de orde kon roepen. Besturen was nog een niet al te omvangrijke taak: De eerste keer dat ik vice-decaan van de faculteit was kreeg je daar een halve dag voor op de werkverdeling. En dat kon ook gemakkelijk.

De tweede keer dat ik vice-decaan was, za-

ten we in een reorganisatie. In zo'n situatie zijn het niet de nobelste eigenschappen van de mensen die boven komen drijven. Deze episode eindigde voor mij in een plaatsvervangend decanaat dat gelukkig (voor iedereen) maar vier maanden duurde. De reorganisatie binnen de faculteit leidde vooral tot heel veel weggegooid geld en heeft geen navolging gevonden bij andere faculteiten.

Bij het onderzoek met mijn promovendi had ik, en heb ik, een grote fascinatie voor mathematische fysica. Voor de goede orde, er is een subtiel maar wezenlijk verschil tussen theoretische natuurkunde en mathematische fysica. *Theoretische natuurkunde* ziet er typografisch uit als wiskunde, maar is het vaak niet omdat de fysische concepten *wiskundig* niet helder zijn en 'analogie-redeneringen' de plaats innemen van wiskundige bewijzen. Uiteindelijk telt daar de tucht van experimentele verificatie, maar zeker niet altijd. Het is vaak ook een soort suggestieve filosofie. In de *mathematische fysica* gaat het om wiskundige formuleringen van stukken natuurkunde. Daar geldt in ieder geval de tucht van de wiskunde en worden wiskundige formuleringen en bewijzen wel op prijs gesteld. Je zou de rol van de mathematisch fysicus, of mathematisch technicus, kunnen vergelijken met die van een cultureel antropoloog. Beide kijken, hevig geboeid, naar de rituelen van een wilde stam en proberen daar iets bij te bedenken wat in hun straatje past en wat ze in hun taal kunnen formuleren. Of de 'wilden' daar altijd gelukkig mee zijn, dat blijft een spannende vraag. Vaak reageren ze wat korzelig, maar op den duur lijken ze er zich toch wel iets van aan trekken!

Ik ben erg gelukkig geweest met meer dan twintig goede promovendi en evenzovele goede afstudeerders. Ik ben hun veel dank verschuldigd. Het is de wisselwerking met bevlogen, begaafde jonge mensen, bij onderwijs en onderzoek, die zoveel aan mijn eigen wetenschappelijke vorming heeft bijgedragen. Het is ook *die* wisselwerking die ik de komende tijd het meest zal gaan missen. ↵

Referenties

- 1 St Thomas Aquinas, *The Summa Theologica*, First Part Q.2 ART.3. Translation by Laurence Shapcote, ISBN 0-85229-531-6
- 2 Janne Brok, *An analytic approach to electromagnetic scattering problems*, Proefschrift TUD 28 juni 2007.
- 3 Jan van de Craats, 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen', *Nieuw Archief voor Wiskunde* nr.2, juni 2007.
- 4 J. de Graaf, *Tensorrekening en Differentiaalmeetkunde*, Appendix H. www.win.tue.nl/~degraaf
- 5 J. de Graaf, *Wiskundedictaten 1956-1982*, TU/e 2006. Bevat 197 wiskundedictaten, opgavenbundels en boek, ca 25000 pp, te bestellen via www.ufeindhoven.nl.
- 6 Heinrich Hertz, *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität*, Tagebuch September 1889.
- 7 Johan Huizinga, *Homo Ludens*, Pandora Pocket 1997. Ontleend aan de Tjeenk Willink uitgave van 1951.
- 8 James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, 1873.