

Rainer Kaenders

*Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Universität zu Köln
Gronewaldstrasse 2
50931 Köln
r.kaenders@uni-koeln.de*

Vakantiecursus

Dubbelplaneten

De maan verwijderd zich elk jaar van de aarde met een afstand van 3,82 cm en de satelliet Phobos van Mars zal in de toekomst eens op het Marsoppervlak te pletter slaan. Hoe zijn deze verschijnselen te verklaren? In dit artikel kunnen we dit met relatief eenvoudige vector-dynamica begrijpen. Het verscheen eerder in de bundel behorende bij de vakantiecursus 2007 wiskunde. Deze cursus, die jaarlijks georganiseerd wordt door het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, heeft dit jaar het thema Wiskunde in Beweging. Het thema is speciaal gekozen met het nieuwe havo- vwo vak wiskunde D in gedachten. Met dit vak hebben de differentiaalvergelijkingen hun rentree gemaakt in het middelbaar onderwijs. Dubbelplaneten van Rainer Kaenders lijkt daartoe als vakoverstijgend project zeer geschikt.

In 1695 heeft de Engelse astronoom Edmond Halley voorspeld dat de maanden (dat wil zeggen de omlooptijd van de maan rond de aarde) in de loop van de zeshonderd jaar vóór zijn tijd ongeveer een tienduizendste uur korter zijn geworden [2]. Hoe kon hij met de middelen van toen een dergelijke uitspraak doen?

Twee jaar eerder, in 1693, heeft Halley samen met een Oxfordse arabist de vertaling (door een zekere Plato Tiburtinus) van de observaties van de astronoom al-Battani vanuit een vakdeskundig perspectief herzien [1]. De Arabier al-Battani (850 – 923), wiens naam door Halley tot *Albategnius* werd gelatiniseerd, beschreef verschillende maans- en zonsverduisteringen.

Naar aanleiding hiervan beweerde Halley [2] dat hij aan kon tonen dat de maanden korter werden. De Utrechtse astronoom Frank Verbunt speculeert in [4], [6] hoe Halley tot deze conclusie gekomen zou kunnen zijn: Omdat zonsverduisteringen uitsluitend bij een nieuwe maan plaatsvinden moet er altijd een geheel aantal maanden tussen twee zonsverduisteringen zitten. Halley kende de lengte van een maand al enigszins nauwkeurig en kon dus terugrekenen wanneer en waar 800 jaar (oftewel ongeveer 10.000 maanden) eerder al-Battani een zonsverduistering gezien zou kunnen hebben. Stel nou dat Halley had berekend dat er toen een zonsverduistering in Alexandrië plaats moest hebben gevonden terwijl al-Battani een zonsverduistering op deze dag in Bag-

dad verslaat. Dit had Halley dan kunnen verklaren door aan te nemen dat de zonsverduistering een uur eerder plaatsvond dan hij had berekend, hetgeen betekent dat de doorsnee maandlengte tijdens deze 800 jaar met 10^{-4} uur langer was dan in zijn tijd. De derde wet van Kepler, die we later nog zullen leren kennen, legt een verband tussen de omlooptijd en de afstand tussen aarde en maan en heeft tot gevolg dat met de lengte van de maanden ook de afstand tussen aarde en maan af moet nemen. Tegenwoordig weten wij echter door middel van lasermetingen aan de planeet Mars dat deze afstand tussen aarde en maan met 3,82 cm per jaar toeneemt en daarmee de maanden langer zouden moeten worden. Hoe is dit te verklaren? Had Halley gewoon ongelijk?

Deze vraag van Halley is een vraag zoals die werkelijk in de wetenschap, of preciezer in de astrofysica speelt. De vraag oefent een fascinerende werking uit op astronomen maar ook op leerlingen, leraren en andere belangstellenden. Ook al spreken de metingen Halley tegen, toch is de vraag: Op grond waarvan heeft Halley zijn conclusie getrokken? Het antwoord is te vinden in de analyse van het achterliggende wiskundige model. Aarde en maan vormen een zogenaamde dubbelplaneet en dubbelplaneten zijn weer draaiende systemen die onderhevig zijn aan de wet van behoud van impulsmoment (of draai-impuls). Dit is de natuurkundige notie om de *hoeveelheid draaiing* van een systeem te kwantificeren. Door een zorgvuldige analyse van deze wet voor aarde-maan is de constatering van Halley logisch te verklaren [4], [5], [6]. Naast de toename van de maandlengte heeft het behoud van impulsmoment namelijk ook een sterkere toename van de daglengte tot gevolg. Als de maanden in dagen worden gemeten dan worden zij daadwerkelijk korter en had Halley dus toch gelijk.

Uiteindelijk kan door toepassing van de wet van behoud van impulsmoment de toekomst van de dubbelplaneten aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton worden voorspeld. Voor alle drie de dubbelplaneten geldt dezelfde wet maar toch gaat elk van hen een ander noodlot tegemoet.

In deze bijdrage zullen we de wiskundige achtergronden belichten van begrippen als koppel en impulsmoment en daarmee de wet van behoud van impulsmoment afleiden. De wetten van Newton worden toegelicht en vormen de enige inbreng vanuit de



Figuur 1 Links: Edmond Halley, rechts: de Halley-komeet

natuurkunde – de rest is wiskunde. Vectorfuncties, dat wil zeggen functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^3$, worden ingevoerd en de productregel voor in- en uitproducten van zulke vectorfuncties afgeleid. Daarmee ligt de wet van behoud van impulsmoment al voor het oprapen. In het vervolg gaan we deze wet interpreteren. Daarvoor kijken wij naar zwaartepunten, hoeksnelheden, middelpuntzoekende krachten en traagheidsmomenten. Als loon voor deze moeite zullen we zien dat planeten in een vlak bewegen, dat de perkenwet van Kepler geldt. Hiermee kunnen we het gyroscopisch effect begrijpen.

De studie van het impulsmoment in ons zonnestelsel en in het bijzonder het antwoord op het probleem van Halley vormen een schoolvoorbeeld voor de kracht van wiskunde in de natuurwetenschap. De observaties leveren een tegenspraak op, die alleen op te lossen is door een gepast wiskundig model dat in dit geval door de klassieke mechanica van Newton is gegeven. Met dit model wordt vervolgens puur wiskundig geredeneerd en dat levert uiteindelijk resultaten op die naar de werkelijkheid terug kunnen worden vertaald. Daarmee zijn dan de paradoxaal lijkende observaties te verklaren. Zodra het probleem van Halley is doorgrond wordt duidelijk dat dit model veel meer dan een enkele vraag op kan lossen – het maakt voorspellingen in uiteenlopende situaties mogelijk: de ene formule over behoud van impulsmoment levert uiteenlopende voorspellingen op in de drie gevallen aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton. Het probleem van Halley is een vraag die leerlingen toegang zou kunnen verlenen tot het cultuurgebied van wetenschap die berust op wis- en natuurkunde. Bijvoorbeeld het schoolboek [3] is een aanrader voor iedereen die op schoolniveau verder wil lezen over hemelmechanica en ruimtevaart.

Het wiskundig gereedschap

De wiskunde die nodig is om dit hoofdstuk uit het boek van de astronomie te begrijpen is wat elementaire lineaire algebra en de notie van geparametriseerde krommen in het vlak en de ruimte en haar afgeleiden.

In's en out's van producten in $\mathbb{R}^3$

We beginnen met een herinnering aan in- en uitproducten in $\mathbb{R}^3$. De symbolen $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en $\vec{e}$, met of zonder indices, staan in deze

paragraaf voor vectoren in $\mathbb{R}^3$.

Inproduct Het *in(wendig)product* van twee vectoren $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ uit $\mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Wij spreken het inproduct uit als ' $\vec{u}$ in $\vec{v}$ ' en het is een voorschrift om uit twee vectoren een reëel getal te berekenen. Eenvoudig na te gaan is dat het inproduct symmetrisch (dat wil zeggen $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$) en in beide argumenten lineair is – dit noem je dan bilineair. Wij noemen $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ de *norm* van een vector $\vec{u}$ uit $\mathbb{R}^3$ en met de stelling van Pythagoras ziet men dat de waarde van de norm gelijk is aan de lengte van de vector $\vec{u}$. Als wij het pijltje $\vec{}$ boven een vector $\vec{u}$ weglaten, dan bedoelen wij de absolute waarde $u = |\vec{u}|$ van deze vector.

Het inproduct is zeer geschikt om de projectie van een vector $\vec{u}$ op een vector $\vec{v}$ te berekenen. Er bestaat een op $\vec{v}$ loodrechte vector van de vorm $\vec{u} - \lambda \vec{v}$. Het getal λ bepaal je door te eisen dat deze vector loodrecht staat op $\vec{v}$. Met het inproduct betekent dit

$$\langle \vec{u} - \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2}.$$

De *projectievector* en de *loodvector* van een vector $\vec{u}$ op een vector $\vec{v}$ worden gegeven door

$$\vec{u}_{\vec{v}} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \quad \text{en} \quad \vec{u}_{\vec{v}^\perp} := \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v}.$$

Projectie- en loodvector geven aanleiding tot een ontbinding $\vec{u} = \vec{u}_{\vec{v}} + \vec{u}_{\vec{v}^\perp}$ van de vector $\vec{u}$ in een vector in de richting van $\vec{v}$ en een vector die loodrecht op $\vec{v}$ staat.

Uitproduct In de natuurkunde en de techniek kom je vaak situaties tegen waar grootheden loodrecht op elkaar staan. Wij zoeken dus een manier om aan twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ een derde vector $\vec{u} \times \vec{v}$ uit $\mathbb{R}^3$ toe te kennen zodat, als $\vec{u} \neq 0$ en $\vec{v} \neq 0$, de volgende eigenschappen gelden:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{u}$ en $\vec{v}$,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{u} \times \vec{v}$ vormen een rechtshandig assenstelsel (zie figuur op bladzijde 290),
- als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ loodrecht op elkaar staan geldt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$,
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}_{\vec{u}^\perp} = \vec{u}_{\vec{v}^\perp} \times \vec{v}$.

Als één van de vectoren de nulvector is, dan is ook het uitproduct gelijk aan de nulvector. Voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ geldt: $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ en $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$. De tweede eigenschap volgt uit de toepassing van de eerste eigenschap op het uitproduct $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.

De eigenschappen hierboven maken duidelijk dat $\vec{u} \times \vec{v}$ de eenduidig bepaalde vector is waarvoor geldt dat hij loodrecht staat op het door $\vec{u}$ en $\vec{v}$ opgespannen parallellogram, zijn lengte gelijk is aan de oppervlakte (zie de opgave hierboven) van dat parallellogram, waarbij $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{u} \times \vec{v}$ georiënteerd zijn volgens de rechterhand-regel.

Definitie: Wij noemen $\vec{u} \times \vec{v}$ het *uit(wendig)product* van de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ (spreek uit: 'u uit v').

Het koppel

Een andere toepassing voor het uitproduct is de definitie van het koppel. Als men een schroef wil schroeven dan gaat dat het beste met een arm die loodrecht staat op de schroef: een schroevensleutel. Hoe groter de afstand is tussen de schroef en het punt op de schroevensleutel waarop een kracht wordt uitgeoefend hoe beter de schroef te draaien zal zijn. Als de arm niet loodrecht staat dan is het enige wat voor het schroeven telt het loodrechte deel van de arm. (Bijvoorbeeld als iemand probeert te schroeven door de schroevensleutel in verlenging op de schroef erop te zetten dan is de schroefkracht kennelijk nul.)

Op een punt van de arm wordt er bij het schroeven een kracht uitgeoefend en het enige wat er voor de *schroefkracht* toe doet is het gedeelte van de kracht dat loodrecht staat op de schroef en de schroevendraaier.

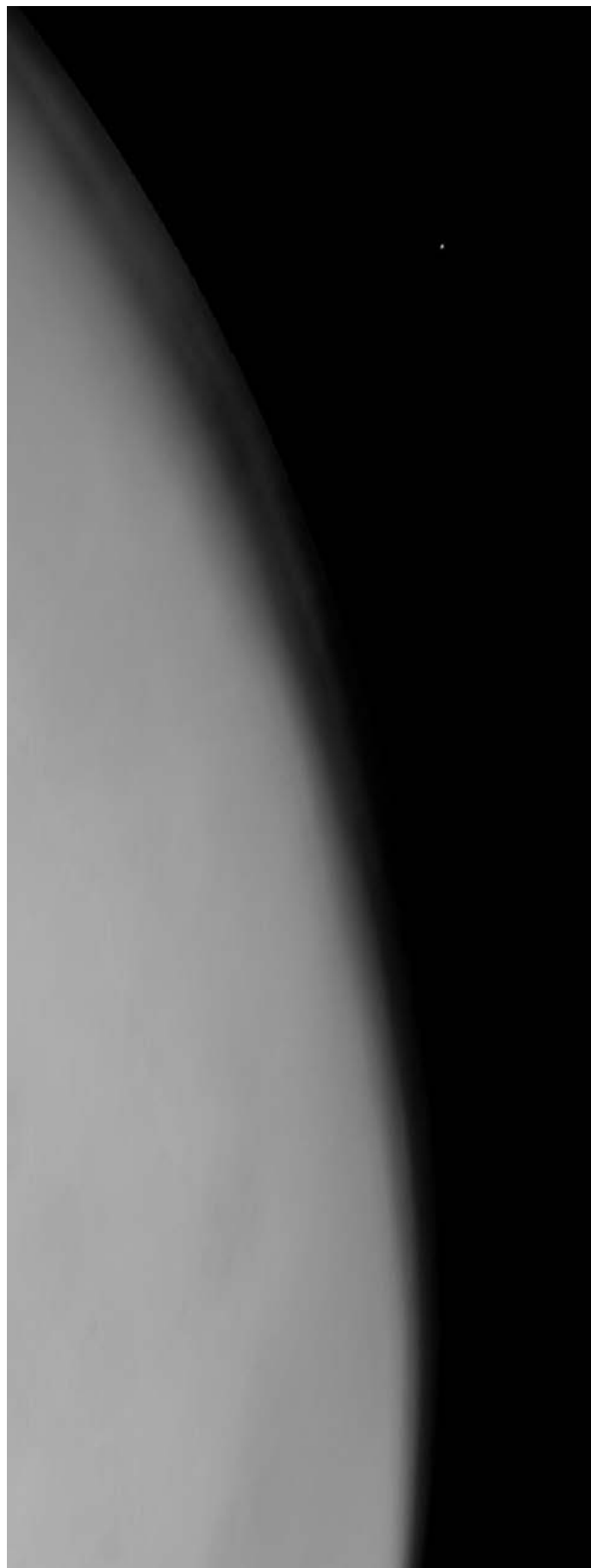
De effectiviteit van het schroeven in een gegeven richting heeft te maken met enerzijds de lengte van de schroevensleutel en de mate waarin hij loodrecht staat op de schroef en anderzijds met de kracht die op een punt van de schroevensleutel wordt uitgeoefend en de mate waarin deze kracht loodrecht staat op de schroef en de schroevensleutel.

We kunnen ook andersom redeneren. Gegeven een arm of hefboom, wiskundig voorgesteld door een vector $\vec{r}$, en een krachtsvector $\vec{F}$. Deze vectoren $\vec{r}$ en $\vec{F}$ leggen een richting vast waarin het beste geschroefd kan worden. Hoe sterker de kracht is en hoe langer de arm, hoe effectiever er geschroefd kan worden. Uit de bovenste beschouwingen blijkt dat de mate en de richting waarin er effectief geschroefd kan worden gegeven wordt door het zogenaamde *koppel* ten opzichte van de oorsprong O dat wordt uitgedrukt door: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Als er een kracht werkt op een massadeeltje dan kunnen we het koppel van dat deeltje ten opzichte van elk willekeurig punt berekenen, hetgeen weergeeft in welke richting en hoe goed deze kracht toegepast op een hefboom naar dat willekeurig punt in staat zou zijn om een draaiing in gang te zetten.

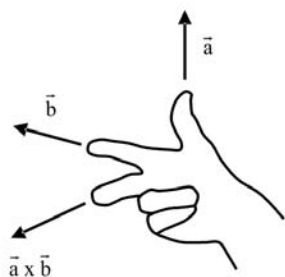
Geparametriseerde ruimtekrommen

In het vervolg kijken we naar afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^3$ waarbij wij denken aan de beweging van puntmassa's in de driedimensi-



Mars en Phobos; foto Mars Global Surveyor (1998)

De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een zogenaamd rechtshandig assenstelsel.



onale ruimte. Zo'n afbeelding $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door drie gewone differentieerbare functies:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

De parameter noemen we meestal t , omdat wij hierbij denken aan de tijd.

De afgeleide van een dergelijke afbeelding kunnen we net als bij gewone functies verkrijgen door

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)) \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 1

- Bewijs dat geldt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_{\vec{u}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{v}}, \vec{v} \rangle$.
- De vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ spannen een parallellogram op. Laat zien dat de oppervlakte daarvan gelijk is aan

$$|\vec{u}_{\vec{v}^\perp}| |\vec{v}| = |\vec{v}_{\vec{u}^\perp}| |\vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}.$$

Opgave 2

- Toon aan dat: $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ en $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, waarbij θ de hoek tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$ is.
- Bewijs dat voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ geldt:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}| \vec{v}_{\vec{u}^\perp}.$$

- Gegeven twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ dan geldt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}.$$

Zodra men hierbij denkt aan de afgeleide naar de tijd geeft deze afbeelding voor elk moment de richting en de snelheid aan waarmee een denkbeeldig massapunt beweegt. Als het gaat om de tijd, schrijven wis- en natuurkundigen $\vec{F}(t)$ voor $\frac{d\vec{F}}{dt}$. De uitdrukking $\frac{1}{\Delta t} (\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t))$ waarin de vectoren $\vec{F}(t + \Delta t)$ en $\vec{F}(t)$ worden vermenigvuldigd met het reële getal $\frac{1}{\Delta t}$ schrijven wij soms ook als $\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$.

Productregel voor in- en uitproduct van functies

Met dergelijke afbeeldingen $\vec{F}$ en $\vec{G}$ kan men rekenen als met vectoren (waarbij wij denken dat ze met de tijd veranderen). Bijvoorbeeld: de afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ zijn gedefinieerd door $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle(t) = \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \rangle$ waarbij aan de rechterkant voor elke t producten van gewone vectoren staan. De afgeleiden van deze afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ kunnen we net zo bepalen als wij dat kennen van gewone functies – met de productregel. Het bewijs hiervoor is bijna letterlijk hetzelfde als bij de productregel voor gewone functies.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} (\vec{F} \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F} \times \vec{G}(t)) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left([\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t)] \right. \\ &\quad \left. + [\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t) - \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)] \right) \\ &= \left(\left[\vec{F}(t + \Delta t) \times \frac{\vec{G}(t + \Delta t) - \vec{G}(t)}{\Delta t} \right] + \left[\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \times \vec{G}(t) \right] \right). \end{aligned}$$

Als men nu Δt naar nul laat gaan blijkt dat ook voor het uitproduct de gewone productregel geldt:

$$\frac{d}{dt} (\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{F}} \times \vec{G} + \vec{F} \times \dot{\vec{G}}.$$

Newton mechanica

Het natuurkundige uitgangspunt voor alle wiskunde die nu volgt, wordt gegeven door de klassieke wetten van Newton.

Laat $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ de positievector van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O zijn. De vectoren $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ zijn hierbij functies van de tijd t . (Wiskundig gezien gaat het hier om drie ruimtekrommen zoals we die hierboven hebben ingevoerd en drie positieve getallen m , m_1 , m_2 .) Dan noteren wij de bijbehorende snelheden als $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Hierbij horen impulsen $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_2$ gegeven door $\vec{P} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ als ook $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1$ en $\vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2$ die kunnen worden opgevat als de hoeveelheid beweging.

- Newtons eerste wet** Een lichaam blijft stil staan of beweegt eenparig (zonder versnelling) als er geen kracht op wordt uitgeoefend.
- Newtons tweede wet** De versnelling die een lichaam ervaart is evenredig met de op hem werkende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het lichaam: $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ of $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$. Kort: $\vec{F} = \dot{\vec{P}}$.
- Newtons derde wet (actio = reactio)** Als twee lichamen onderling krachten op elkaar uitoefenen dan wordt er op beide lichamen een even grote kracht uitgeoefend in tegengestelde

richtingen. dat wil zeggen de som van de kracht $\vec{F}_{12}$ op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) en de kracht $\vec{F}_{21}$ op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) is gelijk aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ oftewel $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

- **Newtons wet van universele gravitatie** Verder heeft Newton de gravitatiewet geformuleerd die beschrijft hoe sterk de kracht is die een lichaam met massa m_1 uitoefent op een lichaam met massa m_2 . Als we met $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de vector tussen de twee lichamen aangeven met afstand d dan geldt voor deze kracht:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \frac{\vec{r}_{21}}{d} = G \frac{m_1 m_2}{d^3} \vec{r}_{12}.$$

De constante G heet de *gravitatieconstante*. Haar waarde is

$$G \approx 6,672610^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}.$$

Bewegen op een cirkel

Voor cirkelvormige bewegingen is er een bijzondere middelpuntzoekende kracht nodig en de beschrijving van de snelheid van deze beweging kan het beste via de hoeksnelheid gebeuren.

Middelpuntzoekende kracht We kijken nu naar cirkelvormige bewegingen in de ruimte. Stel dat $\vec{r}$ de positievector is van zulk een cirkelvormige beweging met constante absolute snelheid. Dan is $|\vec{r}|^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$ constant en met de productregel vinden wij de eerste afgeleide naar de tijd: $\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 2 \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Dus $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{r}$. Omdat de snelheid van de beweging constant is, is $|\vec{v}|^2 = \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle$ constant. Daarom is de afgeleide hiervan nul waaruit volgt dat $\ddot{\vec{r}}$ dus weer loodrecht staat op $\dot{\vec{r}}$ en dus in de richting van $\vec{r}$ of in de tegengestelde richting wijst. In de eerder gebruikte notatie betekent dit:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \frac{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^2} \vec{r} = \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Differentiëren van $\langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle$ levert dan ook op $\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Anders geschreven vinden wij de uitdrukking voor de *middelpuntzoekende versnelling*:

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{|\vec{r}|} \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Voor de grootte van de versnelling is dus $a = \frac{v^2}{r}$ met $a = |\ddot{\vec{r}}|$. Met de tweede wet van Newton is de centripetale kracht of middelpuntzoekende kracht gelijk aan

$$\vec{F}_{\text{centripetaal}} = -m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

en voor de grootte van deze kracht geldt: $F_{\text{centripetaal}} = m \frac{v^2}{r}$. Deze kracht is dus nodig om een deeltje op een cirkelbaan te laten bewegen.

Hoeksnelheid De snelheid van een draaiing kan het beste worden weergegeven door de hoeksnelheid die aangeeft hoe een hoek θ (in radialen) met de tijd verandert, dus $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. De hoek-

snelheid is dus niet meer de snelheid van beweging maar wel *de snelheid van een draaiing*. Voor de snelheid zelf geldt dan $v = \omega R$ omdat voor de afgelegde afstand s geldt $s = \theta R$. Hiermee kan de centripetale kracht worden uitgedrukt door $F_{\text{centripetaal}} = m R \omega^2$. Wij zien hieruit dat bij een gegeven hoeksnelheid de middelpuntzoekende kracht lineair groeit met de afstand naar het middelpunt.

Het uitproduct geeft ons de mogelijkheid om voor een cirkelvormige beweging *de snelheid en de richting van de draaiing* in een enkele grootheid, de *hoeksnelheidsvector*, samen te vatten. De snelheidsvector $\vec{v}$ van een cirkelvormig, rond een punt O bewegend deeltje kan als veralgemenisering van $v = \omega R$ worden uitgedrukt door $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Daarbij wijst de vector $\vec{\omega}$ in de richting van de draaias en staat loodrecht op de positievector $\vec{r}$ en daarom geldt dan ook hier $v = \omega R$ met $v = |\vec{v}|$, $\omega = |\vec{\omega}|$ en $r = |\vec{r}|$. Wij zien dus dat de lengte ω van deze vector gelijk is aan de hoeksnelheid zoals boven weergegeven.

Impuls, koppel en impulsmoment

Nu leggen wij uit hoe uit de wetten van Newton het behoud van impuls en impulsmoment (draai-impuls) volgt.

Impulsbehoud Laat $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ de positievectoren zijn van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O . Deze drie positievectoren zijn hierbij functies van de tijd t en de bijbehorende impulsen zijn $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_2$. Newtons derde wet (actio = reactio) zegt nu dat als twee lichamen krachten op elkaar uitoefenen, de som van de kracht $\vec{F}_{12}$ op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) en de kracht $\vec{F}_{21}$ op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) gelijk is aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Hieruit volgt met de tweede wet dat $\dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2 = 0$. Dus is $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ constant (de wet van impulsbehoud).

Hieruit kan men bijvoorbeeld rechtstreeks eenvoudige gevolgtrekkingen maken voor de botsing van twee deeltjes, zij het elastisch (dat ze weer uit elkaar vliegen) of inelastisch (dat ze samen blijven klonteren), die in natuurkundeboeken uitgebreid worden besproken.

Impulsmoment of draai-impuls Laat $\vec{r}$ de positievector (als functie van de tijd t) van een deeltje met massa m ten opzichte van een willekeurig punt O zijn met impuls $\vec{P}$. Dan heet

- $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$ het *impulsmoment* of de *draai-impuls* met betrekking tot oorsprong O (vaak gebruikt men ook de letter L resp. $\vec{L}$),
- $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ het *koppel* of *draaimoment* met betrekking tot oorsprong O (hiervoor wordt ook de letter τ resp. $\vec{\tau}$ gebruikt).

Het impulsmoment kan worden opgevat als de *hoeveelheid draaiing*. Door de productregel voor het uitproduct van de vectorfuncties toe te passen vinden wij eenvoudig:

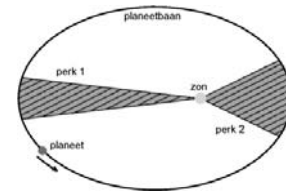
Stelling 1 Voor een enkel massadeeltje geldt: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$.

In het resterende gedeelte van deze bijdrage worden alleen nog maar conclusies uit deze stelling getrokken. Hier al enkele eenvoudige gevolgen voor een enkel massadeeltje.

- Als het deeltje in een centraal krachtenveld beweegt waarbij de oorsprong O in het centrum van dat krachtenveld ligt en alle krachtsvectoren naar de oorsprong wijzen, dan is $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ omdat $\vec{r}$ en $\vec{F}$ in tegengestelde richting wijzen. Met de stelling volgt hieruit dat het impulsmoment $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P} = 0$ blijft behouden. Dat betekent dus dat de met de tijd veranderende vector $\vec{r}$



Neptunus en Triton; foto: Voyager II, 3 juli, 1989



Figuur 2 De tweede wet van Kepler: de perkenwet

altijd loodrecht staat op de vaste vector $\vec{J}$. Dat betekent dat de vector $\vec{r}$ alleen nog maar in een vlak kan bewegen namelijk het vlak van alle vectoren die loodrecht staan op deze vaste vector $\vec{J}$.

- Het feit dat $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ constant is, betekent dat $\vec{r} \times \vec{v}$ constant blijft. Als wij nu voor kleine tijdsintervallen Δt de afgeleide benaderen door $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, dan is $\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\vec{r} \times \Delta \vec{r})$ voor kleine tijdsintervallen altijd even groot. De uitdrukking $|\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ geeft twee keer de oppervlakte aan van de driehoek die wordt opgespannen door $\vec{r}$ en $\Delta \vec{r}$. Bij benadering is dat de oppervlakte die de positievector $\vec{r}$ in de tijd Δt heeft bestreken. Als wij nu met $A(t)$ de oppervlakte noteren die de positievector vanaf een tijdstip t_0 heeft bestreken dan volgt uit het bovenstaande $\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2\Delta t} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ en daarom geldt: $\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} |\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| = \frac{1}{2m} J$ en dat is constant. Dus is de oppervlakte een lineaire functie in t . Uit het behoud van het impulsmoment in een centrale kracht (zonder dat er meer over bekend is) volgt de zogenaamde *perkenwet van Kepler* die ook bekend staat als zijn tweede wet. Deze kan ook zonder de boven geschetste benaderingen worden afgeleid.

De snelheid van een planeet in haar omloopbaan verandert zodanig dat in gelijke tijdsintervallen de oppervlakte, bestreken door de rechte lijn (voerstraal) tussen de zon en de planeet, gelijk is.

Opmerking: Als het deeltje met massa m net als boven in een centraal krachtenveld beweegt dat ontstaat door de zwaartekracht vanuit een andere massa M in de oorsprong O , dan is de kracht dus bepaald door de universele gravitatiewet. Hieruit kan dan worden afgeleid dat het deeltje op een ellipsbaan beweegt. Dit is de *eerste wet van Kepler* en het was Isaac Newton die uit Kepler's wetten de universele gravitatiewet wist af te leiden. In het vervolg van dit stuk echter veronderstellen wij de planetenbanen als cirkelvormig. Gezien de kleine excentriciteiten van de beschouwde ellipsbanen blijft dit het gedrag van de dubbelplaneten goed beschrijven.

Behoud van het totale impulsmoment Veel systemen bestaan uit meerdere puntmassa's: aan de ene kant kunnen bijvoorbeeld planeten worden opgevat als samenvoeging van afzonderlijke kleine puntmassa's en aan de andere kant kunnen systemen van meerdere planeten worden opgevat als puntmassa's die in hun zwaartepunten zijn geconcentreerd. In het eerste geval denken wij aan

Opgave 3

Bewijs stelling 1. Voor een deeltje waarop geen uitwendige kracht werkt, geldt dus dat $\vec{J}$ constant is. Hoe verhoudt zich dit tot de eerste wet van Newton?

oneindig veel deeltjes en kunnen tot de limiet overgaan en in het tweede geval gaat het maar om enkele massadeeltjes.

Gegeven zijn N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Het totale impulsmoment van het systeem is dan gegeven door $\vec{J}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ en het totale koppel is $\vec{N}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. De boven bewezen stelling leidt rechtstreeks tot de volgende stelling.

Stelling Voor het totale impulsmoment en het totale koppel geldt:

$$\frac{d\vec{J}_{tot}}{dt} = \vec{N}_{tot}.$$

Als het totale koppel verdwijnt, blijft ook het totale impulsmoment behouden. Op het i -de deeltje werkt een kracht $\vec{F}_i$ die is samengesteld uit de krachten $\vec{F}_{ij}$ die door de andere deeltjes worden uitgeoefend en een externe kracht $\vec{F}_{i,ext}$. Dus

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,ext}.$$

Het aandeel $\sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$ van de kracht $\vec{F}_i$ noemen we de *interne kracht* $\vec{F}_{i,int}$ op deeltje (i). Dus $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$ op deeltje (i).

Stelling Als een aantal puntmassa's óf zonder externe krachten, óf in een centraal krachtenveld beweegt, is het totale koppel gelijk aan nul en het totale impulsmoment blijft behouden.

Bewijs: In beide gevallen geldt voor de i -de puntmassa: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$: als er geen externe kracht is geldt $\vec{F}_{i,ext} = 0$ en in een centraal krachtenveld wijzen $\vec{r}_i$ en $-\vec{F}_{i,ext}$ in dezelfde richting, dus ook hier geldt: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$.

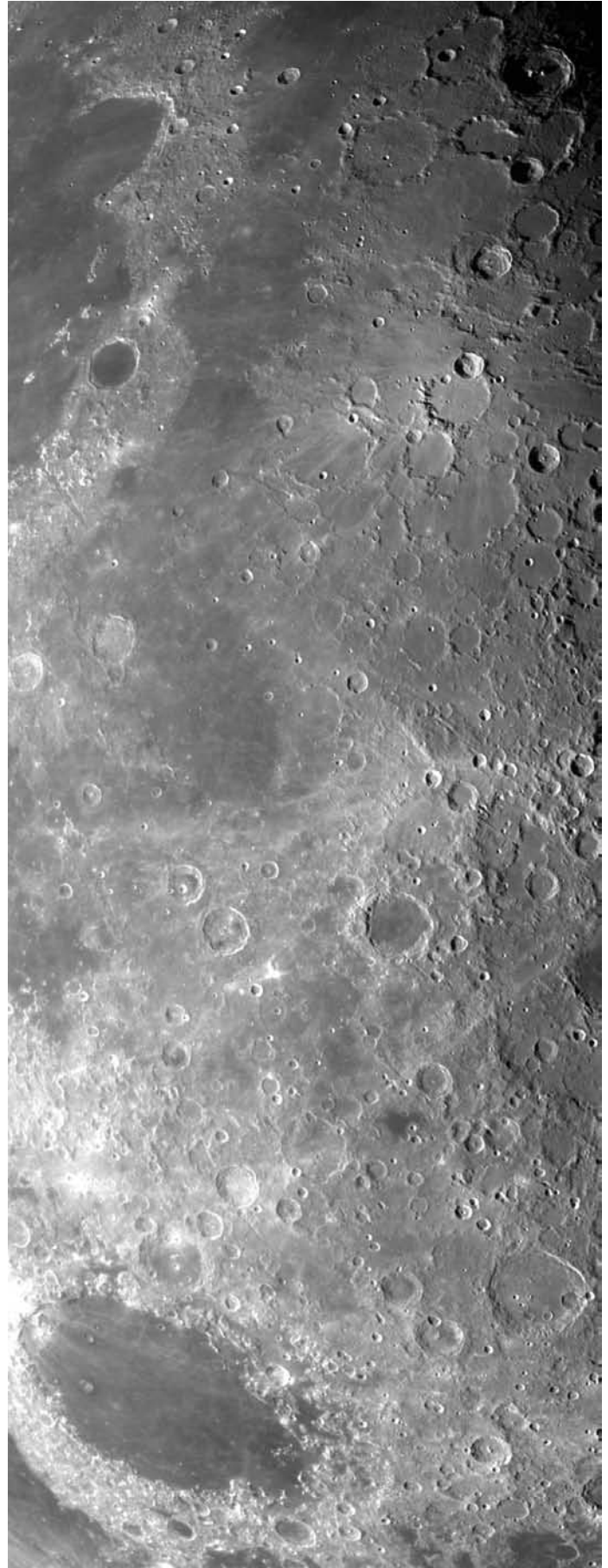
De krachten F_{ij} die door de massadeeltjes op elkaar worden uitgeoefend wijzen in dezelfde of de omgekeerde richting als $r_i - r_j$ en er geldt: $F_{ij} = -F_{ji}$.

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,int} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i < j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Rotaties Als we kijken naar een draaiende hoepel of een fietswiel met massa m vanuit het middelpunt dat wij ons voorstellen als bestaand uit kleine puntmassa's $m_1, \dots, m_N$, dan is het totale impulsmoment

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{N} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

De vectoren $\vec{r}_i$ en $\vec{v}_i$ staan altijd loodrecht op elkaar en daarom wijst $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ in de richting van de draaias en heeft lengte $|\vec{r}_i| |\vec{v}_i| = r \cdot v$ waarbij r en v de afstand van de puntmassa naar het middelpunt en de snelheid aangeven die voor elke puntmassa hetzelfde zijn. Dus $\vec{J}$ wijst in de richting van de draaias en



Het maanoppervlak

$J = mrv$. Als wij de snelheid v met behulp van de hoeksnelheid ω uitdrukken, $v = \omega \cdot r$, dan vinden wij $J = mr^2\omega$. Hierdoor blijkt al dat hoe kleiner de straal r wordt hoe groter de snelheid ω van de draaiing wordt. Dit is een effect dat ook veelvuldig bij kunstschaatsers en op speeltuintoestellen te observeren is.

Gyroscopisch effect Stel wij oefenen nu voor een korte tijd Δt een kracht $\vec{F}$ in de richting van de rotatie-as uit op de rand (door bijvoorbeeld een slag of door een korte beweging van het stuur). De formule $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$ kunnen wij bij benadering lezen als: $\Delta\vec{J} = \vec{N}\Delta t$. Bij een dergelijke toepassing van het koppel $\vec{N}$ op het systeem wijst dus het verschil $\Delta\vec{J}$ van het impulsmoment in dezelfde richting als $\vec{N}$ en niet in dezelfde richting als de kracht $\vec{F}$ (het koppel $\vec{N}$ staat loodrecht op $\vec{F}$) of als de draai-impuls $\vec{J}$ want die wijst in de richting van de draaias. De draaias verandert dus met $\Delta\vec{J}$ van richting als $\vec{N}$ voor een moment Δt werkt. Dat is in een andere richting dan de uitoefening van de kracht doet vermoeden. Dit noemt men het *gyroscopisch effect*. Dit effect gaat bij veel mensen tegen de intuïtie in. Het verklaart waarom een tol niet kantelt; zodra de zwaartekracht hem naar beneden duwt zorgt dit effect ervoor dat hij in een zijwaartse beweging, de zogenaamde *precessie*, terecht komt waardoor de bovenkant van de tol rondjes gaat draaien. Ook de aantrekkingskracht van de zon op de aarde heeft tot gevolg dat de draaias van de aarde zich in een precessiebeweging bevindt.

Impulsmoment verdelen op zwaartepunten

Gegeven zijn N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Dan definiëren wij het *zwaartepunt* van deze N deeltjes door $\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \vec{r}_i$ waarbij we $m = \sum_{i=1}^N m_i$ beschouwen als massa van het zwaartepunt (CM staat voor *center of mass*). Een zwaartepunt gedraagt zich in veel opzichten als een enkel massapunt. Daardoor zijn enkele grootheden die voor de afzonderlijke deeltjes bestaan ook zinvol te definiëren voor het zwaartepunt.

Als wij met een homogeen lichaam met dichtheid ρ te maken hebben, is $m = \rho V$ waarbij V de inhoud van het lichaam weergeeft. Vaak stellen wij ons voor dat dit lichaam bestaat uit een groot aantal (N) kleine massadeeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$. Een vast lichaam kan men opvatten als een verzameling van verschillende kleine massadeeltjes $m_1, \dots, m_N$ met positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ waarvoor geldt: $m = m_1 + \dots + m_N$. De totale impuls is dan gelijk aan de *impuls van het zwaartepunt*: $\vec{P}_{CM} = m\vec{v}_{CM}$. Men kan hiermee het zwaartepunt opvatten als massapunt met massa m , positievector $\vec{r}_{CM}$ en impuls $\vec{P}_{CM}$.

Impulsmoment van baan en spin

De definities van impulsmoment en koppel gelden met betrekking tot een willekeurig punt O . Hier kijken wij nu naar een systeem van N deeltjes en onderzoeken de grootheden in kwestie door ze zowel te relateren aan het punt O als ook aan het zwaartepunt. Bijvoorbeeld in systemen als de dubbelplaneet aarde-maan kan het zwaartepunt hiervan worden gerelateerd aan het impulsmoment gezien vanuit de zon.

Gegeven N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Dan kunnen we het totale impulsmoment ten opzichte van O als volgt splitsen in impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O (baan-impulsmoment) en impulsmoment van alle deeltjes ten opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment):

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^N (\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}}_{\text{spin}}) \times \vec{P}_i + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\text{baan}} \\ &= \vec{J}_{\text{spin}} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}.\end{aligned}$$

De vectoren $\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$ noemen we $\vec{z}_i$. Dan is $\vec{J}_{\text{spin}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{P}_i$ het *spin-impulsmoment* of de *spin-draai-impuls* het totale impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt en $\vec{J}_{\text{baan}}$ is het impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O , het zogenaamde *baan-impulsmoment* of de *baan-draai-impuls*.

Een vergelijkbare opsplitsing als bij het impulsmoment kan ook voor het totale koppel worden gemaakt. Dan is

$$\vec{N} = \vec{N}_{\text{int}} + \vec{N}_{\text{ext}}$$

met $\vec{N}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{F}_i$ en $\vec{N}_{\text{ext}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Daarbij draagt $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ zijn naam terecht want $\vec{F}_{\text{ext}}$ is ook gelijk aan $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,\text{ext}}$, zoals wij boven bij de definitie van het zwaartepunt al hebben gezien.

Opmerking: Als wij naar een dubbelplaneet kijken als bijvoorbeeld aarde-maan (met massa's m_A en m_M en totale massa $m = m_A + m_M$) in het centraal krachteveld van de zon met massa M , dan is het totale impulsmoment behouden. Wij kunnen het totale impulsmoment splitsen in een deel ten opzichte van de zon en een deel ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelplaneet. Het eerste impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van de zon is $\vec{J}_{\text{baan}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$ en de afgeleide geeft: $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \dot{\vec{r}}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \dot{\vec{P}}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Deze vector $\vec{F}_{\text{ext}}$ wijst niet noodzakelijk precies in de richting van $-\vec{r}_{CM}$.

De externe kracht op de dubbelplaneet is

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm_A}{r_A^3} \vec{r}_A - G \frac{Mm_M}{r_M^3} \vec{r}_M$$

waarbij $\vec{r}_A$ en $\vec{r}_M$ de positievectoren van de zon naar aarde en maan zijn. Als wij echter veronderstellen dat $\vec{r}_A \approx \vec{r}_M$ ongeveer gelijk zijn aan $\vec{r}_{CM}$ (de verschillen zijn verwaarloosbaar klein in verhouding met de grootte van $\vec{r}_{CM}$) dan geldt $\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm}{r^3} (\frac{m_A}{m} \vec{r}_A + \frac{m_M}{m} \vec{r}_M) \approx -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}_{CM}$ en daarmee is dan $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}} = 0$. In de beschouwingen over dubbelplaneten zullen wij daarom ook veronderstellen dat het impulsmoment $\vec{J} - \vec{J}_{\text{baan}}$ van de dubbelplaneet ten opzicht van het zwaartepunt van de dubbelplaneet behouden blijft.

Traagheidsmoment

De laatste grootheid die wij hier invoeren is het traagheidsmoment. Stel je hebt een hoepel met straal r en massa m . Als wij de hoepel opdelen in kleine stukjes met massa m_i , die allemaal met dezelfde snelheid $v = r\omega$ bewegen waar ω de hoeksnelheid weergeeft, dan is het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment) gelijk aan

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i r^2 \vec{\omega} = mr^2 \vec{\omega}.$$

De grootheid $I = mr^2$ hangt dus alleen af van het lichaam en niet van de snelheid ω van de draaiing (hoeksnelheid). Het deel I , dat alleen maar afhangt van het lichaam, heet het *traagheidsmoment* van de hoepel.

Als we nu kijken naar een star lichaam, dan draaien alle de-

len van het lichaam weliswaar met verschillende absolute snelheden afhankelijk van de afstand naar de draaias maar met dezelfde hoeksnelheid ω . We kijken nu naar een massadeeltje met massa m , positievector $\vec{r}$ vanuit het zwaartepunt van het lichaam en snelheid $\vec{v}$. Nu kunnen we de hoeksnelheid beschouwen als vector $\vec{\omega}$ met lengte ω waarvoor geldt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. De hoeksnelheid $\vec{\omega}$ wijst in de richting van de draaias. Hiermee zijn wij in staat om een uitdrukking voor het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt te vinden die alleen afhangt van vorm en dichtheid van het lichaam en de hoeksnelheid $\vec{\omega}$. In principe gaat dit net als bij de hoepel.

Het totale impulsmoment is in het algemeen $\vec{J}_{tot} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$. Net als bij de hoepel willen wij hieruit een uitdrukking afleiden waarin de hoeksnelheidsvector los staat van de rest van de uitdrukking die dan alleen nog maar afhangt van de eigenschappen van het lichaam. Bij een willekeurig lichaam leidt dit tot de definitie van de zogenaamde *traagheidstensor*. In het geval van een homogeen bolvormig lichaam met straal R en dichtheid ρ is dit echter niet veel moeilijker dan bij de hoepel.

Hierbij herhalen wij in wezen het bewijs van de in opgave 2 te bewijzen formule $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}|^2 \vec{v}_{\perp}$ voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

Elke vector $\vec{r}_i$ kunnen wij opsplitsen in een deel $\vec{a}_i$ dat loodrecht staat op $\vec{\omega}$ en een deel $\vec{u}_i$ dat in dezelfde of in de tegengestelde richting van $\vec{\omega}$ wijst. Dus $\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{u}_i$ met $\vec{a}_i = (\vec{r}_i)_{\omega^\perp}$ en $\vec{u}_i = (\vec{r}_i)_{\omega}$.

Dan berekenen wij $\vec{J}$ als volgt:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{a}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) + \vec{u}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i)) \\ &= \sum_i m_i (|\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega |\vec{u}_i| \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i. \end{aligned}$$

Het gedeelte $-\omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i$ verdwijnt echter bij een bolvormig lichaam omdat een bolvormig lichaam op zo'n manier in kleine massastukjes kan worden opgedeeld dat er een even aantal bijbehorende positievectoren $\vec{r}_{+1}, \dots, \vec{r}_{+N}$ en $\vec{r}_{-1}, \dots, \vec{r}_{-N}$ ontstaat, bestaande uit paren van telkens twee vectoren $\vec{r}_{\pm i} = \vec{u}_i \pm \vec{a}_i$ waar de loodrecht op $\vec{\omega}$ staande delen $\pm \vec{a}_i$ elkaar opheffen. Voor een bolvormig lichaam houden we dus over:

$$\vec{J} = \vec{\omega} \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 = I_{bol} \vec{\omega},$$

waarbij $I_{bol} = \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2$ het *traagheidsmoment* is. Hierbij kan m_i worden gezien als ρV_i met het bijbehorende deel V_i van de inhoud V . Om het traagheidsmoment te berekenen delen wij de bol op in even grote schijfjes van dikte Δh . Op hoogte h heeft een dergelijke schijf breedte B , waarbij geldt: $B = \sqrt{R^2 - h^2}$. Deze schijfjes de-

len wij vervolgens op in ringen met een straal van b tot $b + \Delta b$ en dikte Δh . Het traagheidsmoment voor zo'n ring is dan $\rho \pi ((b + \Delta b)^2 - b^2) \cdot \Delta h \cdot b^2$. Als we dit verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{aligned} \rho \pi (2b\Delta b + \Delta b^2) \cdot \Delta h \cdot b^2 \\ = \rho \pi 2b\Delta b \cdot \Delta h \cdot b^2 + \rho \pi \Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2. \end{aligned}$$

Nu nemen we de som over de ringen in de schijf met straal B . Dan wordt de som over $\rho \pi \Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2$ willekeurig klein als we Δb klein kiezen.

Het impulsmoment van een dergelijke ring wordt dus gegeven door

$$\rho \pi \Delta h \int_0^B 2b^3 db = \rho \frac{\pi}{2} \Delta h B^4.$$

Nu sommeren wij over alle schijven en vinden voor het traagheidsmoment: $I_{bol} = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - h^2)^2 dh$. Met de formule $\frac{4}{3} \pi R^3$ voor de inhoud van de bol is $\vec{J} = I_{bol} \vec{\omega}$, waarbij I_{bol} het *traagheidsmoment* is van een bolvormig lichaam met straal R dat gegeven wordt door: $I_{bol} = \frac{2}{5} m R^2$.

Behoud van impulsmoment bij dubbelplaneten

Hier passen we de boven geschetste theorie toe op speciale gevallen die een rol spelen voor onze beschouwingen in de astrofysica. Wij hanteren hierbij de vereenvoudigende (en feitelijk onjuiste) aanname dat de maan rond de aarde langs een cirkelbaan beweegt. Eveneens veronderstellen wij dat het zwaartepunt van de twee niet, respectievelijk eenparig, beweegt.

Dubbelplaneten

Hier hebben wij te maken met twee bolvormige vaste lichamen met massa's m_1 en m_2 , positievectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ vanuit het gemeenschappelijk zwaartepunt en onderlinge afstand r . Dan is de positievector van het zwaartepunt gelijk aan

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}$$

met $m = m_1 + m_2$ en er geldt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \text{ en } \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Daarmee liggen dus m_1 resp. m_2 op afstand $r_1 = |\vec{r}_1| = \frac{m_2}{m} r$ resp. $r_2 = |\vec{r}_2| = \frac{m_1}{m} r$ van het zwaartepunt. Nu kijken we naar de draaiing van de twee massa's rond het zwaartepunt en willen hiervoor de hoeksnelheid bepalen. Dit doen wij middels de derde wet van Newton door de centrifugale kracht en de gravitatiekracht aan elkaar gelijk te stellen. Op massa m_1 werkt in de richting $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de gravitatiekracht vanuit massa m_2 die zich op afstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ van elkaar bevindt. Deze kracht is dus gelijk aan $\vec{F}_{gravitatie} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Tegelijkertijd werkt de centrifugale kracht op massa m_1 de andere kant op:

$$\vec{F}_{centrifugaal} = -m_1 \frac{v^2}{r_1 r} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -m_1 r_1 \omega^2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{r},$$

Opgave 4

Laat aan de hand van de wetten van Newton zien dat als op het i -de deeltje een kracht $\vec{F}_i$ werkt, dat dan met $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ ook voor het zwaartepunt de tweede wet van Newton geldt, i.e. $\vec{F}_{ext} = m \ddot{\vec{r}}_{CM}$ of $\vec{F}_{ext} = \ddot{\vec{P}}_{CM}$.

waarbij ω de hoeksnelheid aangeeft met $v = r_1\omega$. Hiermee lukt het de hoeksnelheid te bepalen.

$$G \frac{m_1 m_2}{r^3} = -m_1 r_1 \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3}}.$$

Wij zien hieruit bijvoorbeeld dat de lichamen steeds sneller roteren naarmate ze dichter bij elkaar komen.

Opmerking: Uit het evenwicht van gravitatiekracht en middel-puntzoekende kracht blijkt dat de omlooptijd T evenredig is met $r^{\frac{3}{2}}$. Dit staat in zijn algemene vorm bekend als de *derde wet van Kepler*, die een verband aangeeft tussen de afstand van de planeten en de omlooptijd. Behalve voor cirkelbanen geldt dit ook voor ellipsbanen (r is de halve lange as).

Met de voorbereiding in de paragrafen hiervoor zijn wij nu in staat om het totale impulsmoment te berekenen. Omdat dubbelplaneten in een centraal krachtenveld ver weg van de zon bewegen, is het totale impulsmoment $\vec{J}$ ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelplaneet nagenoeg constant (zie opmerking op pagina 294). Wij splitsen $\vec{J}$ op in het impulsmoment ten opzichte van de zwaartepunten van elk van de planeten en de impulsmomenten van elk massadeeltje van een planeet ten opzichte van het zwaartepunt van deze planeet. $\vec{r}_{1,i}$ resp. $\vec{r}_{2,i}$ met impulsen $\vec{P}_{1,i}$ en $\vec{P}_{2,i}$ zijn de positievectoren van het i -de massadeeltje van planeet (1) resp. (2) met massa $m_{1,i}$ resp. $m_{2,i}$.

Voor de positievectoren vanuit de zwaartepunten van de planeten schrijven wij $\vec{z}_{1,i} = \vec{r}_{1,i} - \vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{z}_{2,i} = \vec{r}_{2,i} - \vec{r}_{2,CM}$. Dan vinden wij:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times \vec{P}_{2,i} + \sum_i \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{1,i}$$

waarbij de positievectoren $\vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{r}_{2,CM}$ uitgaan van het algemene zwaartepunt van de dubbelplaneet. $\vec{P}_{1,i}$ is gelijk aan $(\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \vec{P}_{1,CM}$ en daarbij is $\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}$ de impuls waarmee de i -de puntmassa rond het zwaartepunt van planeet (1) roteert. $\sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,CM} = (\sum_i \vec{z}_{1,i}) \times \vec{P}_{1,CM}$ is gelijk aan nul als de bolvormige planeet op een symmetrische manier in massadeeltjes is opgedeeld waarbij er voor elke vector $\vec{z}_{1,i}$ zo'n tegenovergestelde vector in de som $\sum_i \vec{z}_{1,i}$ te vinden is. Hetzelfde geldt voor planeet (2). Als we dit samenvatten, houden wij de volgende uitdrukking over:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times (\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times (\vec{P}_{2,i} - \vec{P}_{2,CM}) + \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,CM} + \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{2,CM}.$$

Met de berekeningen voor het traagheidsmoment vinden wij:

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \vec{\omega} \quad \text{oftewel} \quad (1)$$

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + \mu r^2 \vec{\omega}$$

Hierbij is $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ de zogenaamde *gereduceerde massa*. $\vec{\Omega}_1$ en $\vec{\Omega}_2$, respectievelijk I_1 en I_2 , staan voor de rotatiesnelheden, respectievelijk traagheidsmomenten van de planeten (1) en (2).

Dit was het voorwerk. Met deze bagage zijn wij nu toegerust

om diepere inzichten in bijvoorbeeld de eigenschappen van dubbelplaneten te verkrijgen.

Halley had toch gelijk

Hoe zit het nu met het verhaal van Halley? Hiervoor gaan wij zorgvuldig kijken naar het totale impulsmoment van aarde en maan. De traagheidsmomenten van aarde $I_A = \frac{2}{5} m_A R_A^2$ en maan $I_M = \frac{2}{5} m_M R_M^2$ zijn nogal verschillend van grootte: $I_A = 9,69865 \cdot 10^{31} \text{ kg km}^2$ en $I_M = 8,87948 \cdot 10^{28} \text{ kg km}^2$, dat wil zeggen I_M is minder dan een duizendste van I_A (zie tabel 1).

De hoeksnelheid van aarde en maan wordt relatief tot de vaste sterren gemeten. Hierbij verwaarlozen wij het tolleren van de aardas (precessie). Gezien vanuit de vaste sterren draait de aarde in 365,2564 dagen 366,2564 keer om haar eigen as. Daardoor geldt voor de hoeksnelheid

$$\Omega_A = 2\pi \frac{366,2564}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 6,30039 \frac{1}{\text{dag}}.$$

De maan draait niet meer ten opzichte van de aarde maar wel ten opzichte van de vaste sterren. De maanden zoals wij die vanaf de aarde zien (de *synodische* maanden) zijn 29,53 dagen lang. Gezien vanuit de aarde draait de maand in één jaar dus $\frac{365,2564}{29,53}$ keer rond de aarde. Omdat het hele systeem in een jaar rond de zon draait is

$$\Omega_M = 2\pi \frac{\frac{365,2564}{29,53} + 1}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 0,229975 \frac{1}{\text{dag}}.$$

Dit geeft aan dat in de formule (1) het spin-impulsmoment van de maan kleiner dan een tienduizendste is van het spin-impulsmoment van de aarde. Daarom zullen wij het hier verwaarlozen. De draaiassen ω en Ω_A wijzen vrijwel in dezelfde richting. Met m geven wij weer de totale massa aan: $m = m_A + m_M$.

$$J = \mu r^2 \omega + I_A \Omega_A = \mu \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}} + I_A \Omega_A. \quad (2)$$

De wet van impulsbehoud geeft daarmee een verband tussen r en Ω_A waarbij de tweede uitdrukking is afgeleid met behulp van de derde wet van Kepler

$$\omega = \sqrt{Gm} r^{-\frac{3}{2}} \quad (3)$$

die de afhankelijkheid tussen r en ω aangeeft. De tweede vergelijking uit (2) kunnen wij ook schrijven als:

$$\Omega_A = \frac{J}{I_A} - \frac{\mu}{I_A} \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Het is een feit dat de getijden de draaisnelheid Ω_A van de aarde langzaam af laten nemen (zie [4–6]). Uit vergelijking (2) en het behoud van impulsmoment zien we dat daarmee r toe moet nemen. Dit is wat er ook werkelijk wordt geobserveerd. De afstand neemt met 3,82 cm per jaar toe.

De vergelijkingen (3) en (4) geven aan hoe r , ω en Ω_A van elkaar afhangen. Wij weten dat r langzaam toeneemt. Met name

zijn we nu geïnteresseerd in de afhankelijkheid van de in dagen gemeten maandlengte van r .

Wij noemen $\lambda_m(r)$ de lengte van een maand en $\lambda_d(r)$ de lengte van een dag zoals wij die op aarde bij een gegeven afstand r tussen aarde en maan zouden waarnemen (dat wil zeggen *synodisch*). Dan geeft λ_m/λ_d het aantal dagen aan in een maand. Wij willen nu aantonen dat λ_m/λ_d voor de dubbelplaneet aarde-maan als functie van de afstand r rond de werkelijke afstand $r_0 = 3,8440 \cdot 10^5$ km dalend is. Omdat de afstand r daadwerkelijk toeneemt weten we dan dat de maanden korter worden als zij in dagen worden gemeten. Hiervoor willen we eerst het verband formuleren tussen λ_m en λ_d aan de ene kant en ω en Ω_A aan de andere kant die ten opzichte van de vaste sterren zijn gedefinieerd. Grootheden die ten opzichte van de vaste sterren worden bepaald, noemen we ook *siderisch* wat afkomstig is van het Latijnse woord *sidus* = ster. λ_j staat voor de lengte van een jaar en die hangt dus niet af van r .

De maan draait λ_j/λ_m keer per jaar rond de aarde, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. Hierbij gebruiken wij weer dat de maan ten opzichte van de aarde stilstaat en dus ten opzichte van de zon per maand een rondje om zichzelf draait.

De siderische hoeksnelheid ω van de draaiende dubbelplaneet aarde-maan is dan

$$\omega = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

Willen we de afhankelijkheid van deze grootheden van r onderzoeken, dan kunnen wij hier de afgeleide naar r bestuderen die we met een accent ' aangeven, dus bijvoorbeeld $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

$$\omega' = -2\pi \frac{\lambda'_m}{\lambda_m^2}. \quad (5)$$

Net zo draait de aarde λ_j/λ_d keer per jaar rond haar eigen as, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. De siderische hoeksnelheid Ω_A van de aarde is dan

$$\Omega_A = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_d} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

De afgeleide naar r geeft hier:

$$\Omega'_A = -2\pi \frac{\lambda'_d}{\lambda_d^2}. \quad (6)$$

Wij willen weten of λ_m/λ_d voor aarde-maan bij groter wordende r rond de werkelijke afstand r_0 daalt of stijgt. In ieder geval vertelt ons de quotiëntregel dat geldt:

$$\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_d} \right)' < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda'_m}{\lambda_d} < \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

Hierbij moet wel worden gecontroleerd dat $\lambda'_d > 0$ is. Uit (4) volgt dat $\Omega'_A < 0$ is en samen met (6) zien we $\lambda'_d > 0$. Uit de formules (5) en (6) concluderen wij

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_d} = \frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

	Aarde	Maan
Straal	6371 km	1738 km
Massa	$5.9736 \cdot 10^{24}$ kg	$7.349 \cdot 10^{22}$ kg

Tabel 1 Straal en massa van aarde en maan

De in dagen gemeten maanden worden dus daadwerkelijk korter als geldt:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} < 1. \quad (7)$$

Door de derde wet van Kepler te differentiëren volgt:

$$\omega' = -\frac{3}{2} \sqrt{Gm} r^{-\frac{5}{2}}.$$

De wet van impulsbehoud geeft na differentiatie naar r :

$$\Omega'_A = -\frac{\mu}{2I_A} \sqrt{Gm} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Dit ingevuld in de ongelijkheid (7) levert de conditie:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} = 3 \frac{\mu}{I_A} \frac{\lambda_m}{\lambda_d} r^{-2} < 1,$$

en dat is werkelijk het geval (zie opgave 6).

Twee andere dubbelplaneten nader bekeken

Een en dezelfde formule (1) kan heel verschillende scenario's voor een dubbelplaneet tot gevolg hebben.

Mars en Phobos De planeet Mars heeft twee manen *Phobos* en *Deimos* oftewel *vrees* en *verschrikking*. Wij kijken hier naar de dubbelplaneet Mars-Phobos.

Mars draait langzamer om zijn eigen as dan zijn maan Phobos om hem heen draait. Dat betekent dat de hoeksnelheid van Mars Ω_M en de hoekssnelheid van Phobos Ω_P wel in dezelfde richting wijzen, maar dat geldt: $\Omega_M < \Omega_P$. De getijdewerking zorgt er dan voor dat Ω_M toeneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

Opgave 5

Laat zien dat $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2$.

Opgave 6

- Gebruik de data in de tabellen om te laten zien dat bij aarde-maan werkelijk aan dit criterium is voldaan.
- Wat gebeurt er als aarde en maan dicht bij elkaar zouden staan?

Opgave 7

Vind een variant van het argument uit de tekst die rekening houdt met het feit dat de banen van Neptunus en Triton in vlakken liggen die een hoek van 23° met elkaar maken.

tijdseenheid	tijd
siderische dag	86164,1 seconde
siderische maand	27,32166 dag
siderisch jaar	365,2564 dag
synodische maand	29,530589 dag
synodische dag	1 dag = 24 h

Tabel 2 Tijdseenheden

afstand aarde-maan	$3,8440 \cdot 10^5$ km
toename per jaar	3,82 cm
excentriciteit maanbaan	0,05490

Tabel 3 Betrekkingen tussen aarde en maan

wordt met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot de identiteit:

$$J = \mu (G(m_M + m_P)r)^{\frac{1}{2}} + I_M \Omega_M + I_P \Omega_P.$$

We zien dus dat het impulsmoment alleen kan worden behouden als met toenemende Ω_M de afstand r afneemt. Mars en Phobos gaan dus langzaam naar elkaar toe totdat Phobos op Mars te pletter slaat.

Neptunus en Triton Triton is met afstand de grootste van 13 bekende manen van Neptunus. De kleinste drie van deze manen zijn pas sinds 2004 bekend en de allerkleinste heeft een doorsnede van maar 54 km. Triton is de langst bekende maan van Neptunus, waarvan het bestaan al een maand na de ontdekking van de planeet (1846) werd bevestigd. Pas in 1949 werd door de Amerikaanse astronoom van Nederlandse afkomst Gerard Kuiper (1905-1973) de tweede maan Nereïde ontdekt. In de Griekse mythologie was Triton de oudste zoon van Poseïdon die in de Romeinse mythologie Neptunus werd genoemd.

Bijzonder aan de dubbelplaneet Neptunus-Triton is dat Neptunus om zijn eigen as draait maar tegelijkertijd draait zijn maan Triton tegen de draaiing van Neptunus in: Triton beweegt *retrograde* om Neptunus heen. Triton heeft, als enige grote maan in ons zonnestelsel, zo'n retrograde baan. Daarnaast heeft de baan

van Triton een opmerkelijk grote hoek (23°) ten opzichte van de evenaar van Neptunus. Hieruit concludeert men dat Triton niet is ontstaan rond Neptunus, maar later is ingevangen door Neptunus. Het lijkt dan ook goed mogelijk dat Triton vroeger deel uitmaakte van de zogenaamde Kuipergordel, een gordel van vele miljarden komeetachtige, uit rots en ijs bestaande objecten, voorbij de baan van Neptunus, de achtste planeet van ons zonnestelsel.

Ook bewegen Neptunus en Triton niet in hetzelfde vlak, al gaan we dit hier voor het gemak wel aannemen. Het is niet moeilijk het argument te nuanceren met de toevoeging dat de banen in een hoek van 23° staan.

De retrograde beweging betekent dat de hoeksnelheid van Neptunus Ω_N en de hoeksnelheid van Triton Ω_T in tegengestelde richting wijzen. De getijdewerking zorgt er ook hier voor dat Ω_N afneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

wordt dan met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot:

$$J = -\mu (G(m_N + m_T)r)^{\frac{1}{2}} + I_N \Omega_N + I_T \Omega_T.$$

Het behoud van impulsmoment zegt ons nu dat als Ω_T afneemt de afstand r eveneens af moet nemen. Dus ook Triton zal steeds dichterbij Neptunus komen totdat hij zo dichtbij komt dat hij door de getijden uiteen wordt getrokken nadat hij de zogenaamde *Rochelimit* heeft bereikt. Triton zal naar verwachting binnen honderd miljoen jaar op Neptunus neerstorten. $\leftarrow$

Verantwoording

Deze bijdrage komt voort uit de samenwerking van het *Regionale Steunpunt Wiskunde D* in Nijmegen met Jan Kuijpers, hoogleraar astrofysica en decaan aan de Radboud Universiteit, en een kerngroep van negen wiskundeleraars: Mark van den Aarsen, Hanneke Abbenhuis, Herman Alink, Leon van den Broek, Bart Jordens, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Richard Klein Breteler en Jos Winkel. Ook op de universiteiten van Delft, Eindhoven en Twente is voor een soortgelijke aanpak gekozen (zie [7]).

Referenties

- 1 E. Halley (1695). 'Some account of the ancient state of the city of Palmyra, with short remarks upon the inscriptions found there', *Philosophical Transactions*, XIX:160-175.
- 2 E. Halley (1693). 'Emendationes ac notae in vetustas albatēnii observationes astronomicas', *Philosophical Transactions*, XVII:913-921.
- 3 U. Uffrecht & T. Poppe (2002). *Himmelsmechanik und Raumfahrt*, Klett Verlag, Stuttgart Düsseldorf Leipzig.
- 4 F. Verbunt (2001). 'Van Halley tot lunar ranging', *Zenit*, april, 180-186.
- 5 F. Verbunt (2001). 'VLBI, zonsverduisteringen, schelpjes en modder', *Zenit*, juni, 290-297.
- 6 F. Verbunt (2002). *The Earth and Moon: from Halley to lunar ranging and shells*, www.astro.uu.nl/~verbunt/onderzoek/earth.pdf.
- 7 T(R)U's, samenwerking van de *regionale Wiskunde D steunpunten* aan de universiteit en Delft, Eindhoven, Twente en Nijmegen, www.wiskundeDsteun.nl.
- 8 *Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs*, cT-WO, ministeriële vernieuwingscommissie wiskunde, www.ctwo.nl.