Esther Bod
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 33508 TA Utrecht
e.bod@students.uu.nl

Onderwijs

De opgaven van de LIMO

Op 25 mei heeft de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO) voor de derde keer plaatsgevonden. De LIMO is een jaarlijkse wedstrijd voor teams van wiskundestudenten uit heel Nederland. Afgaande op de uitslag ervoeren de kandidaten de opgaven ook dit jaar weer als lastig. Hoe zagen de opgaven er uit?

Dit jaar was de LIMO in Utrecht. Er was een grote belangstelling vanuit het hele land: nadat vorige jaren respectievelijk zestien en zeventien teams hadden meegedaan, deden er nu drieëntwintig teams mee. In totaal waren er 92 deelnemers van zes verschillende universiteiten.

De eerste deelnemers arriveerden om 10.00 uur. Toen iedereen er om 10.30 was, hield Gunther Cornelissen een lezing over het tiende probleem van Hilbert. Hij liet zien hoe er in de geschiedenis is geprobeerd een algoritme te vinden dat van een willekeurige diophantische vergelijking kan bepalen of deze een oplossing in de gehele getallen heeft. Hierbij kwam zelfs Hilbert zelf aan het woord. Verder vertelde hij over het actuele onderzoek naar de vraag of bepaald kan worden of een vergelijking rationale oplossingen heeft. Op deze vraag is tot op heden nog geen antwoord gevonden.

Na de lezing moesten de deelnemers nog wachten tot het einde van de lunch totdat de wedstrijd daadwerkelijk begon. Drie uur lang kregen de teams in drieëntwintig verschillende zaaltjes de tijd om elf verschillende opgaven op te lossen. Alle opgaven, op één na, waren opgesteld door medewerkers van verschillende Nederlandse universiteiten. De laatste opgave was door een Belgische student bedacht. Na drie uur druk bezig te zijn geweest, gewapend met pen, papier en een opgavenboekje, moesten de teams hun pogingen tot antwoorden inleveren.

Toen de wedstrijd afgelopen was konden de deelnemers uitrusten en napraten tijdens de borrel. Ook konden ze hun antwoorden vergelijken met de uitwerkingen zoals die door de opgavenmakers waren opgesteld. Daarnaast was de borrel een goede gelegenheid om studenten van andere universiteiten, waaronder oude bekenden, te ontmoeten. Terwijl voor de deelnemers het be-

langrijkste deel achter de rug was, begon voor de nakijkers het werk pas: de ingeleverde antwoorden moesten nagekeken worden. Veel opgavenmakers keken hun eigen opgave na, maar een aantal opgaven werd nagekeken door daarvoor gestrikte vervangende nakijkers. Eén opgave is zelfs door een team van vier man nagekeken.

Nadat de deelnemers twee uur in spanning hadden moeten wachten, werden de winnaars tijdens de prijsuitreiking bekendgemaakt. De prijsuitreiking werd verzorgd door Erik van den Ban, die de spanning opbouwde door eerst een aantal statistieken te laten zien. Met een gemiddelde van 29 van de 110 punten, bleken de opgaven ook dit jaar weer erg uitdagend te zijn geweest. De best gemaakte opgave was de opgave van Klaas Landsman over Eulers benadering van π. Hiervoor werden in totaal 160 punten gehaald. Anderzijds, voor de getaltheoretische opgave van Arne Smeets haalden maar drie teams punten, in totaal 20 punten.

Op een gedeelde derde plaats eindigden de teams *Kasanova* en de *Hutspot Hooligans* van de Universiteit Utrecht en V_4 van de Universiteit Leiden. Vermeldenswaardig is dat V_4 bestond uit vier eerstejaars studenten. Beide teams hebben 45 punten gehaald. Als tweede is het team *Naamloos* van de Universiteit van Amsterdam geëindigd met 51 punten. De winnaar van de derde LIMO is $\aleph_4$, wederom van de Universiteit Leiden. Dit team, bestaande uit Joris Weimar, Birgit van Dalen, Joost Michielsen en Michiel Kosters, heeft de mooie score van 56 punten behaald. Hiermee hebben ze twee boeken over het werk van Euler en de wisselbeker gewonnen. De prijzen zijn beschikbaar gesteld door Hewitt.

De dag werd afgesloten met een diner in een Italiaans restaurant aan de Oudegracht, het centrum van het centrum van Utrecht. Al met al kan teruggekeken worden op een geslaagde dag en we hopen dan ook dat volgend jaar in Leiden weer veel deelnemers mee zullen doen.

De organisatie van de LIMO 2007 was in handen van Elke Ballemans, Esther Bod, Johan Konter, Sander Kupers en Johannes Steenstra.

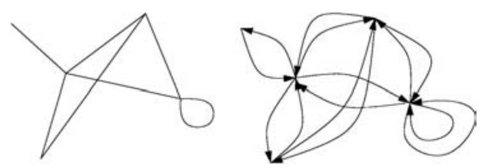
De opgaven

Hieronder volgen de opgaven: de oplossingen zijn te vinden op de internetpagina van LIMO 2007 (limo.a-eskwadraat.nl).

Opgave 1: Grafen en matrices

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

Stel dat X een eindige samenhangende graaf is met hoekpunten H en zijden Z. (Dus H is een eindige verzameling en Z een familie ongeordende paren hoekpunten. 'Samenhangend' betekent dat er voor elke twee hoekpunten $x, y \in H$ een reeks zijden $\{\{x_i, y_i\} \in Z\}_{i=0}^{n}$ bestaat met $x_0 = x, y_{i-1} = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ en $y_n = y$.) In deze graaf kunnen meervoudige zijden voorkomen, dat wil zeggen dat er meer dan één zijde tussen twee hoekpunten kan liggen. In de oorspronkelijke graaf zijn de zijden niet geörienteerd. Beschouw een nieuwe graaf X^+ die dezelfde hoekpuntenverzameling heeft als X, maar waarin elke (niet geörienteerde) zijde uit X vervangen wordt door twee (in elke mogelijke richting) geörienteerde zijden in X^+ (zie figuur 1 voor een voorbeeld). Als $e = (x, y)$ zo'n geörienteerde zijde is, noteer de corresponderende omgekeerde zijde als $\bar{e} = (y, x)$.



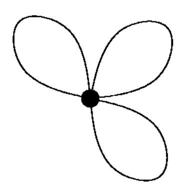
Figuur 1 Een graaf X (links) en de bijbehorende geörienteerde graaf X^+ (rechts)

Stel dat de oorspronkelijke graaf m (niet-geörienteerde) zijden heeft. We maken een $2m$-dimensionale reële vectorruimte V met als basis de geörienteerde zijden van X^+, en bekijken daarop een lineaire operator $T : V \to V$ die op deze basis gegeven is door

$$T(e) := \sum e'$$

waarbij de som loopt over alle geörienteerde zijden e' van X^+ zodat het eindpunt van e het beginpunt van e' is, maar $e' \neq \bar{e}$. (Je mag de zijden van X^+ nummeren als $e_1, \dots, e_{2m}$ en deze beschouwen als de standaard basisvectoren in $\mathbb{R}^{2m}$.) Het gaat ons om het bepalen van $K_X := \ker(I - T)$, waarbij I de identiteitsafbeelding is.

a) Bepaal $\dim K_X$ als X een graaf is met precies één hoekpunt dat met zichzelf verbonden is door $g > 0$ enkelvoudige lussen (zie figuur 2), als functie van g.



Figuur 2 Een graaf met één hoekpunt en g lussen

Stel nu dat c een gesloten lus is in een willekeurige eindige samenhangende graaf X. Dit betekent dat c gegeven is door een reeks geörienteerde zijden $(z_1 = (x_1, y_1), \ldots, z_n = (x_n, y_n))$ met $y_i = x_{i+1}$ voor $i = 1, ..., n-1$ en $y_n = x_1$. Stel

$$\varphi(c) := \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i.$$

b) Toon aan dat $\varphi(c) \in K_X$.

Opgave 2: Roosters kleuren
F.J. van de Bult, Universiteit van Amsterdam

Als we de punten van een een-dimensionaal rooster (de punten op een getallenlijn, d.w.z. $\mathbb{Z}$), kleuren met $2^1 = 2$ kleuren zodat de randpunten van elk lijnstukje tussen twee opvolgende punten verschillend gekleurd zijn, dan zien we dat we de punten om en om dezelfde kleur moeten geven; de even punten maken we bijvoorbeeld blauw en de oneven rood. Als we de kleuring dan over een afstand 2 verschuiven blijft hij hetzelfde; de kleuring is dus invariant onder een translatie.
a) Bekijk nu de kleuringen van de roosterpunten in het vlak (dus $\mathbb{Z}^2$) met $2^2 = 4$ kleuren zodanig dat de hoekpunten van elk eenheidsvierkantje verschillend gekleurd zijn. Bewijs dat deze kleuringen ook een (niet-triviale) translatiesymmetrie hebben.
b) Laat nu $n \geq 3$. Heeft iedere kleuring van $\mathbb{Z}^n$ met 2^n kleuren, zodanig dat de hoekpunten van iedere eenheidskubus verschillend gekleurd zijn, een niet-triviale translatiesymmetrie?

Vraag om thuis nog over na te denken: Bestaat er een translatiesymmetrie als we in het vlak niet een vierkant rooster nemen, maar een zeshoekig rooster (honingraat), dat we met 6 kleuren zodanig kleuren dat de hoekpunten van elke zeshoek steeds allemaal anders gekleurd zijn?

Opgave 3: Een eigenschap van Gram matrices
J.H. Brandts, Universiteit van Amsterdam

Voor een gegeven symmetrische reële $k \times k$ matrix N, schrijf
- $\alpha(N)$ voor het aantal negatieve entries strikt boven de hoofddiagonaal van N,
- $\beta(N)$ voor het aantal positieve kolomsommen van N.
Voorbeeld. Voor onderstaande matrix N,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

geldt dat $\alpha(N) = 3$ en $\beta(N) = 1$.

Laat nu n en k gehele getallen zijn met $1 \leq k \leq n$, en Q een $n \times k$ matrix met k lineair onafhankelijke kolommen $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}^n$. Voor $N = Q^*Q$ gaan we in het vervolg aantonen dat

$$\alpha(N) + \beta(N) \geq k.$$

Voor $k = 1$ is de bewering triviaal: $N = q_1^* q_1 = \|q_1\|^2$ is een 1×1 matrix met positieve entries, want $q_1 \neq 0$, en dus met positieve kolomsom $\beta(N) = 1$. Ter verdere illustratie bekijken we nu het geval $2 = k \leq n$.
a) Bewijs dat de som van de vier entries van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.
b) Bewijs met behulp van het resultaat van (a) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq 2$.
Laat nu $2 \leq k \leq n$.
c) Bewijs dat de som van alle entries van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.
d) Bewijs met behulp van (a), (b) en (c) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq k$.

Opgave 4: Inverteren door interpoleren?
H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Bestaat er voor elke eindige verzameling V van positieve gehele getallen een polynoom f met gehele coëfficiënten zodanig dat $f(1/n) = n$ voor elke $n \in V$? Bewijs de correctheid van het gegeven antwoord.

Opgave 5: Wandelen langs gekleurde grafen
R. Tijdeman, Universiteit Leiden

We beschouwen m punten waarbij elk paar punten verbonden is door een rode of een blauwe boog (een volledige graaf op m punten waarbij elke kant de kleur rood of blauw heeft). Een *cykel* van lengte k is een stel van k verschillende punten $A_1, \ldots, A_k$ met bijbehorende bogen $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$; notatie $(A_1, \ldots, A_k)$. Laat $m(k)$ het kleinste getal m noteren waarvoor geldt dat we voor m punten zeker zijn van het bestaan van een cykel van lengte $\geq k$ waarvan alle bogen dezelfde kleur hebben, welke kleuring ook gekozen wordt.
a) Bewijs dat $m(4) > 5$.
b) Bewijs dat $m(4) \leq 6$.
c) Bewijs dat $m(k+2) \leq m(k) + 2k + 2$ voor $k \geq 4$.
d) Bewijs dat $m(2k) < 2k^2$ voor $k \geq 2$.

Opgave 6: Flip It
J. Top, Rijksuniversiteit Groningen

Op diverse mobiele telefoons en internet sites kan je een spelletje vinden met de naam *FlipIt*. Een wiskundige beschrijving ervan gaat als volgt. Een netwerk is een paar (S, T) waarbij S een niet-lege, eindige verzameling is, en T een verzameling ongeordende paren $\{s_1, s_2\}$ met $s_1, s_2 \in S$ en $s_1 \neq s_2$. Voor een $s \in S$ heten de $t \in S$ met $\{s, t\} \in T$ de buren van s.

Bij *FlipIt* hebben we zo'n netwerk (S, T), waarbij bovendien alle elementen van S een kleur (wit of zwart) hebben. Bij het begin van het spel hebben alle elementen de kleur zwart, en het is de bedoeling dat aan het eind van het spel alle elementen de kleur wit hebben. Daartoe doet de speler 'zetten': een zet bestaat uit het aanwijzen van een element $s \in S$. Door dit aanwijzen verandert s, en ook alle buren van s, van kleur.

Bewijs, dat voor ieder netwerk (S, T) dit spel een oplossing heeft.

Opgave 7: Voor de hand liggend, maar niet gemakkelijk
R.W.J. Meester, Vrije Universiteit

Laat X een stochastische grootheid zijn met een binomiale verdeling met parameters k en p, dat wil zeggen

$$P(X = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i},$$

voor $i = 0, 1, \ldots, k$. De stochastische grootheid Y is ook binomiaal verdeeld, met parameters k en q, dat wil zeggen

$$P(Y = j) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j},$$

voor $j = 0, 1, \ldots, k$. Laat zien dat wanneer $p \leq q$, voor alle $m \leq n \leq k$ geldt dat

$$P(X \geq n | X \geq m) \leq P(Y \geq n | Y \geq m).$$

Opgave 8: Uniciteit van de LU decompositie
C. Vuik, Technische Universiteit Delft

We nemen aan dat $n \in \mathbb{N}$.
Definitie. De verzameling $\mathbb{L}$ wordt gegeven door:

$$\mathbb{L} = \{L \in \mathbb{R}^{n \times n} | L_{i,i} = 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq n \text{ en } L_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Definitie. De verzameling $\mathbb{U}$ wordt gegeven door:

$$\mathbb{U} = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} | U_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

Gegeven is de niet-singuliere matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Een matrix heet singulier dan en slechts dan als deze niet inverteerbaar is. Verder bestaat er een $L \in \mathbb{L}$ en een $U \in \mathbb{U}$ zodat

$$A = LU.$$

Toon aan dat L en U uniek zijn.

Opgave 9: Eulers benadering van π
N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Leonhard Euler (1707–1783) werd dit jaar driehonderd jaar geleden geboren. Daarom is 2007 tot 'Euler-jaar' uitgeroepen. In deze opgave, waarin we navolgen hoe Euler π benaderde, zien we hem op een typerende manier aan het werk. Alle deelopgaven kunnen gemaakt worden zonder de vorige opgelost te hebben.

Euler kende de door James Gregory (1638–1675) ontdekte reeksontwikkeling

$$\arctan x \equiv \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{1}$$

a) Leid deze reeks af als een Taylorreeks rond 0.

In eerste instantie vulde Euler de waarde $x = 1$ in (1) in. Hij herontdekte zo de benadering van Leibniz (1646–1716) voor π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Deze reeks convergeert echter slecht: de eerste decimaal is pas goed na 300 termen. Euler loste dit probleem als volgt op.
b) Laat zien dat (voor alle a en b waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$a - b = \arctan\left(\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\right).$$

Leid hieruit af dat (voor alle w, x, y, z waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \arctan\left(\frac{xw - yz}{yw + xz}\right).$$

c) Leid hier vervolgens door slimme keuzes van w, x, y, z uit af dat:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right);$$
$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right);$$
$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{2}{11}\right);$$
$$\arctan\left(\frac{2}{11}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{3}{79}\right).$$

d) Leid hieruit Eulers opmerkelijke formule voor π af:

$$\pi = 20 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 8 \arctan\left(\frac{3}{79}\right). \tag{2}$$

e) Vul nu zes termen van de reeksontwikkeling (1) in (2) in (er komen dan dus in totaal twaalf termen) en benader op die manier π numeriek. Hoeveel decimalen komen zo goed uit? Let op: het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

N.B. Euler vond naar eigen zeggen de eerste 20 decimalen van π in een uurtje rekenen, zonder rekenmachine!

Opgave 10: Stelsel met een singuliere matrix oplossen
M.A. Botchev, Universiteit Twente

Gegeven is een lineair stelsel vergelijkingen

$$Ax = b, \qquad A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x,\ b \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

waar A een gegeven reële symmetrische matrix is, b een gegeven rechterlid vector is en x een te bepalen vector is. De matrix A is singulier en het is bekend dat

$$Av = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \alpha c, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \neq c \in \mathbb{R}^n,$$

waar c een bekende vector is.
a) Geef een vergelijking voor A, b en c, zonder variabelen zoals x, waaraan A, b en c voldoen dan en slechts dan als stelsel (3) oplossingen heeft.
b) Stel dat (3) oplossingen heeft. Geef een stelsel

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \qquad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x,\ \tilde{b} \in \mathbb{R}^n,$$

zodat de matrix $\tilde{A}$ niet-singulier is en de vector $x = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$ een oplossing van (3) is.

Opgave 11: Het ene verschil is het andere niet
A. Smeets, Universiteit Leuven

Zij n een natuurlijk getal, zij p een priemgetal en zij d een deler van het getal $(n+1)^p - n^p$. Bewijs dat $d - 1$ deelbaar is door p.

Subsidiënten
LIMO 2007 werd mede mogelijk gemaakt door Hewitt, Zanders, Deloitte, Optiver, Thales, Universiteit Twente, Universiteit Utrecht, NWO, KWG, KNAW, MRI en het Stieltjes instituut.