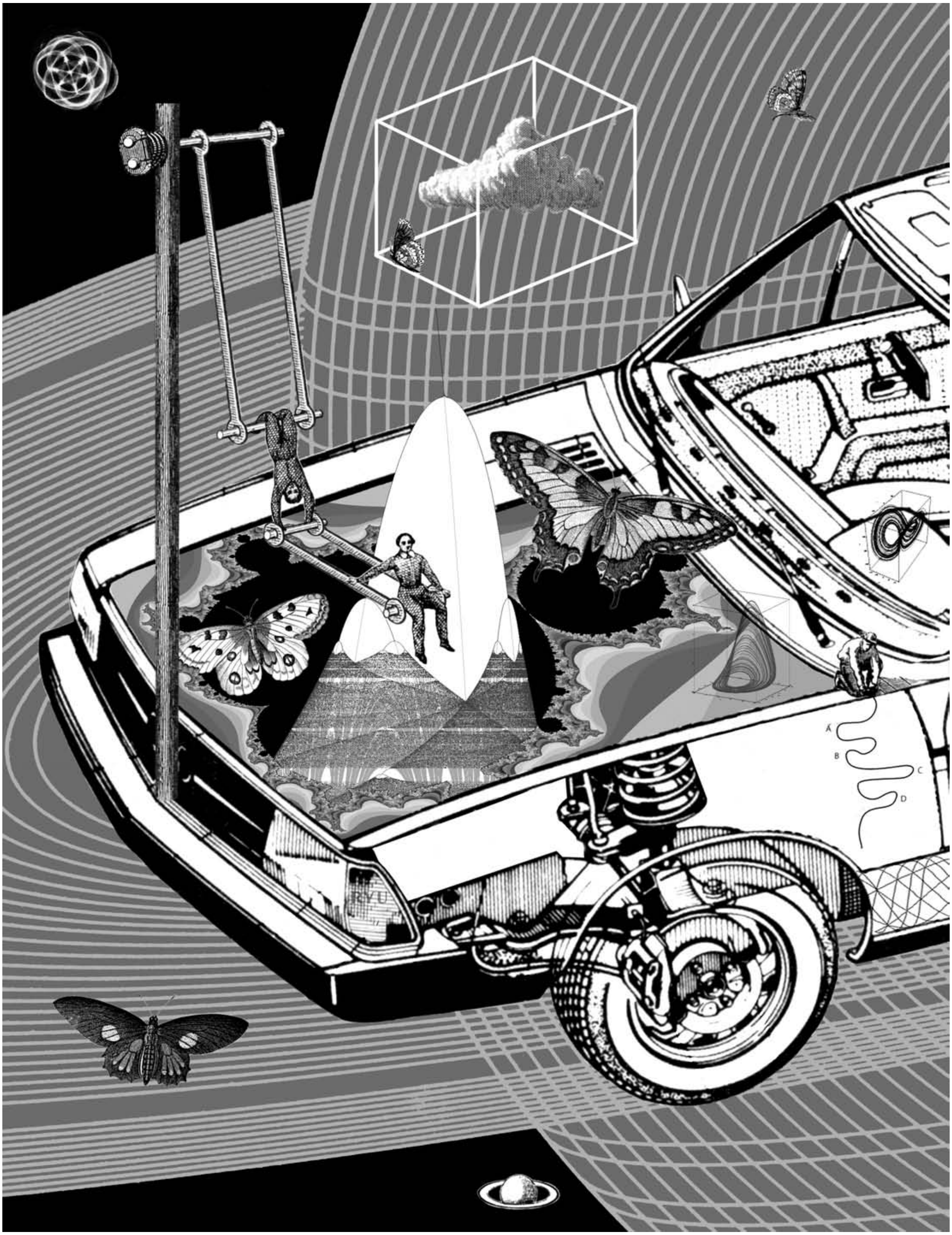


Illustratie: Ryu Tajiri

Elwin Savelsbergh
Freudenthal Instituut voor Didactiek
van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht
e.r.savelsbergh@phys.uu.nl

Onderwijs Dynamisch modelleren

Aanzet tot een curriculum

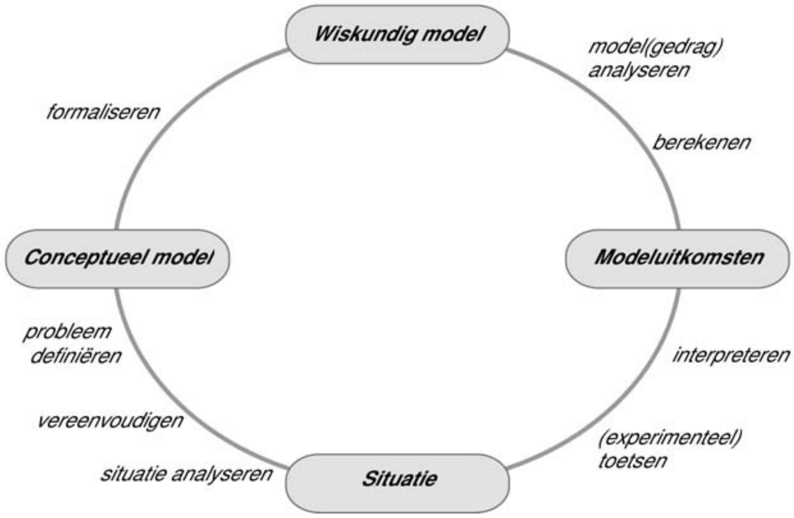
Bij het wiskundig modelleren komen wiskunde en andere wetenschappelijke disciplines samen. In de toekomstplannen voor de natuurprofielen van het havo en het vwo heeft het modelleren van dynamische systemen een prominente plaats; bij de nieuw geplande vakken wiskunde-D en Natuur, Leven en Technologie (NLT) wordt er zelfs een heel cursusonderdeel aan gewijd. Elwin Savelsbergh is als natuurkundige in de onderwijskunde gepromoveerd en werkt mee aan de ontwikkeling van NLT. Vanuit de opvatting dat wiskundig en natuurwetenschappelijk modelleren nauw met elkaar verbonden zijn, schetst hij een aanzet tot een 'modelleercurriculum' voor het voortgezet onderwijs. Het leren herkennen van situaties waar dynamische modellen een rol spelen, het leren opstellen van modellen en het interpreteren van modeluitkomsten in het licht van het gestelde probleem zijn daarin belangrijker dan het analytisch leren oplossen van geselecteerde typen differentiaalvergelijkingen. Hierin onderscheidt zijn opvatting zich van die van het ontwerpvoorstel voor wiskunde D van Swier Garst en Mark Peletier, zoals besproken aan het eind van dit artikel.

In sommige deelgebieden van de wiskunde lijkt de tastbare werkelijkheid ver weg. Dat geldt niet voor het modelleren van dynamische systemen, een tak van de wiskunde die in de loop van de twintigste eeuw tot grote bloei gekomen is in samenhang met de voortgaande kwantificering van de empirische wetenschappen en de opkomst van numerieke technieken.

Deze ontwikkeling heeft het aanzien van wetenschap en techniek sterk veranderd. De voorspelbaarheid van allerlei fysische, chemische en biologische processen is sterk toegenomen. Zeker in de biologie heeft de modelmatige benadering bijgedragen aan een voortgezette mechanisering van het wereldbeeld. Dat wil echter niet zeggen dat alles voorspelbaar wordt: ook in veel deterministische modellen blijkt de voorspelbaarheid van het gedrag fundamenteel beperkt te zijn. Dit soort inzichten heeft ook buiten de wetenschap zijn weerslag, bijvoorbeeld in politieke en maatschappelijke discussies over economie, klimaat of natuurbeheer. Het gaat dan vaak om modellen van dynamische systemen, die gebruikt worden om toekomstige ontwikkelingen te voorspellen of om de effecten van voorgestelde ingrepen te onderzoeken. Zowel vanuit een beroepskeuzeperspectief als vanuit een burgerschapsperspectief, is het daarom van belang dat bèta-leerlingen in het voortgezet onderwijs enig zicht krijgen op de mogelijkheden en de beperkingen van het modelleren van dynamische systemen.

Modelleren in het voortgezet onderwijs

In de curriculumvernieuwingsplannen voor wiskunde, natuurkunde en biologie valt regelmatig de term 'modelleren'. In het visiedocument van de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (CTWO) maar liefst 15 keer, en dat is vaker dan bekende begrippen als bewijzen, redeneren, of abstraheren. Ook in de nieuwe 'profiel-verdiepende keuzevakken' Wiskunde D en Natuur, Leven en Technologie (NLT) wordt ruim aandacht besteed aan modelleren. Wiskunde D wordt een verdiepend wiskundevak, waarbij in de vwo-variant 80 tot 120 studielast-uur beschikbaar is voor het domein 'dynamische modellen'. NLT wordt een 'geïntegreerd bètavak, over onderwerpen op de grensvlakken van de disciplines biologie, natuurkunde, fysische geografie, scheikunde en wiskunde', dat door docenten uit de genoemde disciplines in onderlinge samenwerking onderwezen wordt. Scholen hebben een grote keuzevrijheid bij de invulling van NLT, maar onder verantwoordelijkheid van de stuurgroep NLT wordt zowel voor het havo voor het vwo tenminste één module van 40 uur over 'dynamisch modelleren' ontwikkeld. Binnen het programma is ruimte voor verdere modulen over dit onderwerp. In de scheikundeplannen ontbreekt modelleren opvallend genoeg, afgezien van een enkele verwijzing naar 'molecular modelling'. Bij het schrijven



Figuur 1 Modelleren als iteratief proces

van dit artikel heb ik als praktisch richtsnoer een interdisciplinaire module van ongeveer 40 studielasturen in de tweede helft van 5 vwo in gedachten. Verschillende onderdelen uit dit verhaal zouden echter ook een plaats kunnen krijgen binnen de mono-vakken of in een ander leerjaar.

Liaison van wiskunde en natuurwetenschap

Blijkbaar wordt modelleren belangrijk gevonden. De vraag is dan wat daar onder verstaan wordt. Het CTWO-visiedocument zegt daarover:

"Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Visualiseren, schematiseren en representeren maken hiervan in belangrijke mate deel uit. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen. Door de noodzaak om zelf variabelen te benoemen en verbanden wiskundig te formuleren worden algebraïseren en 'symbol sense' ontwikkeld." (p. 25)

De beschrijving laat nog in het midden welke problemen opgelost gaan worden, maar het is wel duidelijk dat dit gebeurt met wiskundige middelen. In de visie van de commissie Nieuwe Natuurkunde wordt het anders geformuleerd:

"Een belangrijke taak van het natuurkundeonderwijs is leerlingen het inzicht te verschaffen dat de natuurkunde werkt met een model als hanteerbare representatie van de werkelijkheid. De taal van de wiskunde dient om het model te beschrijven. De toetssteen voor het model is het experiment; een goed bedacht en uitgevoerd experiment bepaalt of het model voldoet" (Zie [8], pp. 33–34)

Hoewel er dus verschillende accenten gelegd worden, sluiten beide visies elkaar niet uit. Ze zijn veeleer complementair, en voor een goed begrip van de rol die modellen spelen in wetenschap, techniek en maatschappij zijn elementen uit beide nodig.

In de CTWO-visie worden wel problemen geanalyseerd en opgelost met wiskundige modellen, maar die problemen zullen ergens betrekking op moeten hebben. Wat in de CTWO-visie impliciet blijft is de verwijzing naar de werkelijkheid. Vanuit natuurwetenschappelijk perspectief begint modelleren bij het stellen van een vraag over de werkelijkheid. Zo'n vraag wordt afgebakend en gespecificeerd tot een probleem dat de verdere modelontwikkeling stuurt, en daarvoor is domeinkennis nodig. In een later stadium vereist de evaluatie van het model toetsing aan de werkelijkheid, en tenslotte levert het model nieuwe kennis op over het onderzochte fenomeen. Deze nieuwe kennis kan aanleiding geven tot vervolgvragen en betere modellen; en zodoende tot een voortgaand proces van modelverbetering en kennisontwikkeling, zoals weergegeven in figuur 1.

De wiskunde speelt overal in dit proces een rol, maar vooral de bovenste helft van de cyclus zou aangeduid kunnen worden met de term 'wiskundig modelleren'. Zoals het plaatje illustreert, vindt dat wiskundige model zijn voedingsbodem in een werkelijke situatie. Het wiskundig modelleren kan weliswaar het oorspronkelijke (natuurwetenschappelijke) probleem tijdelijk ontstijgen, maar wil het model toetsbaar zijn, dan moeten de modeluitkomsten uiteindelijk terug verwijzen naar een werkelijkheid. Zonder die verwijzing is er in de natuurwetenschappelijke betekenis van het woord geen sprake van een model.

De verwijzing naar de werkelijkheid kan op concreet niveau nog heel verschillend ingevuld worden. Voor een biologisch probleem ziet deze er vaak anders uit dan voor een fysisch probleem. De mechanica biedt een prototypisch voorbeeld van fysisch modelleren: alle relevante wetten zijn bekend; die wetten kunnen we gebruiken om bottom-up het gedrag van steeds complexere systemen te onderzoeken en daar nauwkeurige, experimenteel toetsbare, voorspellingen over te doen, bijvoorbeeld over de vlucht van een (water)raket. Daartegenover biedt de ecologie een typerend voorbeeld van de situatie in de biologie: niet alle relevante gegevens zijn bekend en de dekking van het model met de werkelijkheid is een voortdurend discussiepunt. De interesse gaat dan ook vaak niet zozeer uit naar kwantitatieve modeluitkomsten, maar vooral naar kwalitatief gedrag. De modelvoorspellingen zijn vaak niet — op korte termijn — experimenteel toetsbaar.

Om in het onderwijs een valide beeld te geven van het gebied van dynamische modellen moeten in de behandelde contexten de verschillende typen modelleerproblemen herkenbaar zijn. Daarnaast zijn bij de keuze voor contexten ook didactische eisen van belang: de behandelde contexten moeten voldoende complex zijn om aanleiding te geven tot een proces van voortgaande modelontwikkeling, maar anderzijds voldoende aansluiten bij de voorkennis van leerlingen om hen in staat te stellen zelf bij te dragen aan het modelleerproces.

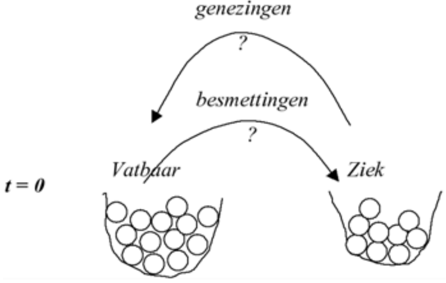
Modelvorming en modelanalyse

Al in de onderbouw hebben leerlingen geleerd dat een model een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid is. Deze gedachte is nog niet uitgewerkt tot een bruikbaar modelbegrip: bij doorvragen denken leerlingen aan schaalmodellen waarin onbelangrijke details weggelaten zijn. Bij het voorspellen van weer of klimaat denken leerlingen aan het doortrekken van een lijn door de historische gegevens. Het onderwijs over dynamisch modelleren zou moeten leiden tot een meer wetenschappelijk modelbegrip, waarin op grond van een verondersteld werkingsmechanisme modelregels worden geformuleerd, waaruit vervolgens toetsbare verwachtingen worden afgeleid. Om dit te bereiken is het nodig expliciet aandacht te besteden aan het formuleren van zo'n werkingsmechanisme, de vertaling naar modelregels en het toetsen van de modeluitkomsten aan de werkelijkheid. Om daarvoor de toon te zetten moeten we, juist in het aanvankelijk onderwijs, verschijnselen behandelen waarbij leerlingen voldoende beeld hebben van het werkingsmechanisme om dit te kunnen formuleren en voldoende beeld hebben van het fenomeen om de modeluitkomsten kritisch te beoordelen.

Een goed voorbeeld biedt het verloop van een griep-epidemie: de meest opvallende toestanden zijn direct duidelijk, evenals de belangrijkste veranderingsprocessen (besmetting, genezing). Leerlingen hebben voldoende kennis van het verschijnsel om te zien dat dit een onvolledige weergave is en ze zijn in staat zinvolle schattingen te maken voor de benodigde parameters. Een eerste model zou kunnen luiden:

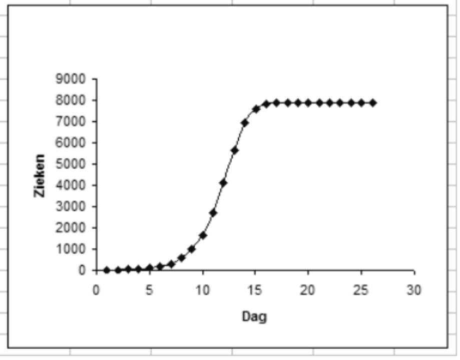
- er zijn twee groepen mensen: zieke en gezonde;
- een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen;
- als een zieke een gezonde ontmoet dan bedraagt de kans dat deze de volgende dag ziek is 0.2;
- een ziek persoon ontmoet gemiddeld 5 mensen per dag.

Hoewel voor de meeste leerlingen niet direct inzichtelijk is hoe dit model zich zal gedragen, kunnen ze dit met enige ondersteuning wel beredeneren. De voorgaande beschrijving benadrukt de lotgevallen van individuen en het vraagt een vertaalslag om van daar uit te komen tot het aantal genezingen of besmettingen per tijdseenheid. De weergave in figuur 2 vestigt de aandacht op de relevante toestandsgrootheden (vatbaar en ziek) en laat direct zien welke veranderingsprocessen van belang zijn zijn en waar dus rekenregels moeten worden ingevuld.



Figuur 2 Een eenvoudig griepmodel: toestandsvariabelen en veranderingsprocessen

	A	B	C	D	E
1	Dag	**Vatbaar**	besmettingen	**Ziek**	genezingen
2	1	9900	9.9	10	2
3	2	9892.1	17.706859	17.9	3.58
4	3	9877.97	31.6360453	32	6.4053718
5	4	9852.74	56.4143722	57.3	11.451506
6	5	9807.78	100.2555136	102	20.44408
7	6	9727.97	177.0799869	182	36.406366
8	7	9587.29	309.3872227	323	64.541091
9	8	9342.45	530.2321404	568	113.51032
10	9	8925.73	878.5355334	984	196.85468
11	10	8244.05	1373.420312	1666	333.19085
12	11	7203.82	1949.485034	2706	541.23674
13	12	5795.57	2384.547045	4114	822.8864
14	13	4233.91	2403.205039	5676	1135.2185
15	14	2965.92	2059.558909	6944	1388.8158
16	15	2295.18	1747.737066	7615	1522.9644
17	16	2070.41	1623.113751	7840	1567.919



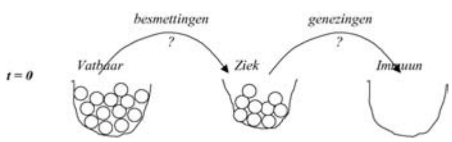
Figuur 3 Numerieke oplossing van het eenvoudige griepmodel

Deze weergave maakt duidelijk dat alle vatbaren, net als alle zieken, op een hoop gegooid worden, zonder rekening te houden met individuele kenmerken zoals plaats of voorgeschiedenis. Alleen onder die voorwaarde is de regel 'Een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen' equivalent met 'per dag geneest 0.2 x het aantal zieken'. Na het kwalitatief beredeneren van het gedrag ligt het voor de hand dit ook kwantitatief na te rekenen. Analytische oplossingen vallen buiten het bereik van de leerlingen, maar een computersimulatie, bijvoorbeeld met een spreadsheet is wel haalbaar (figuur 3).

Het eerste model levert duidelijk geen realistisch gedrag. Dit kan aanleiding zijn om een verbeterd model te ontwikkelen:

- er zijn drie groepen mensen: vatbare, zieke en immune;
- een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen, en is daarna immuun;
- als een zieke een vatbare ontmoet dan bedraagt de kans dat deze de volgende dag ziek is 0.2;
- een ziek persoon ontmoet gemiddeld 5 mensen per dag.

In beeld:



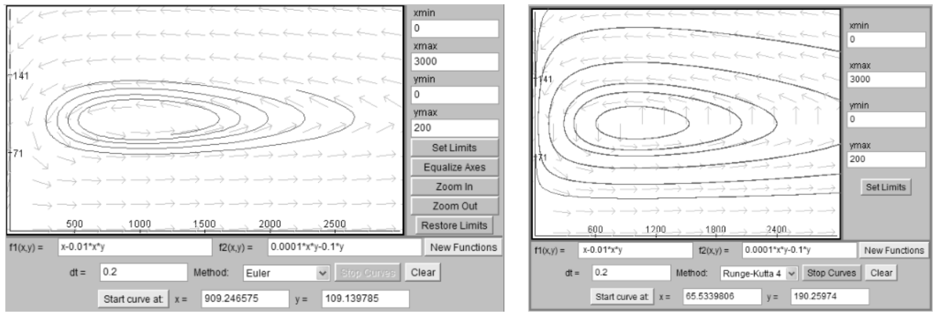
Figuur 4 Een verbeterd griepmodel: toestandsvariabelen en veranderingsprocessen

Het doorrekenen van dit model levert een herkenbare (griep)golf, al wordt bij vergelijking met echte metingen snel duidelijk dat het kwantitatieve verloop niet realistisch is; nog afgezien van het optreden van niet-geheeltallige aantallen patiënten. Het is duidelijk dat voor een bruikbare kwantitatieve voorspelling het model uitgebreid moet worden bijvoorbeeld met een incubatietijd, met mensen die wel besmet raken maar niet ziek worden, met het onderscheid tussen mensen met veel en weinig contacten etcetera. Toch levert nader wiskundig onderzoek aan dit model toetsbare nieuwe voorspellingen: hoe hoger de piek, hoe korter de epidemie duurt, en onder bepaalde omstandigheden kan groepsimmuniteit optreden.

De vorm van een recursieve betrekking, zoals in het beschreven voorbeeld, is nieuw voor leerlingen, die gewend zijn dat je in een gegeven formule de onbekenden invult en dan de bijbehorende uitkomst vindt. Vanuit natuurwetenschappelijk oogpunt wordt hier voor het eerst zichtbaar dat een begintoestand in combinatie met een aantal veranderingswetten als functie van de toestand de volledige ontwikkeling van een (fysisch, chemisch of biologisch) systeem kan vastleggen. Als de leerlingen tegen het eind van het onderwijs de draagwijdte van dit idee beginnen in te zien, is er iets wezenlijks bereikt.

Discreet versus continu

Van oudsher worden discrete en continue dynamische modellen gescheiden behandeld. In het huidige programma behoren discrete dynamische modellen tot de stof voor wiskunde A, terwijl continue modellen tot voor kort bij wiskunde B behandeld werden. Bij wiskunde A wordt de computer gebruikt om betrekkingen van de vorm $X_t = aX_{t-1} + b$ door te rekenen. Daarbij wordt als vanzelfsprekend met stapgrootte één gerekend. Het begrip stapgrootte speelt in de eindtermen dan ook geen rol. Ook bij wiskunde B speelde stapgrootte nauwelijks een rol: hier is volgens de eindtermen alleen sprake van differentiaalvergelijkingen. In de praktijk van het numeriek modelleren worden steeds discrete modellen gebruikt om continue systemen te beschrijven: de legitimatie daarvoor volgt uit het gedrag van het model in de limiet voor



Figuur 5 Een richtingveld-plot voor het Lotka-Volterramodel. De doorgetrokken lijnen geven het populatieverloop, links voor een enkele begintoestand met Euler-integratie en rechts voor een reeks begintoestanden met Runge-Kutta.

kleine tijdstap.

Hoewel de verspreiding van de griep op een continue tijd-as verloopt, werd in het eerdergenoemde model als vanzelfsprekend een discrete tijdstap van één dag gebruikt. Andere continue processen geven meer aanleiding om de keuze voor een geschikte tijdstap te thematiseren. Neem het proces van radioactief verval. De stralingsactiviteit van een radioactieve bron is recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid materiaal. Bij kortlevende isotopen is rechtstreeks te meten dat de waargenomen stralingsactiviteit, en dus ook de hoeveelheid radioactief materiaal, telkens na een vast tijdsinterval met de helft afgenomen is. De lengte van dit tijdsinterval is karakteristiek voor het isotoop waar je naar kijkt. Bij (zeer)langlevende isotopen ligt het moeilijker: de stralingsintensiteit verandert niet merkbaar over de duur van een mensenleven. De vraag is dan hoe je toch de halfwaardetijd van zo'n stof kunt bepalen op basis van een bekende beginhoeveelheid en een bijbehorende gemeten activiteit. Een eerste veronderstelling zou kunnen zijn dat de activiteit constant blijft totdat alle deeltjes op zijn. Leerlingen zien al snel dat dit een te korte halfwaardetijd oplevert, want als de hoeveelheid materiaal iets is afgenomen zal ook de activiteit en dus de verdere afnamesnelheid, iets gedaald zijn. Je moet dus een tussenberekening maken. Neem het volgende model:

- een atoom van de radioactieve stof X kan onder uitzending van een α-deeltje vervallen tot een atoom van de stabiele stof Y;
- de stralingsactiviteit A (aantal deeltjes per seconde) is recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid N van stof X (aantal atomen);
- op $t = 0$ is er een bekende hoeveelheid N van stof X;
- op $t = 0$ wordt een zekere stralingsactiviteit A (aantal deeltjes per seconde) gemeten.

Dit is voldoende om het benodigde rekenmodel op te stellen. Het is in het gekozen voorbeeld onbegonnen werk om voor iedere volgende seconde een tussenberekening te maken. Anderzijds, als je de tijdstap te groot kiest wordt de uitkomst onnauwkeurig en kunnen zelfs artefacten zoals negatieve hoeveelheden ontstaan. De vraag dringt zich op wat dan wel een goede stapgrootte is om een nauwkeurig antwoord te vinden. Deze context vraagt dus om een expliciete behandeling van het begrip 'tijdstap' in relatie tot de karakteristieke tijd van het proces.

Ook de vraag naar het limietgedrag voor $\Delta t \to 0$ volgt hier vanzelfsprekend uit het oorspronkelijke probleem. Het inzicht (en eventueel bewijs) dat de oplossingen in de limiet voor $\Delta t \to 0$ convergeren is met het zicht op het vervolg belangrijker dan het vinden van de bijbehorende analytische oplossing.

Hogere orde en niet-lineair

Als er alleen lineaire eerste-orde modellen zouden bestaan zou de draagwijdte van het dynamisch modelleren betrekkelijk gering zijn. Het gedrag van lineaire eerste-orde modellen biedt al snel geen verrassingen meer, en geeft weinig aanleiding tot kwalitatieve analyse. Bij het opstellen en numeriek doorrekenen van een model is er echter geen dwingende reden om je te beperken tot lineaire of eerste orde relaties. Hoewel er eindeloos veel variaties in modelgedrag mogelijk zijn, is het verhelderend te ervaren dat het gedrag van verreweg de meeste dynamische systemen te interpreteren is in termen van slechts enkele hoofdcategorieën, of combinaties daarvan:

- groei/krimp: eenparig; versneld; vertraagd; logistisch;
- traagheid: periodieke oscillatie; gedempte oscillatie;
- aandrijving (forcering): resonantie; chaotisch gedrag.

Waar het gaat om de voorspellende kracht van modellen, en de grenzen daaraan, is het van belang dat leerlingen kennismaken met deze verschillende typen modelgedrag.

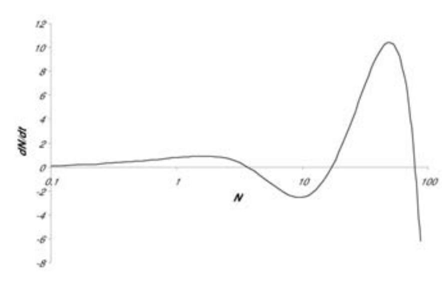
Vanuit fysisch oogpunt biedt de mechanica daarvoor een vanzelfsprekende inspiratiebron. Helaas is de Newtonmechanica voor leerlingen een voortdurende bron van begripsproblemen [1–3]. Mechanica ligt daarmee minder voor de hand als invoeringscontext. Biologische, en dan met name ecologische verschijnselen bieden een beter startpunt, met veranderingsregels die voor de leerlingen concreet voorstelbaar zijn.

Neem bijvoorbeeld de groei van een rupsenpopulatie, die bepaald wordt door voedselaanbod en predatie [5]. Bij lage dichtheden zal de groei evenredig zijn met de populatieomvang, bij hogere dichtheden neemt de groei af door voedselgebrek. Naarmate er meer rupsen komen worden ze zichtbaarder, en gaan de aanwezige vogels actief jacht op ze maken. Een vogel eet echter niet ongelimiteerd, dus de predatiekans nadert bij toenemende dichtheid tot een maximumwaarde. Dit model kan bijvoorbeeld als volgt geformaliseerd worden:

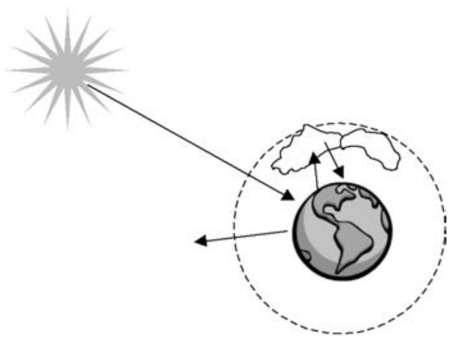
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha\frac{N^2}{1 + \beta N^2}$$

De eerste term aan de rechterkant representeert de groei van de rupsenpopulatie, met N het aantal rupsen, r een groeisnelheidsparameter, en K de maximale rupsenpopulatie die het gebied kan herbergen (draagkracht). De tweede term beschrijft de rupsensterfte door predatie, met α het maximum opeettempo bij hoge dichtheden en β een parameter die dichtheidsafhankelijkheid beschrijft.

De vraag is wat er gebeurt als het model op zeker moment start met een bepaalde waarde van N: wanneer gaat N groeien? wanneer neemt N af? etcetera Het is niet moeilijk dit model voor gegeven parameterwaarden met de computer door te rekenen, maar dat levert alleen één mogelijke modeluitkomst. Als je een aantal verschillende startwaarden voor N probeert vind je verschillende modeluitkom-



Figuur 6 De groei van de rupsenpopulatie als functie van de populatieomvang voor $r = 1.2$, $K = 100$, $\alpha = 0.4$ en $\beta = 0.02$



Figuur 7 Leerling-ideeën over elementen die de temperatuur op aarde bepalen

sten. Dit biedt een goede aanleiding tot kwalitatieve analyse, bijvoorbeeld door de nulpunten te zoeken in de grafiek van dN/dt als functie van N (figuur 6).

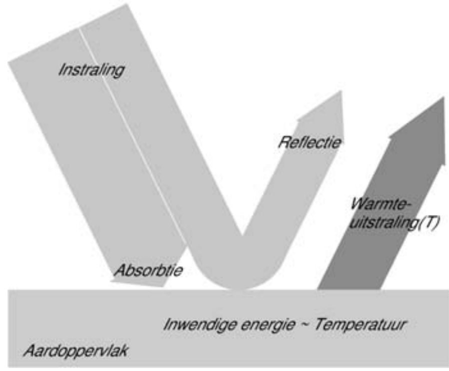
Anders dan de bekende modellen van Lotka-Volterra of van Verhulst, kent dit systeem bij de gegeven parameterwaarden vier evenwichten. Naast het, biologisch triviale, evenwicht bij $N = 0$, vinden we twee stabiele toestanden. Uit de biologische praktijk zijn meerdere voorbeelden van dit verschijnsel bekend, bijvoorbeeld de konijnenpopulatie in de Nederlandse duinen, die zich niet herstelt van de laatste VHS-epidemie; en de kabeljauwpopulatie in de Noordzee, die zich niet herstelt van overbevissing.

Ook oscillerende modellen worden in de biologie vanzelfsprekend geïntroduceerd, bijvoorbeeld in de vorm van het Lotka-Volterra model. Ook hier geldt het voordeel dat de toestandsgrootheden (prooi en predator) en de processen aanschouwelijk gedefinieerd zijn, en dat er geen grondig begrip van 2^e-orde afgeleide verondersteld wordt. Om het gedrag van dergelijke systemen (gekoppelde en hogere-orde differentiaalvergelijkingen) kwalitatief te onderzoeken is een enkelvoudige grafiek zoals in figuur 6 niet voldoende. Hier zou een richtingveld een waardevol gereedschap kunnen zijn. Er zijn diverse applets beschikbaar waarmee leerlingen eventueel ook zelf zo'n richtingveld kunnen construeren [7].

Bij het doorrekenen van een Lotka-Volterra model met Euler-integratie valt op dat de oplossing na verloop van tijd altijd opblaast. Het is voor leerlingen niet direct inzichtelijk dat dit gedrag niet besloten ligt in de modelregels, maar dat het voortkomt uit het integratieformalisme. De ecologische kennis van leerlingen schiet ook tekort om sterke verwachtingen te ontwikkelen over het gedrag dat wél zou moeten optreden. Hier ligt een overgang naar de mechanica voor de hand: het gedrag van een mechanische slinger is welbekend en biedt een goede aanleiding om de beperkingen van Euler-integratie te behandelen en om, zonder daar diep op in te gaan, een pragmatische oplossing te presenteren in de vorm van Runge-Kutta-integratie. Vervolgens kunnen de effecten van demping en eventueel aandrijving onderzocht worden.

Om niet de suggestie te wekken dat dynamische verschijnselen met vlijtig doormodelleren altijd volledig te voorspellen zijn mag tenslotte een kennismaking met chaotisch en irreversibel gedrag niet ontbreken. Dat betekent niet een grondige behandeling van de chaostheorie, maar wel een eerste kennismaking met een eenvoudig systeem dat chaotisch gedrag produceert. Omdat leerlingen geen directe ervaring hebben met dit soort verschijnselen zou het wenselijk zijn naast het chaotisch modelgedrag ook een 'werkelijke' demonstratie te zien. De Lorentzvlinder is dus minder geschikt omdat niet duidelijk is naar welke werkelijkheid het model verwijst. De chaotische slinger biedt wel een geschikt voorbeeld dat in de klas gedemonstreerd kan worden. Het zelf opstellen van een model hiervoor voert voor de meeste leerlingen te ver, maar leerlingen kunnen wel een gegeven model van dit systeem onderzoeken. In een module van 40 uur zal de beschikbare tijd hiermee gevuld zijn. De wiskundige opbrengst tot hier toe: de leerling heeft geleerd dat het gedrag van een dynamisch systeem vastligt als je de verandering kunt uitdrukken als functie van de toestand; hoe je de benodigde modelregels in formules kunt uitdrukken; hoe je, onder voorwaarden, het modelgedrag kunt vinden door numeriek te integreren; hoe betrekkelijk eenvoudige veranderingsfuncties kunnen leiden tot een scala aan modelgedragingen; en tenslotte dat het niet moeilijk is een model te maken dat woeste uitslagen vertoont, maar dat het vervolgens wel moeilijk kan zijn dit gedrag te interpreteren in termen van gebruikte modleregels en parameters.

Als er meer tijd beschikbaar is, zoals bij wiskunde D, dan biedt de hier geschetste module aanleiding om wiskundige vragen op te werpen die in een vervolgmodule diepgaander behandeld kunnen worden. De numerieke modeluitkomsten bij radioactief verval en de mechanische slinger doen sterk denken aan bekende functies (respectievelijk e-macht en sinus), zouden deze modellen misschien analytisch oplosbaar zijn? Het verwarrende gedrag van chaotische modellen zou aanleiding kunnen zijn voor een wiskundige reflectie op het belang van vereenvoudiging en linearisatie. Het artikel van Henk Broer elders in dit nummer biedt een prachtige aanzet tot een uitwerking in deze richting.



Figuur 8 De energiestromen van en naar het aardoppervlak. De breedte van de pijlen geeft de grootte van de energiestromen aan.

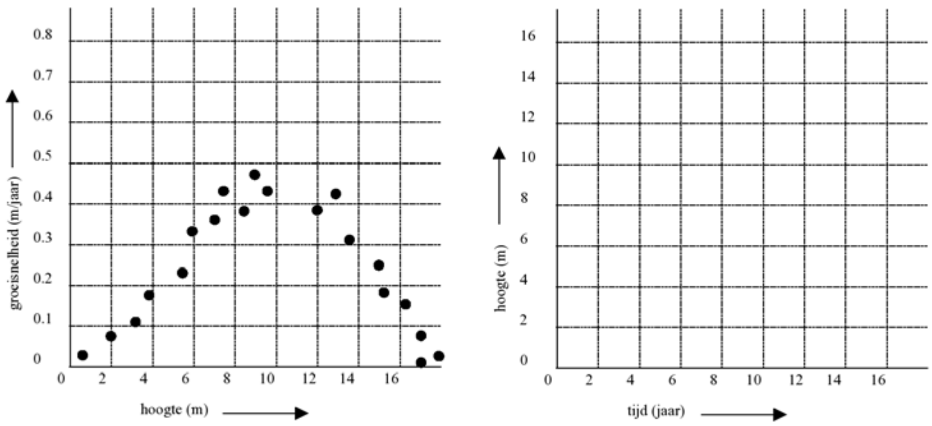
Een kwestie van representaties

Het oplossen van een modelleerprobleem vereist allereerst identificatie van het relevante systeem. Als een docent in een klassengesprek inventariseert welke elementen van belang zijn voor de temperatuur op aarde verschijnt er typisch een tekening als in figuur 7 op het bord.

Zo'n plaatje biedt nog nauwelijks ondersteuning voor het redeneren over de dynamiek van het systeem of voor de ontwikkeling van een wiskundig model. Het diagram in figuur 8 legt meer nadruk op de relevante grootheden. Bovendien komt in dit beeld beter tot uitdrukking dat de aarde opwarmt als de instraling groter is dan de uitstraling. Naarmate het oppervlak warmer wordt zal de warmteuitstraling toenemen. Het idee dat een evenwichtstemperatuur bereikt wordt ligt hier voor de hand.

Bij het ontwikkelen van een model maken we gebruik van een reeks representaties die steeds verschillende aspecten benadrukken. De betekenis van zo'n representatie wordt echter bepaald door conventies en wie de conventies niet kent ziet de betekenis niet. Het kost tijd om nieuwe conventies te leren gebruiken en het introduceren van nieuwe tools en representaties vraagt dus steeds een kosten-batenanalyse.

Dat geldt ook voor de uiteindelijke wiskundige modelbeschrijving. Voor een wiskundige geeft een (stelsel van) differentiaalvergelijking(en) een heldere en eenduidige beschrijving van een dynamisch model. Een leerling daarentegen ziet in een stelsel differentiaalvergelijkingen niet automatisch een dynamisch systeem. Er zijn dan ook allerlei aanvullende en alternatieve representaties ontwikkeld die bepaalde aspecten moeten verhelderen. Neem bijvoorbeeld de grafieken in figuur 9. In de linkergrafiek is de groeisnelheid van een boom uitgezet tegen de hoogte. De opdracht zou kunnen luiden om in de rech-

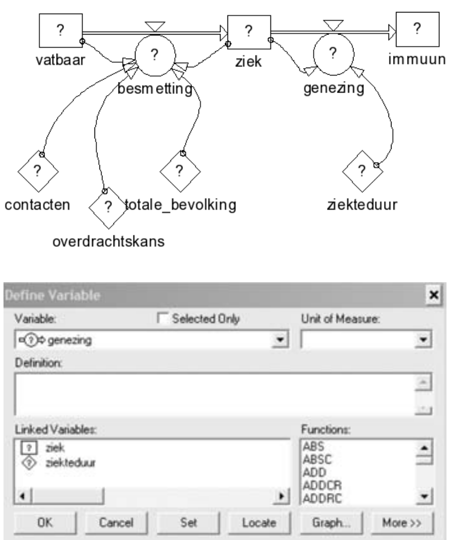


Figuur 9 Links: de groeisnelheid van een boom als functie van de hoogte. Rechts: de leerling wordt gevraagd om het groeiverloop van een boom tegen de tijd uit te zetten

tergrafiek het groeiverloop van een boom met een starthoogte van 50 cm te construeren.

Ook de diverse computertools die gebruikt worden om modellen door te rekenen zullen in hun modelweergave bepaalde aspecten benadrukken of juist verhullen. Het idee van de herhaalde bewerking wordt goed zichtbaar in een spreadsheet waar een iteratieslag wordt toegevoegd door de onderste regel te kopiëren. De modelstructuur en de gebruikte rekenregels zijn echter niet direct zichtbaar. In een 'tekstgebaseerd' computermodelleertool wordt het model beschreven door een serie (differentie)vergelijkingen. Figuur 12 toont het griepvoorbeeld in de syntax van het in het onderwijs veel gebruikte programma *Coach 5*.

De beginwaarden en constanten staan rechts; de berekeningen links worden herhaald uitgevoerd. Het idee van rekenen volgens vast recept springt hier op de voorgrond, maar de 'toestand' krijgt niet veel nadruk. Bovendien is het hier, zeker bij een wat groter model, in de reeks rekenregels lastig de conceptuele structuur te herkennen. Er zijn daarom verschillende modelleertools ontwikkeld waarbij de wiskundige formules verpakt worden in een grafische 'shell' die de conceptuele structuur moet verhelderen. In de NLT-module wordt geëxperimenteerd met een 'systeemdynamisch' modelleertool. De daar gebruikte weergave bouwt voort op het plaatje uit figuur 4. De grafische modelweergave van het griepmodel komt er dan uit te zien als in figuur 10.



Figuur 10 Een systeemdynamische modelweergave van het griepmodel (links) en het dialoogvenster voor de modelvariabele genezing (rechts)

De toestandsgrootheden en de veranderingsprocessen zijn duidelijk te herkennen, en bij iedere grootheid is aangegeven waar deze van afhankelijk is. Voordat het model kan rekenen moeten overal waar vraagtekens staan de rekenregels ingevuld worden: door dubbelklikken op bijvoorbeeld de variabele genezing verschijnt een dialoogvenster als onder in de figuur, waarin met behulp van de gelinkte variabelen *ziek* en *ziekteduur* de benodigde formule opgesteld kan worden. Als alle vraagtekens verdwenen zijn kan het model met een zelf te kiezen tijdstap doorgerekend worden (figuur 11).

Het aardige van een dergelijke modelweergave is dat het ontwerp op hoofdlijnen plenair besproken kan worden en dat leerlingen vervolgens een structuur hebben waarbinnen ze de rekenregels kunnen invullen. In de praktijk blijkt dat leerlingen met een dergelijk tool al snel eenvoudige modellen kunnen bouwen. Aan de andere kant geldt hier, net als bij de andere genoemde representaties, dat de leerling er niet altijd de betekenis in ziet die de ervaren gebruiker zou verwachten.

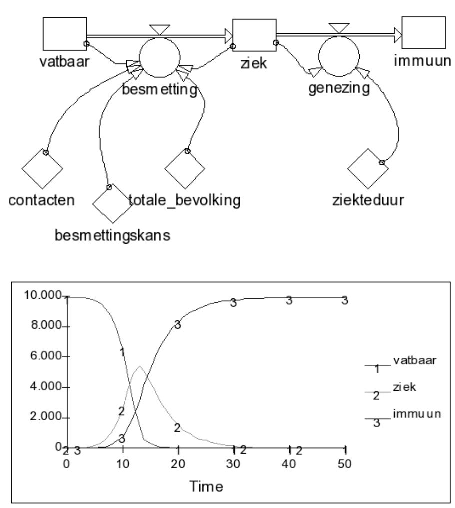
In de hier geschetste visie wordt intensief gebruik gemaakt van computermodelleertools en simulatieprogramma's. Dit is natuurlijk alleen wenselijk als dit bijdraagt tot de begripsvorming. In de woorden van de commissie CTWO: wel 'use to learn'en niet 'learn to use'. In de huidige context vind ik die tegenstelling niet altijd zo helder als ze lijkt: use to learn en learn to use staan niet altijd tegenover elkaar: het leren gebruiken van numerieke technieken behoort tot de leerdoelen, en het leren werken met de computer maakt daarvan onderdeel uit. In ieder geval is het computergebruik geen doel op zich, en in die zin is ook hier sprake van 'use to learn'.

Toetsing van leerresultaten

Toetsing speelt een sturende rol in het curriculum. Wat getoetst wordt krijgt meer gewicht, en bovendien stuurt de manier waarop een onderwerp getoetst wordt ook de manier van onderwijzen. Een valide examinering is dan ook een voorwaarde voor een succesvolle implementatie. Aan de andere kant is toetsing niet alleen maatgevend, en kunnen ook leerdoelen die niet hard getoetst kunnen worden bestaansrecht hebben.

Bij biologie en natuurkunde maakt computerondersteund modelleren sinds enkele jaren deel uit van de experimentele computerondersteunde examens (*compex*). De geplande algemene invoering van het compex in 2007 heeft ertoe geleid dat veel leraren zich actief in het onderwerp zijn gaan verdiepen en op zoek zijn gegaan naar nascholing. De invulling van 'modelleren' in deze examens is echter noodzakelijkerwijze beperkt: er worden gegeven modellen geëxploreerd en er worden kleine veranderingen aangebracht.

Een modelleerproces zoals bedoeld in dit artikel omvat een veel breder scala aan activiteiten. Dat proces vraagt creativiteit, reflectie, overleg en een behoorlijke hoeveelheid tijd. Ook een goede modelleerder kan in een impasse belanden en er moet gelegenheid zijn om daar productief mee om te gaan. Modelleervaardigheden lenen zich daarom vooral



Figuur 11 Het voltooide griepmodel met uitkomsten

voor toetsing in een open setting, zoals in een praktische opdracht of een profielwerkstuk. In het schoolexamen dus. Daar liggen ook mogelijkheden om de koppeling met experimenteel werk vorm te geven.

Conclusie en vooruitblik

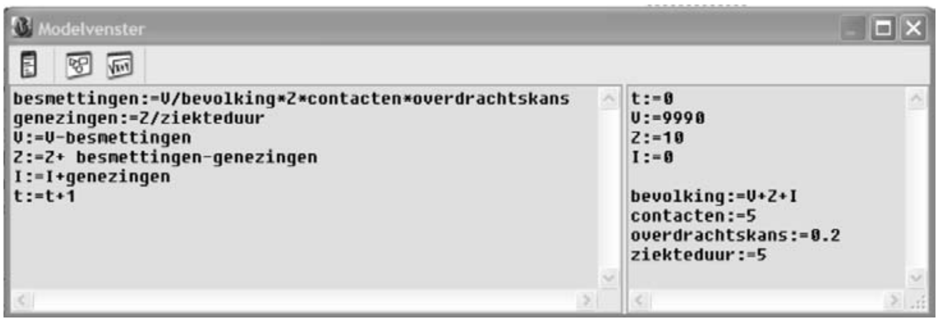
In het voorgaande heb ik een visie geschetst op het onderwijzen van dynamisch modelleren. Die visie heb ik uitgewerkt in een schets voor een inleidende module van 40 uur. Samenvattend zie ik tenminste de volgende nastrevenswaardige leerdoelen:

- de leerling verwerft een basisvaardigheid in het modelleren van dynamische systemen (modelontwerp, modelanalyse, simulatie en evaluatie);
- de leerling verwerft inzicht in de mogelijke gedragingen van dynamische systemen, en de (beperkte) voorspelbaarheid daarvan (mechanica, ecologie, klimaat etcetera);
- de leerling verwerft inzicht in modelleren als voortgaand proces van kennisontwikkeling.

Dat zijn ambitieuze doelen en niet iedereen zal overtuigd zijn van de haalbaarheid. De CTWO schrijft in haar visiedocument:

"In echte wiskundige probleemsituaties is modelleren een zeer complexe en moeilijke activiteit; het is didactisch geen eenvoudige opgave om leerlingen in het voortgezet onderwijs iets van dit proces te laten ervaren zonder in kunstmatige overgesimplificeerde situaties te vervallen."

Dat is zeker waar, maar het is toch de moeite waard te proberen zo ver mogelijk te komen. Op dit moment wordt een module NLT ontwikkeld die gedeeltelijk uitwerking geeft aan deze ideeën. Eerder hebben we in diverse ontwikkelprojecten en onderzoeken onderdelen van deze visie geïmplementeerd en geëvalueerd [4]. Steeds weer blijkt het daarbij onvermijdelijk om keuzes te maken en elementen te schrappen om tot een samenhangend en werkbaar geheel te komen. Het meest



Figuur 12 Het tweede griepmodel geïmplementeerd in *Coach*

opvallend in de hier voorgestane aanpak is wellicht een ruime aandacht voor numerieke oplossingen ten koste van de aandacht voor analytische oplossingen. Er zijn echter ook andere onderdelen gesneuveld zoals bijvoorbeeld stochastische modellen (randomwalk, monte-carlo). Gedeeltelijk zouden deze onderwerpen alsnog aan de orde kunnen komen in een vervolgmodule, of in een vervolg bij de mono-vakken.

Aanvankelijk was het de bedoeling dat er één gezamenlijke module modelleren zou komen voor Wiskunde D en NLT. Na verloop van tijd bleken de visies op modelleren toch te zeer verschillend en heeft wiskunde D een eigen ontwikkeltraject gestart. Het is illustratief om het ontwerpvoorstel van Garst en Peletier voor 'dynamische modellen' in wiskunde D te lezen naast dit artikel [6]:

"De commissie ziet een belangrijk onderscheid tussen enerzijds fysisch modelleren en anderzijds getalsmatig en geometrisch modelleren. Het fysisch modelleren, het opstellen van modellen op basis van fysische beginselen zoals de wetten van Newton, is een intrinsiek lastiger activiteit en is daarom geen onderdeel van de eindtermen. Merk op dat het hier alleen gaat over de eindtermen: een leerling zal niet gevraagd worden om fysische wetten toe te passen om een model op te stellen. Dit laat onverlet dat de fysische wereld ons een overdaad aan voorbeeldproblemen levert. Anders is de situatie voor getalsmatig en geometrisch modelleren. Hieronder volgen twee voorbeeldsommen om deze twee klassen te illustreren. Geef een recurrente betrekking voor een bolstapeling met vierkant grondpatroon (antwoord $B_n = B_{n-1} + n^2$ met $B(0) = 0$) en bepaal het aantal bollen in een dergelijke piramide met hoogte 5. [volgt een tweede, vergelijkbaar, voorbeeld]."

Hier wordt duidelijk voor één leidend perspectief gekozen. Dat heeft voor- en nadelen. Het ontwikkelteam voor NLT streeft er, ondanks de evidente moeilijkheden, naar een module te ontwikkelen waarin zowel wiskundige als natuurwetenschappelijke vakperspectieven tot hun recht komen. Dat is geen sinecure: steeds weer blijkt dat de bijzaken uit het ene vakgebied in het andere vakgebied hoofdzaken kunnen zijn en dat wat in het ene vakgebied een vanzelfsprekende aanname is, in het andere vakgebied veel uitleg behoeft. Deze opzet heeft dan ook alleen kans van slagen als belanghebbenden uit verschillende vakgebieden kennisnemen van elkaars perspectieven en zoeken naar een gedeelde interesse. Met dit artikel heb ik geprobeerd daartoe een bijdrage te leveren.

Verantwoording

Dit artikel kwam tot stand op basis van een voordracht die de auteur gehouden heeft op het Wintersymposium van het KWG. De auteur is als ontwikkelaar betrokken bij de vwo-module Dynamische Modellen voor het nieuwe vak Natuur, Leven en Technologie en is voorzitter van de adviescommissie 'Modelleren' van de gezamenlijke bètavernieuwingscommissies. Ik dank Joke Daemen, Jenneke Kruger, Ad Mooldijk, Bart Ormel, en Vincent Simons voor hun kritische reacties op eerdere versies van dit artikel, dat overigens op persoonlijke titel geschreven is. De voorbeelden in dit artikel zijn gedeeltelijk ontleend aan een NLT-module in voorbereiding en aan pilot-projecten die de afgelopen jaren op verschillende scholen beproefd zijn.

Referenties

1 I.A. Halloun, D. Hestenes, 'The initial knowledge state of college physics students', *American Journal of Physics* **53** (1985), pp. 1043–1055.

2 L. Viennot, 'Spontaneous reasoning in elementary dynamics', *European Journal of Science Education* **1** (1979), pp. 205–211.

3 D.M. Watts, 'A study of schoolchildren's alternative frameworks of the concept of force', *European Journal of Science Education* **5** (1983), pp. 217–230.

4 Voor een overzicht van beschikbare materialen zie www.cdbeta.uu.nl/vo/modelleren

5 Ontleend aan De Roos, A. en Heesterbeek, H., 'Opkomst en ondergang: rupsen in de klem tussen bomen en vogels', in: H. Heesterbeek, O. Diekman en H. Metz (red.), *De wiskundige kat, de biologische muis en de jacht op inzicht*, (2004), Utrecht, Epsilon, pp. 139–152.

6 S. Garst, M. Peletier, *Gedetailleerd programma van de module Dynamische Modellen van VWO-Wiskunde D 2007–2011 (voorstel)* (25 januari 2007), gedownload op 21 april 2007, van www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/MateriaalDomeinenWiskundeD/DynamischeModellenVwo/docs/ETDMv4.pdf

7 Bijvoorbeeld www.math.uu.nl/people/beukers/phase/newphase.html of math.hws.edu/javamath/config_applets/IntegralCurves.html

8 *Natuurkunde leeft*, Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo (mei 2006), www.nieuwenatuurkunde.nl/NiNa/DATA/Downloads/Visiedocumenten, pp. 33–34