Arno van den Essen
Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld
6525 ED Nijmegen
a.vandenessen@math.ru.nl

Onderzoek: het HSA-vierkant

De hype en zijn gevolgen

Vrijwel iedere Nederlander weet onderhand wat magische vierkanten zijn. Een van de drijvende krachten achter dit nieuwe enthousiasme is Arno van den Essen die er recent een boek over heeft geschreven. Toen hij op 13 maart 2007 de eerste versie van dit artikel schreef, dacht hij te weten waarom een magisch vierkant 'magisch' heet. Echter op 22 maart om twee uur 's middags met de trein in Parijs aangekomen om er een lezing te geven, begreep hij pas de echte betekenis van het woord: in Nederland was een mediahype uitgebroken rond een magisch vierkant dat drie maanden eerder door drie middelbare scholieren in zijn Masterclass 'Magische Vierkanten en Sudoku's' gevonden was. Onderstaand verhaal is een aangepaste versie van het op 13 maart geschreven artikel en gaat, behalve over het vierkant, ook in op de gevolgen van de hype.

De Masterclass

In de maanden oktober tot en met december 2006 namen zo'n dertig middelbare scholieren deel aan de Masterclass Magische Vierkanten die ik aan de Radboud Universiteit in Nijmegen gaf. Op zes donderdagmiddagen werd de leerlingen een drietal onderwerpen aangeboden, op grond waarvan ze een profielwerkstuk konden gaan maken: vormsudoku's, alfa-magische vierkanten en Franklin-magische vierkanten. Het laatste onderwerp sloot aan bij mijn recente oplossing van het Franklin-mysterie, dat in mijn boek [1] beschreven wordt.

Zo'n tweehonderdenvijftig jaar geleden construeerde Benjamin Franklin zo'n vijftal bijzonder magische vierkanten, waarvan het hieronder afgedrukt 8×8 vierkant het bekendste is. Dit vierkant verscheen op 17 januari 2006 zelfs op een postzegel van US postage ter gelegenheid van Franklins driehonderdste geboortedag.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Het bijzondere aan dit vierkant is dat niet alleen de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom gelijk is aan 260, maar ook de som van alle getallen in iedere *halve* rij en iedere *halve* kolom (vanaf de rand gerekend) is gelijk aan 130. Bovendien is ook de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk aan 130. In tegenstelling tot een 'gewoon' magisch vierkant is de som der getallen op de diagonaal niet gelijk aan de magische som. In plaats daarvan is de som van alle getallen op ieder van de vier *gebogen* diagonalen zoals bijvoorbeeld 52, 3, 5, 54, 43, 28, 30, 45 of 45, 30, 28, 43, 23, 40, 34, 17 gelijk aan 260. Maar nog is niet alle magie beschreven. Ook alle parallelle gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1 of 20, 51, 5, 6, 58, 57, 15, 48 hebben 260 als som, een bijzonder vierkant.

De uitdaging

Tijdens de Masterclass werd uiteengezet hoe zulke vierkanten gemaakt kunnen worden. Vervolgens werd een aantal mogelijke onderzoeksopdrachten geformuleerd zoals: maak je eigen 8×8 Franklin-magisch vierkant (dat wil zeggen een vierkant dat alle bovengenoemde eigenschappen van het Franklin-vierkant bezit), maar ook maak een 8×8 Franklin-magisch vierkant dat ook nog *panmagisch* is, met andere woorden zo dat ook nog de diagonalen en alle daaraan parallelle *gebroken* diagonalen als som 260 hebben, of, nog uitdagender, maak zo'n vierkant van orde 16. Echter de ultieme uitdaging was: maak een 12×12 Franklin-magisch vierkant, omdat zo'n vierkant tot op de dag van vandaag nog niet gevonden is.

Tijdens de Masterclass hadden Petra Alkema, Jesse Hoekstra en Willem Schilte al een 8×8 panmagisch Franklin-magisch vierkant gemaakt, denkende dat het een huiswerkopgave was. Ze besloten daarom hun energie te besteden aan het zoeken van een 12×12 Franklin-magisch vierkant.

Op 14 december vond de op een na laatste bijeenkomst van de Masterclass plaats. Aan het eind van de middag kwamen Petra, Jesse en Willem naar mij toe en vertelden me dat ze erin geslaagd waren het onderstaand 12×12 bijna-Franklin- magisch vierkant te maken.

Hoe bijzonder dit vierkant is zal ik hieronder laten zien: in mijn ogen is het *het meest magische vierkant dat ooit* in zo'n vijfduizend jaar magische vierkanten-geschiedenis gemaakt is. In onderstaande zal ik dit vierkant de naam HSA-vierkant geven (Hoekstra, Schilte, Alkema).

Het HSA-vierkant

Om te beginnen is onderstaand vierkant inderdaad bijna het gezochte 12×12 Franklin-magische vierkant: de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom is 870, de som van alle getallen op iedere gebogen diago-

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Het HSA-vierkant. Het vierkant is ook $\frac{1}{3}$-Franklin-magisch. Zo is bijvoorbeeld $2+119+122+47=290$. Ook hebben alle cirkels bestaande uit twaalf getallen de magische som van 870, zoals bijvoorbeeld de cirkels gevormd door de getallen 60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75 en 85 of die gevormd door de getallen 75, 95, 93, 53, 54, 68, 101, 127, 32, 112, 14, 46.

naal en iedere parallelle gebogen diagonaal is 870 en de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant is gelijk aan 290. De enige eigenschap die nog ontbreekt om Franklin magisch te zijn is de *halve kolom-eigenschap* en de *halve rij-eigenschap*: de som van alle getallen in iedere halve rij is gelijk aan 434 of 436, in plaats van 435 en de som van alle getallen in iedere halve kolom is gelijk aan 423 of 447.

Het ontbreken van deze eigenschap wordt echter meer dan gecompenseerd door een scala aan andere magische eigenschappen.

Zo is het vierkant $1/3$*-de Franklin-magisch*. Dat wil zeggen dat de som van alle getallen in iedere 'eenderde rij' en iedere 'eenderde kolom' (vanaf de rand gerekend) gelijk is aan 290, het derde deel van de magische som. Bijvoorbeeld $11+110+131+38=290$ maar ook $108+39+98+45=290$ en ook $80+53+92+65=290$. Verder is het vierkant *panmagisch*, wat zoals eerder opgemerkt betekent dat alle diagonalen en alle parallelle gebroken diagonalen, zoals bijvoorbeeld 121, 27, 11, 9, 32, 127, 101, 78, 96, 94, 74, 100 als som 870 hebben. Deze eigenschap ontbrak bij het eerder genoemde 8×8 vierkant van Franklin.

Ook hebben alle cirkels bestaande uit twaalf getallen de magische som van 870, zoals bijvoorbeeld de cirkels gevormd door de getallen 60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75 en 85 of die gevormd door de getallen 75, 95, 93, 53, 54, 68, 101, 127, 32, 112, 14, 46. Deze eigenschap, die zover ik weet niet eerder werd opgemerkt, volgt onmiddellijk uit het feit dat de som van de getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk is aan 290.

Maar het HSA-vierkant heeft nog heel wat meer verrassingen in petto: zij L de horizontale lijn die het vierkant in twee gelijke delen verdeelt, dan is de som van ieder tweetal getallen dat spiegelsymmetrisch ligt ten opzichte van deze lijn, zoals bijvoorbeeld 37 en 108, gelijk aan 145. Een gevolg daarvan is dat ieder figuur, bestaande uit twaalf getallen, dat symmetrisch is ten opzichte van de lijn L als som 870 heeft.

Gebruik makend van deze symmetrie, de 2×2 deelvierkanten eigenschap en de eenderde Franklin eigenschap is het vervolgens mogelijk de meeste letters van het alfabet te maken en evenzo de meeste cijfers, natuurlijk allen met de magische som van 870. In het bijzonder kun je de letters HSA als volgt maken. H: 73, 60, 85, 72, 87, 58, 50, 95, 64, 93, 52, 81, S: 41, 80, 53, 104, 103, 91, 54, 42, 44, 89, 68, 101 en tenslotte A: 106, 47, 84, 49, 96, 61, 51, 86, 69, 88, 57, 76.

De hype en zijn betekenis

Wat er zich op 22 maart allemaal heeft afgespeeld ben ik (vanwege mijn verblijf in Parijs) pas later te weten gekomen. Voordat ik op de positieve gevolgen (van de hype) voor de wiskunde zal ingaan, wil ik eerst reageren op een aantal in de media verschenen uitspraken.

Zo zou ik gezegd hebben dat het vierkant 'wereldwijd een sensatie in de wiskunde is'. Ik heb slechts gezegd en geschreven (in het artikel van 13 maart, dat op het internet te lezen is) dat het om een "sensatie in de wereld der magische vierkanten" ging. Zoals in het NRC te lezen was vond een woordvoerster van het ANP dat 'te subtiel'. Ik had het artikel echter voor het Wiskundig Genootschap geschreven, waardoor ik toch mocht aannemen dat dit 'subtiele verschil' wel begrepen zou worden. Voor dit soort misverstanden kan ik desalniettemin alle begrip opbrengen.

Voor de geciteerde reacties van mijn collega's (waarbij ik in het midden laat of ze wel juist geciteerd zijn, en dat is niet vanzelfsprekend) is dat duidelijk minder het geval. Bijvoorbeeld de uitspraak "... het gaat om het invullen van getalletjes, het is recreatieve wiskunde." Dat de in 1776 door Euler ingevoerde Latijnse vierkanten inderdaad als recreatieve wiskunde bedacht zijn om magische vierkanten te maken en dat juist deze Latijnse vierkanten, door hun grote verscheidenheid aan toepassingen, uit onze hedendaagse wereld niet meer zijn weg te denken en dat ook het Fermat-probleem als recreatieve wiskunde is begonnen, is de maker van bovenstaande opmerking blijkbaar ontgaan.

Ook de opmerking " het is net niet gelukt. Maar net niet telt niet in de wiskunde", hierbij doelend op het feit dat in het HSA-vierkant een Franklin eigenschap ontbreekt, is toch wel een heel negatieve benadering van het verkregen resultaat, waar in mijn ogen niemand mee gediend is: was het niet zo dat Alexander Fleming een bacteriekolonie aan het bestuderen was en zijn kolonie door een stukje vuil verpest zag, wat hem uiteindelijk tot iets veel mooiers leidde, de ontdekking van de penicilline. Ook hier blijkt het gevonden vierkant veel buiten gewonere magische eigenschappen te hebben dan het vierkant dat net niet gevonden werd.

Tot slot wil ik nog vermelden dat ook de voorlichters van de Radboud Universiteit met de plotselinge trendbreuk in berichtgeving over het vierkant meewaaiden, door op 22 maart nog een nieuwsbericht uit te brengen met als titel *Magisch vierkant iets minder magisch*, natuurlijk zonder enige uitleg. Volkomen onzinnig: het vierkant was niet minder magisch geworden.

Op 5 april werd het resultaat bekroond met de van Melsenprijs (voor het beste bètaprofielwerkstuk) tezamen met een ander drietal scholieren, te weten Bruno van Albeda, Valentijn Karemaker en Brigitte Sprenger, die onder andere de schuifpuzzel en de kubus van Rubik bestudeerden. Ook op het *International Conference for Young Scientists* in St. Petersburg behaalden beide groepen opnieuw de hoogste klassering: een zilveren medaille (goud werd niet toegekend).

Maar laat ik nu op de positieve kanten van de hype ingaan. Na terugkeer uit Parijs bleek mijn mailbox te zijn overladen met emails van allemaal enthousiaste mensen die, veel niet-gevraagde, magische vierkanten gemaakt hadden. Ook vernam ik dat een jaar eerder door Donald Morris een vierkant, nagenoeg hetzelfde als het HSA-vierkant, gemaakt was, een verschijnsel dat regelmatig bij wetenschappelijke ontdekkingen voorkomt. Verder was het opvallend te zien hoeveel jonge kinderen (10-12 jaar) bijzonder magische vierkanten gemaakt hadden en probeerden het nog niet gevonden 12×12 Franklinvierkant te vinden. Was het niet Andrew Wiles die als tienjarige geboeid raakte door een onopgelost probleem en was het niet Jean-François Champollion die ook op tienjarige leeftijd in de ban kwam van de Rosetta steen en het mysterie van de hiërogliefen? Ik ben ervan overtuigd dat de jonge onderzoekers van nu de wiskundigen van morgen zijn.

Ook op middelbare scholen werd er in de wiskundelessen aandacht besteed aan magische vierkanten: is er een betere publiciteit voor wiskunde mogelijk? Bovendien kreeg de wiskunde in de gedaante van Petra, Jesse en Willem drie jonge ambassadeurs.

Maar het sprookje van het HSA-vierkant kreeg begin mei een onverwacht snel happy end. Het was Cor Hurkens, wiskundige aan de TUE, die mij een voorlopige versie [2] van zijn zoektocht naar het gezochte Franklinvierkant stuurde. Zijn artikel begint met een schitterende reductie, die het mogelijk maakt de zoektocht vervolgens met een computer 'berekenbaar' te maken. Na zo'n 160 uur computertijd, waarbij 50 computers gebruikt werden, bleek het gezochte 12×12 Franklinvierkant niet te bestaan. Het HSA-vierkant blijft dus nog steeds het meest magische Franklinvierkant.

Maar de mediahype heeft nog meer tastbare resultaten opgeleverd. Tot nu toe was het alleen bekend dat er voor ordes die een achtvoud zijn een Franklin-magisch vierkant bestaat (het is eenvoudig in te zien dat de orde van een Franklinvierkant een viervoud is). Echter voor de achtvouden plus vier was nog niets bekend, totdat, zoals gezegd Cor Hurkens bewees dat het eerste geval, dat van orde twaalf niet bestaat.

Terwijl Cor Hurkens het 12×12 geval oploste was in Malden bij Nijmegen een amateurwiskundige, de elektrotechnisch ingenieur Huub Reijnders, bezig Franklinvierkanten van grotere orde te bestuderen. Hij toonde aan dat voor alle ordes groter dan twaalf die een achtvoud plus vier zijn, er wel degelijk zuiver Franklin-magische vierkanten bestaan. Onmiddellijk na de bekendmaking van Reijnders' resultaat (in *De Telegraaf*) slaagde ook Cor Hurkens erin met zijn methode deze vierkanten te maken.

De hype heeft er dus voor gezorgd dat we nu precies weten voor welke ordes een Franklinvierkant bestaat. Dit roept onmiddellijk weer een nieuwe vraag op: is er een verband

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	**64**	80	66	77	67	84	63	74	69
60	**87**	**50**	**93**	53	91	56	90	49	94	59	88
85	**58**	**95**	**52**	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	**81**	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	**41**	**103**	**44**	102	37	106	47	100
73	70	83	64	**80**	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	**53**	**91**	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	**54**	**89**	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	**68**	78	61	82	71	76
97	46	107	40	**104**	**42**	**101**	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	**106**	**47**	100
73	70	83	64	80	66	77	67	**84**	63	74	**69**
60	87	50	93	53	91	56	90	**49**	94	59	**88**
85	58	95	52	92	54	89	55	**96**	**51**	**86**	**57**
72	75	62	81	65	79	68	78	**61**	82	71	**76**
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

De letters van HSA als volgt: H: 73, 60, 85, 72, 87, 58, 50, 95, 64, 93, 52, 81, S: 41, 80, 53, 104, 103, 91, 54, 42, 44, 89, 68, 101 en tenslotte A: 106, 47, 84, 49, 96, 61, 51, 86, 69, 88, 57, 76

tussen Franklinvierkanten van orde $2n$ en paren orthogonale Latijnse vierkanten van orde n, immers voor deze laatste vierkanten weten we dat ze bestaan voor alle ordes behalve 2 en 6, wat natuurlijk precies correspondeert met 4 en 12 waarvoor er juist geen Franklinvierkanten bestaan.

Het zou zeer interessant zijn deze vraag positief te kunnen beantwoorden omdat we dan via de constructie van Franklinvierkanten paren orthogonale Latijnse vierkanten kunnen vinden, wat gezien de grote toepasbaarheid van deze vierkanten een nuttige bijdrage aan de wiskunde zou opleveren.

Referenties

1. Arno van den Essen, *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot sudoku*, Veen Magazines (2006), Diemen.
2. Cor Hurkens, 'Plenty of Franklin Magic Squares, but none of order 12', *preprint*, 7 mei 2007.