Agnes Verweij
TU Delft, Faculteit EWI
Mekelweg 4, HB04.090
2628 CD Delft
A.Verweij@ewi.tudelft.nl

Boekbespreking

Basisboek Wiskunde

Volgens de media zijn velen van mening dat de wiskundige bagage van de beginnende (bèta)student tekortschiet. Dit vinden ook de auteurs Jan van de Craats en Rob Bosch, beiden betrokken bij de popularisering van de wiskunde in het vwo-onderwijs. Zij stelden een 'Basisboek wiskunde' samen, om deze leemte op te vullen, en zelfs, als we afgaan op het voorwoord van het boek, om een norm te stellen voor het ingangsniveau van een bètastudie. Draagt dit boek bij aan het opvullen van de kloof tussen wiskunde van het vwo en van het wetenschappelijk onderwijs? Agnes Verweij gelooft er niets van.

Een cadeautje. Met deze woorden werd het plan gepresenteerd om aan alle studenten die in september 2006 met een studie Elektrotechniek of Informatica bij de TU Delft of met een studie Wiskunde bij deze TU en de Universiteit van Leiden beginnen een exemplaar van het *Basisboek Wiskunde* te geven. Het is inderdaad een bijzonder welkomstgeschenk, dit mooi verzorgde boek dat volgens het voorwoord alle basiswiskunde — behalve de kansrekening en statistiek — bevat die nodig is als ingangsniveau op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen binnen het hoger onderwijs.

Oefening weer de hoofdmoot

De met realistische wiskunde in dit icttijdperk opgevoede eerstejaarsstudenten zullen het ontbreken van contextopgaven en de minimale rol van de grafische rekenmachine onmiddellijk opvallen. Maar voor het overige lijkt de didactische opzet van het boek goed aan te sluiten bij de manier waarop (helaas) veel van deze studenten in het voortgezet onderwijs wiskunde geleerd hebben: oefeningen staan centraal, de bijbehorende tekst is alleen bedoeld voor wie problemen ontmoet bij het maken van de sommen. De geleidelijk in moeilijkheid opklimmende rijtjes sommen waarmee vaardigheden op het gebied van getallen, algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus geoefend worden, zijn daarom op de linkerpagina's van de betreffende hoofdstukken afgedrukt, terwijl op de volgende rechterpagina steeds een beknopte uitleg te vinden is.

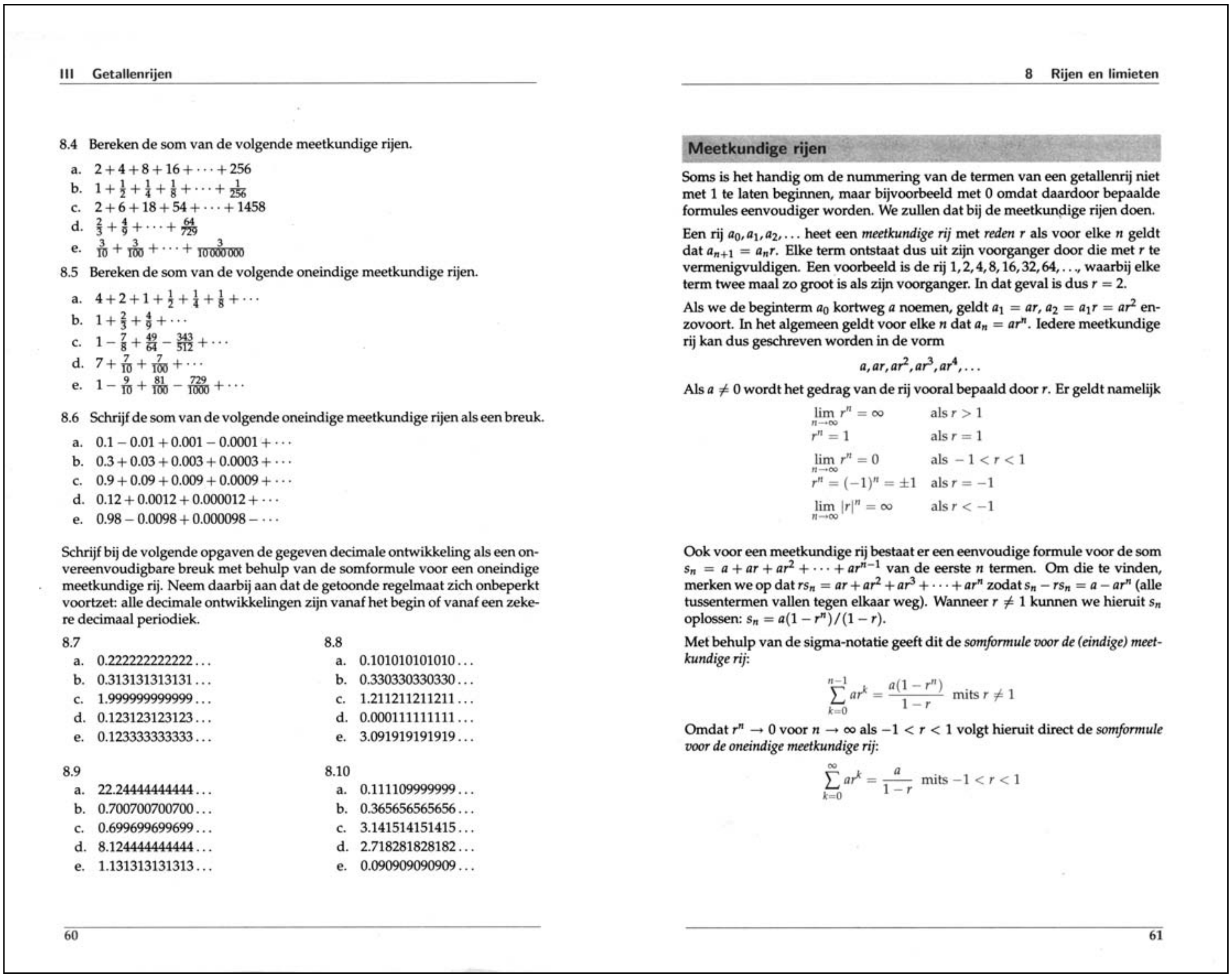
Voor de geïnteresseerde student geeft het achtste hoofdstuk enkele achtergronden van onderwerpen uit de eerdere hoofdstukken, zonder opgaven. Hierna volgen de antwoorden van de oefenopgaven en een formuleoverzicht, waarvan de status in het midden gelaten wordt. Bevat dit overzicht, waarin niet alle in de eerste zeven hoofdstukken gebruikte formules opgenomen zijn, misschien de formules die volgens de auteurs uit het hoofd gekend zouden moeten worden? Het boek sluit af met een trefwoordenregister.

Geïsoleerde vaardigheden

Het is niet te hopen dat veel geslaagden voor de profielen N&G en N&T van het havo en vwo met belangstelling voor een exacte studie het *Basisboek Wiskunde* al voor de zomervakantie zelf hebben aangeschaft met de bedoeling dit, in overeenstemming met de in dit boek gesuggereerde noodzaak hiertoe, voor de start van de studie door te werken. Ook als dit leerlingen zijn die een exacte studie goed zouden aankunnen, kan dit tot zodanig teleurstellende ervaringen geleid hebben dat zij alsnog een andere studiekeuze hebben gemaakt. Zij zullen namelijk al snel gemerkt hebben dat verspreid over het boek een groot aantal oefeningen voorkomt met betrekking tot vaardigheden die niet tot de schoolstof behoren, terwijl de uitleg hierbij vaak niet voldoende is om deze nieuwe vaardigheden zelfstandig onder de knie te kunnen krijgen.

Voorbeelden van dergelijke vaardigheden zijn: de onvereenvoudigbare breuk bepalen die correspondeert met een gegeven repeterende decimale ontwikkeling, kwadraat afsplitsen, stelsels van twee of drie eerstegraadsvergelijkingen oplossen, hoeken tussen lijnen berekenen met behulp van het inproduct van hun normaalvectoren, grafieken van cyclometrische functies schetsen, een parametrisatie van een rechte lijn door twee gegeven punten opstellen, fouten schatten met behulp van differentialen, partieel integreren, oneigenlijke integralen berekenen.

Het zou de auteurs gesierd hebben als zij in hun boek duidelijk hadden aangegeven dat deze en nog een aantal andere onderwerpen niet gerekend kunnen worden tot de voorkennis van wie op grond van zijn havo- of vwo-profiel toelaatbaar is tot een exacte studierichting. In het hbo en wo worden deze 'nieuwe' onderwerpen — voor zover zij relevant zijn voor de gekozen richting — daarom naar behoren onderwezen. Dit onderwijs is over het algemeen niet zoals in het *Basisboek Wiskunde* alleen gericht op beheersing van geïsoleerde vaardigheden, maar ook op betekenisverlening, op inpassing in het geheel van reeds verworven kennis en vaardigheden en op toepassing in een bredere context. Wie zich al voor aanvang van de studie wil inwerken in de hierbij benodigde nieuwe wiskundeonderdelen, kan dan ook beter gebruik maken van de voor die studie voorgeschreven wiskundeboeken of -dictaten dan van het *Basisboek Wiskunde*.



III Getallenrijen

8.4 Bereken de som van de volgende meetkundige rijen.

a. $2+4+8+16+\cdots+256$
b. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{256}$
c. $2+6+18+54+\cdots+1458$
d. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{64}{729}$
e. $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10\,000\,000}$

8.5 Bereken de som van de volgende oneindige meetkundige rijen.

a. $4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$
b. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots$
c. $1-\frac{7}{8}+\frac{49}{64}-\frac{343}{512}+\cdots$
d. $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\cdots$
e. $1-\frac{9}{10}+\frac{81}{100}-\frac{729}{1000}+\cdots$

8.6 Schrijf de som van de volgende oneindige meetkundige rijen als een breuk.

a. $0.1-0.01+0.001-0.0001+\cdots$
b. $0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots$
c. $0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$
d. $0.12+0.0012+0.000012+\cdots$
e. $0.98-0.0098+0.000098-\cdots$

Schrijf bij de volgende opgaven de gegeven decimale ontwikkeling als een onvereenvoudigbare breuk met behulp van de somformule voor een oneindige meetkundige rij. Neem daarbij aan dat de getoonde regelmaat zich onbeperkt voortzet: alle decimale ontwikkelingen zijn vanaf het begin of vanaf een zekere decimaal periodiek.

8.7
a. 0.222222222222...
b. 0.313131313131...
c. 1.999999999999...
d. 0.123123123123...
e. 0.123333333333...

8.8
a. 0.101010101010...
b. 0.330330330330...
c. 1.211211211211...
d. 0.000111111111...
e. 3.091919191919...

8.9
a. 22.24444444444...
b. 0.700700700700...
c. 0.699699699699...
d. 8.124444444444...
e. 1.131313131313...

8.10
a. 0.111109999999...
b. 0.365656565656...
c. 3.141514151415...
d. 2.718281828182...
e. 0.090909090909...

60

8 Rijen en limieten

Meetkundige rijen

Soms is het handig om de nummering van de termen van een getallenrij niet met 1 te laten beginnen, maar bijvoorbeeld met 0 omdat daardoor bepaalde formules eenvoudiger worden. We zullen dat bij de meetkundige rijen doen.

Een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heet een *meetkundige rij* met *reden* r als voor elke n geldt dat $a_{n+1} = a_n r$. Elke term ontstaat dus uit zijn voorganger door die met r te vermenigvuldigen. Een voorbeeld is de rij $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, waarbij elke term twee maal zo groot is als zijn voorganger. In dat geval is dus $r = 2$.

Als we de beginterm a_0 kortweg a noemen, geldt $a_1 = ar$, $a_2 = a_1 r = ar^2$ enzovoort. In het algemeen geldt voor elke n dat $a_n = ar^n$. Iedere meetkundige rij kan dus geschreven worden in de vorm

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

Als $a \neq 0$ wordt het gedrag van de rij vooral bepaald door r. Er geldt namelijk

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} r^n = \infty & \text{als } r > 1 \\ r^n = 1 & \text{als } r = 1 \\ \lim_{n\to\infty} r^n = 0 & \text{als } -1 < r < 1 \\ r^n = (-1)^n = \pm 1 & \text{als } r = -1 \\ \lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty & \text{als } r < -1 \end{array}$$

Ook voor een meetkundige rij bestaat er een eenvoudige formule voor de som $s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ van de eerste n termen. Om die te vinden, merken we op dat $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ zodat $s_n - rs_n = a - ar^n$ (alle tussentermen vallen tegen elkaar weg). Wanneer $r \neq 1$ kunnen we hieruit s_n oplossen: $s_n = a(1-r^n)/(1-r)$.

Met behulp van de sigma-notatie geeft dit de *somformule voor de (eindige) meetkundige rij*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{mits } r \neq 1$$

Omdat $r^n \to 0$ voor $n \to \infty$ als $-1 < r < 1$ volgt hieruit direct de *somformule voor de oneindige meetkundige rij*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad \text{mits } -1 < r < 1$$

61

Twee pagina's uit het boek: links opgaven en rechts uitleg

Inzicht en vaardigheid

Zijn de gedeelten van het *Basisboek Wiskunde* die betrekking hebben op de op het havo of vwo behandelde wiskundeonderwerpen wél bruikbaar voor het verbeteren van de wiskundige basisvaardigheden van studenten? Het antwoord kan bevestigend zijn voor studenten die zich deze vaardigheden op het havo of vwo met inzicht hebben eigen gemaakt en ze destijds ook in verschillende situaties hebben leren toepassen. Voor hen kunnen sommige oefeningen uit het boek, en mogelijk ook de uitleg daarbij, zinvol zijn als zij merken dat ze bepaalde vaardigheden te slecht hebben onderhouden om deze in de context van de problemen die ze bij hun studie tegenkomen goed en vlot te kunnen gebruiken.

Lastig is wel dat in het *Basisboek Wiskunde* soms een andere methode besproken wordt dan die op school gebruikelijk is, wat bijvoorbeeld het geval is bij het bepalen van een vergelijking van de lijn door twee gegeven punten in het vlak. Maar voor studenten die de inmiddels half of helemaal vergeten wiskundige basisvaardigheden als onbegrepen trucs geleerd hebben, is de didactiek van het *Basisboek Wiskunde* minder geschikt. Dat er, zoals het Voorwoord vermeldt, "maar één manier [is] om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen", behoeft namelijk enkele kanttekeningen. Deze zijn onder andere te vinden in de brochure *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben*, auteur J. van Dormolen in samenwerking met de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, door deze vereniging uitgegeven in 1975 (heruitgave 1992), een brochure die nog niets aan actualiteit heeft ingeboet. De belangrijkste zijn in dit verband dat "het inoefenen van een vaardigheid pas met vrucht kan gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen" en dat "systeemscheiding kan (...) ontstaan doordat heel sterk geoefend wordt in het maken van opgaven van eenzelfde type". Met name wat gerichtheid op inzicht en variatie van de oefensituaties betreft, schiet de didactische opzet van het *Basisboek Wiskunde* voor de wiskundig niet al te sterke student tekort.

Basisboek Wiskunde, Jan van de Craats en Rob Bosch, Pearson Education Benelux, Oosterhout en Breda, 2005, 320 p., prijs €29,95, ISBN 90-430-1156-8.