

Mark Peletier

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

m.a.peletier@tue.nl

## Inaugurele rede

# Variatie doet

De variatierekening kent een reeds lange geschiedenis. Geworteld in de mechanica (principle of least action) en de optica (Fermats principe, het vinden van de kortste weg onder beperkende voorwaarden) heeft het vakgebied in het begin van de twintigste eeuw aan de wieg van de functionaalanalyse gestaan. In de variatierekening bestudeert men functies van functies, en in het bijzonder wordt er vaak naar minimaliserende functies gezocht. In de tweede helft van de twintigste eeuw is het vakgebied opgeschoven richting de differentiaalmeetkunde en nu zijn het vaak topologische problemen die een centrale rol vervullen. Tegelijkertijd heeft de theorie er vele toepassingen bijgekregen, bijvoorbeeld op het gebied van de optimale regeltechniek en de biofysica. Mark Peletier, op 1 augustus 2004 benoemd tot hoogleraar in de variatierekening aan de TU Eindhoven, zet zich in voor de dwarsverbanden tussen wiskunde en praktijk. Ook is hij een warm pleitbezorger voor de universitair geschoolde leraar. In zijn inaugurele rede van 8 september 2006 laat hij zien waar de variatierekening zich nu bevindt.

Ik ga u vandaag vertellen over de twee zaken die mij in mijn werk aan het hart gaan: over onderzoek en over onderwijs. Ik grijp deze mogelijkheid aan om u iets te laten zien van het onderzoek dat we in onze groep doen, van het hoe en van het waarom, van de inhoudelijke en van de menselijke kant. Daarnaast kennen velen van u mijn interesse voor het onderwijs, het onderwijs dat wij hier verrichten maar ook voor het onderwijs elders.

De titel van deze voordracht, *Variatie doet weten*, is multi-interpretabel, en meerdere betekenissen zullen vandaag ook de revue passeren. In letterlijke zin verwijst de titel naar de leeropdracht van mijn eigen hoog-

leraarschap, variationele methoden. Methoden staan niet op zichzelf maar dienen een doel, en dat doel hoort erbij: variationele methoden voor de analyse van differentiaalvergelijkingen. Het vakgebied differentiaalvergelijkingen is enorm groot en heeft uitgebreide en uiteenlopende toepassingen. Binnen dit gebied gebeurt er teveel om op te noemen. Waar ik me op concentreer is waar differentiaalvergelijkingen systemen beschrijven die op één of andere manier complex zijn.

Complexiteit heeft vele gedaanten, die niet altijd overeenkomen met wat we in het dagelijks leven onder complexiteit verstaan. We komen bijvoorbeeld complexiteit tegen in de

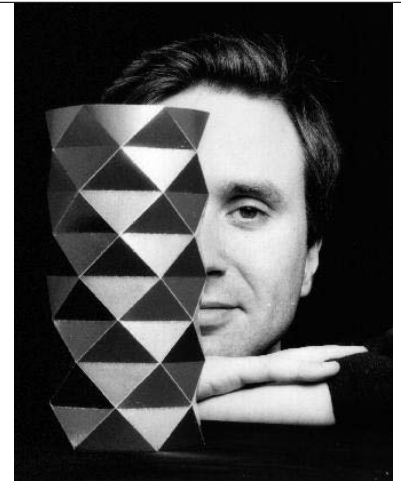
vorm van ingewikkelde geometrie, die zich niet eenvoudig laat beschrijven (zie bijvoorbeeld figuur 1). Ik zal daarnaast een voorbeeld geven van een probleem dat heel veel oplossingen heeft — teveel oplossingen om handig te zijn. Hier ligt de complexiteit in de overdaad aan oplossingen.

In mijn werk gebruik ik variationele methoden als gereedschap om dergelijke complexiteit te lijf te gaan, om orde te ontdekken in complexe systemen, met als doel dat soort systemen beter te begrijpen. Ik hoop u in de



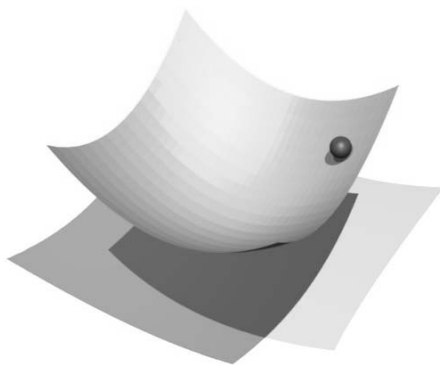
Illustratie: M. Verschuren

Figuur 1 Complexe geometrie

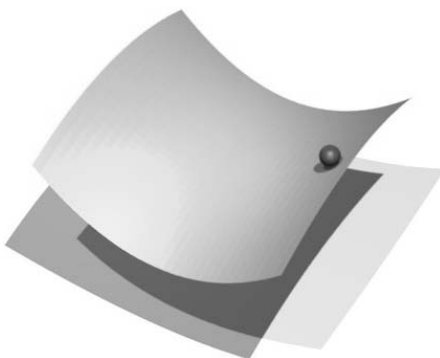


Mark Peletier

# weten



Figuur 2 Een lokaal minimum



Figuur 3 Een zadelpunt

loop van deze rede te overtuigen dat variationale methoden daarbij een nuttig instrument zijn.

## Energie

Het centrale concept in elke variationele aanpak van een probleem is dat van energie. Het gaat dan om systemen die worden gedreven door energie, dat betekent dat ze een punt van laagste energie opzoeken.

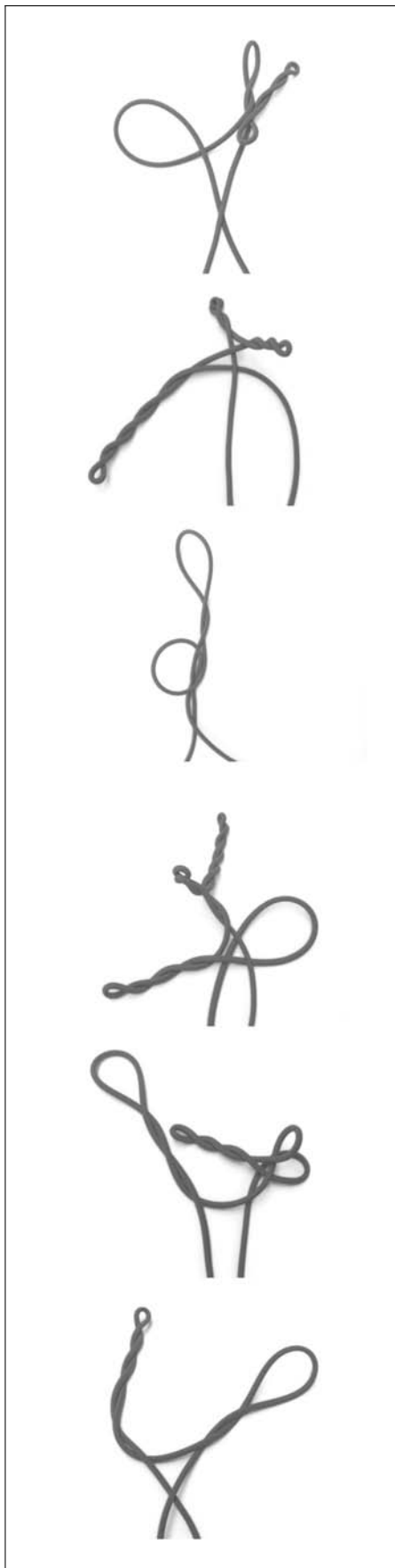
Als ik in de schaal in figuur 2 een balletje loslaat dan rolt het een beetje heen en weer en komt uiteindelijk tot rust in het laagste punt in deze schaal, en dat is een punt van laagste energie. Dat laagste punt noemen we stationair omdat daar het oppervlak lokaal horizontaal ligt. Als je daar een balletje neerlegt blijft het er stil liggen. In figuur 3 is er ook een stationair punt, en als je goed mikt dan kun je daar een balletje op laten uitkomen. Maar als je er een klein beetje naast zit gaat het mis. Daarom noemen we figuur 2, het lokale minimum, stabiel: als je een klein beetje naast het minimum zit rolt de bal weer terug. Het zadelpunt wordt dan onstabiel.

## De staaf

Een van de klassieke open problemen in de

mechanica is dat van de elastische staaf waar je aan draait en trekt. Het is een klassiek probleem niet alleen omdat het al lang geleden geformuleerd is, maar ook omdat het model staat voor een hele klasse van problemen. Als je dit probleem kunt oplossen open je de deur naar een grote groep andere.

De vraag is simpel: trek en draai aan een touwtje, wat zie je dan? Als je dit uitprobeert merk je snel dat als je het touwtje maar genoeg draait, het met zichzelf in contact komt. Dit is daarmee een contactprobleem, en die zijn inherent moeilijker dan andere. Dat weten we allemaal wel uit eigen ervaring, zoals wanneer je met een hamer een spijker probeert te raken. Als je wat gaat experimenteren met een touwtje zult je figuren zien als die in figuur 4. Deze zes figuren heb ik in tien minuten gemaakt en gefotografeerd, en u kunt zich voorstellen dat er een schier eindeloze reeks van zulke figuren gemaakt kan worden. Vaak krijg je ook een veel simpeler figuur, zoals in figuur 5: de twee eindjes komen samen, kronkelen als een helix om elkaar heen en eindigen in een lus. De vraag is dan of te begrijpen is wat je ziet. Kun je begrijpen wanneer de ene voorkomt en wanneer de andere? En zou het te voorspellen zijn?



**Figuur 4** Zes voorbeelden van lokale minimizers voor het staafcontactprobleem

De staaf die met zichzelf in contact komt laat zich vrij makkelijk variatoneel formuleren. Dat betekent dat de energie eenvoudig op te schrijven is; die is nu niet een functie van de plaats in drie dimensies, zoals in het geval van het balletje, maar een functie van de hele vorm van de staaf. Het betekent ook dat de vormen van figuur 4 en 5 overeenkomen met configuraties waarvoor die energie stationair is, deze keer onder randvoorwaarden. De voornaamste randvoorwaarde in deze situatie is dat de staaf niet door zichzelf heen gaat: dat maakt het probleem tot een contactprobleem. Het karakter van het stationaire punt, of het punt een lokaal minimum is of niet, geeft dan informatie over de stabiliteit van de structuren die we zien. De zes plaatjes van figuur 4 zijn voorbeelden van lokale minima onder randvoorwaarden. Problemen zoals deze blijken veel van zulke lokale minima te hebben en nog veel meer stationaire punten. Die veelheid is wat het probleem tot een complex probleem maakt. De uitdaging is dan om goed om te gaan met deze grote groep stationaire punten.

Een belangrijke speler in de poule van stationaire punten is dát punt waarvoor de energie minimaal is, dat is die toestand met de laagste energie die mogelijk is. Als je een half uurtje met een touwtje speelt, dan vermoed je vrij snel dat die laagste energietoestand er waarschijnlijk eentje is met de vorm van één lange vlecht met aan het eind een lus, zoals in figuur 5. Simpelweg omdat die het meeste voorkomt en het minst makkelijk in iets anders te veranderen is. De wiskundige vraag echter, of de globale minimizers inderdaad van deze vorm zijn, blijkt behoorlijk lastig; voorlopig is deze zelfs geheel buiten ons bereik. Dit is frustrerend: het is een simpel probleem met een eenvoudige formulering, ervaring wijst sterk in de richting van een eveneens simpele stelling, maar we weten werkelijk niet hoe we dit kunnen bewijzen.

Bob Planqué en ik — hij was destijds mijn aio — hebben daarom naar een simplificatie hiervan gekeken: die van een staaf die niet alleen met zichzelf in contact kan komen, maar die tegelijk gedwongen is om overal in contact te zijn met een vaste cilinder (zie figuur 6).



**Figuur 5** Een veel voorkomende configuratie. Is het de globale minimizer?



**Figuur 6** Een simpeler contactprobleem. De draad is altijd in contact met de cilinder en soms ook met zichzelf; we draaien en trekken aan de uiteinden.

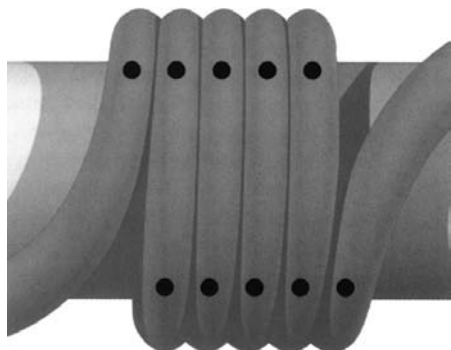
De grijze cilinder in de figuur is gegeven en staat vast; de draad eromheen is waar we aan draaien. En ook hier zien we dat het een contactprobleem is: de rode draad is op sommige plekken alleen in contact met de cilinder en op andere ook met zichzelf. Door de draad te dwingen op het oppervlak van een cilinder te zitten reduceren we het probleem van driedimensionaal, in de vrije ruimte, naar het tweedimensionale oppervlak van de cilinder. Net als in het klassieke verhaal *Flatland* van Edwin Abbott, over een tweedimensionale wereld, maakt dit nogal wat uit: in dit geval zijn Bob en ik zelfs in staat geweest om het gedrag van globale minimizers geheel te beschrijven.



**Figuur 7** Een globale minimizer van het contactprobleem

Hoe gaat zo iets in z'n werk? Vaak gebruiken we een bewijs uit het ongerijmde. Stel je wilt laten zien dat de globale minimizer een of andere eigenschap heeft, zeg eigenschap P. Dan beginnen we met de aanname dat hij die eigenschap niet heeft. Met die aanname op zak knutselen we aan de configuratie, een beetje duwen en trekken, zodat we uitkomen op een andere configuratie waarvan we kunnen laten zien dat die een lagere energie heeft. Dat kan niet, want we waren begonnen met de globale minimizer, dus dan is een tegenspraak gevonden. Een tegenspraak met de oorspronkelijke aanname dat de globale minimizer niet eigenschap P heeft; dus concluderen we dat die minimizer eigenschap P wel heeft. Door dit soort argumenten te gebruiken zijn Bob en ik erin geslaagd om de globale minimizer, de configuratie met de laatste energie, in detail te karakteriseren. Hij ziet eruit als in figuur 7: de staaf ligt tegen zichzelf aan in een wikkel en deze wikkel is ook de enige plek waar dat zelfcontact optreedt. De vorm van de wikkel kunnen we in detail beschrijven.

Dit was ongeveer wat we verwachtten, al was het maar door de ervaring van het spelen met een touwtje om onze vingers. Wat ons verraste was de ontdekking dat hoewel de staaf over een lang stuk tegen zichzelf aanligt, hij slechts op een beperkt aantal punten een kracht op zichzelf uitoefent (zie figuur 8).



**Figuur 8** Strengen oefenen alleen kracht op elkaar uit bij de aangegeven punten.

Met andere woorden, langs bijna de gehele wikkell liggen de strengen naast elkaar zonder op elkaar kracht uit te oefenen; alleen in de punten die hier met stippen aangegeven zijn is een contactkracht aanwezig.

Dit is een wat bijzondere situatie. Elk van u ondervindt op dit moment ook de gevolgen van een contactsituatie: u zit allen op een stoel, of anders gezegd, de stoel houdt u van de grond. De stoel doet dat door een kracht op uw billen uit te oefenen. Als ik u mag vragen uw aandacht even op uw billen te richten, dan zult u met me eens zijn dat die kracht wel gelijkmatig verdeeld is over het contactoppervlak. Dat zou anders zijn als u op een spijkerbed zou zitten, dan concentreert de kracht zich in enkele kleine punten. Dit stavenprobleem is nu zo bijzonder, omdat het niet de scherpe punten van het spijkerbed heeft, maar wel de gelokaliseerde kracht ervan. Ondanks het gladde oppervlak van de staaf is de kracht sterk gelokaliseerd.

Wat we net gezien hebben is dat we, door gebruik te maken van de variationele formulering en van methoden die daarop geënt zijn, een beetje orde in de complexiteit kunnen scheppen. We kunnen namelijk de globale minimizers, een belangrijke klasse, tot in detail karakteriseren.

Overigens rijst ook nog wel eens de vraag of diezelfde orde niet geschapen had kunnen worden door een numerieke berekening uit te voeren. Computers zijn tegenwoordig heel krachtig, zo gaat dit argument, kunnen we daarmee niet gewoon oplossingen uitrekenen? Het antwoord op deze vraag is: ja en nee. Voor sommige vragen is de computer een uitstekend hulpmiddel, en voor andere simpelweg het verkeerde instrument. Het inzicht dat ik net schetste, over de gelokaliseerde contactkrachten, is met numerieke technieken niet te verkrijgen. Mijn visie hierop is dat we verder komen als we de juiste gereedschappen met elkaar combineren, en dat is ook de gedachte achter het *Center for Applied*

*Analysis, Scientific Computing, and Applications (CASA)*. Dit center is twee jaar geleden opgericht en verenigt de leerstoelen Toegepaste Analyse en Scientific Computing. Door de sterke kanten van toegepaste analyse met de sterke kanten van Scientific Computing te combineren komen we verder dan met elk van de twee afzonderlijk.

### Sterke uitspraken met zwakke typering

Het volgende verhaal is echt gebeurd. De hoofdpersoon is mijn vrouw Irene, al kende ik haar toen nog niet — ze was op dat moment drie jaar oud. In die tijd waren er metalen prullenbakken waar de naam van de gemeente in het deksel was gestanst.

De opa van Irene dacht: “Dat is een pienter meisje” en schreef het woord ‘Wassenaar’ op een stuk papier. Toen stelde hij de vraag: “Wat staat hier?” Irene kon nog niet lezen en had kunnen zeggen: “Ik heb geen idee, opa, laten we gaan touwtjespringen”. In plaats daarvan antwoordde ze: “Ik weet het niet, maar ik weet wel dat dit ook op de prullenbakken staat”.

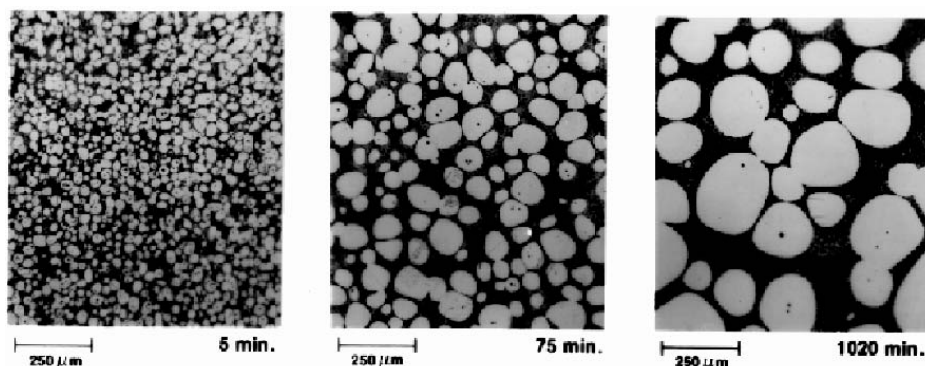
Irene maakte hier een opmerking die ik een *zwakke typering* wil noemen. Het lukte niet om het woord Wassenaar, dat haar opa opgeschreven had, volledig te karakteriseren. In plaats daarvan legde zij een verband met iets anders. Zo’n verband geeft informatie, of je zou zelfs kunnen zeggen, zo’n verband *is* informatie. Dit is een situatie waarin we ons als toegepast wiskundigen vaak bevinden. De vragen die we eigenlijk willen stellen kunnen we bijna nooit beantwoorden. Maar er is een belangrijke kunst, en kunst is hier echt het juiste woord, om goede zwakke typering te vinden. Het blijkt vaak zo te zijn dat we met een slimme keuze van die zwakke typering een verrassend sterke uitspraak kunnen doen; maar de keuze van die zwakke typering is daarin cruciaal.

Een klassiek voorbeeld van een zwakke typering is schaaloverbrugging. De luchtmoleculen in deze ruimte zijn te beschrij-

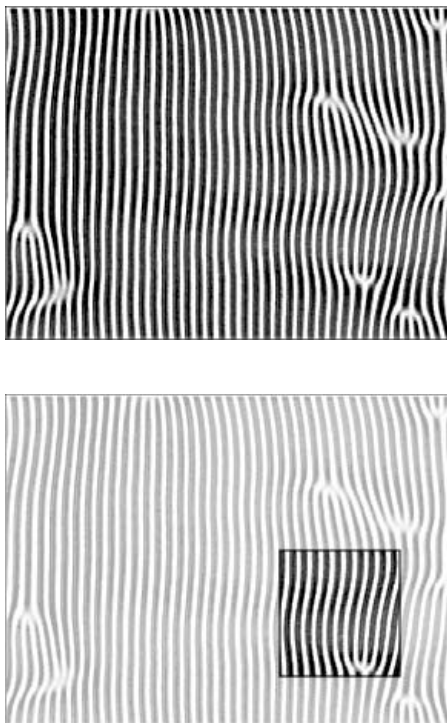
ven met een deeltjesmodel, waarin je van elk molecuul bijhoudt waar het zich bevindt. Door dit deeltjesmodel te middelen krijgen we de vergelijkingen voor de gasdynamica, de Navier-Stokesvergelijkingen. Beide modellen zijn wiskundig gezien niet triviaal, maar het feit dat er een verband tussen deze modellen aangelegd kan worden is een belangrijke vorm van informatie. Variationele methoden blijken bij uitstek geschikt als bron van zwakke typering. Een mooi voorbeeld is werk van Kohn en Otto, een paar jaar geleden, waarin zij een energieargument gebruiken om *coarsening* te beschrijven [9]. Figuur 9 toont een materiaal dat op microschaal een mengsel is van twee stoffen. Net als bekende mengsels als melk en boter kan dit mengsel gaan schiften; maar omdat het een vaste stof is en geen vloeistof gebeurt dat schiften op kleine schaal. En dat is het proces wat u hier ziet.

De geometrie van deze situatie is bijzonder complex en daarmee onmogelijk deterministisch te beschrijven. Statistische beschrijvingen zijn er vele, maar deze zijn beschrijvend van aard en niet voorspellend. Wat Kohn en Otto hebben laten zien echter, is dat er uit een combinatie van enerzijds de variationele structuur van de vergelijkingen en anderzijds de schalingseigenschappen van die vergelijkingen een afschatting gevonden kan worden die dit waargenomen gedrag, deze *coarsening*, beschrijft zonder in detail de geometrie te kennen. Deze methode heeft een deur geopend naar de bestudering van een groot aantal systemen met dit soort complexe oplossingen.

Een ander voorbeeld van een variationele zwakke typering is te zien in figuur 10. Als mensen naar de structuur links kijken zien zij een slecht opgehangen behang: iets wat eigenlijk periodiek zou moeten zijn maar het net niet is. Het wiskundig beschrijven van zulke structuren is een uitdaging: echte periodiciteit is eenvoudig te formuleren, maar zulke bijna-periodiciteit is heel lastig concreet



**Figuur 9** Ostwald ripening: een proces van coarsening, waarin kleine aggregaten groeien en samenklonteren (uit [2])



**Figuur 10** Een zwakke typering van periodiciteit: de energie in het kleine vierkant bevindt zich op hetzelfde niveau als wanneer de structuur echt periodiek was geweest. Bovendien is dit onafhankelijk van de plaats van het vierkant.

te maken. Alberti, Choksi en Otto hebben in dit geval een zwakke typering gevonden door de energie te bekijken in een klein deelgebied [3]. Zij hebben laten zien dat de energie in een klein deel van het gebied, het donkere vierkantje bijvoorbeeld, vrijwel gelijk moet zijn aan de energie die men zou hebben gehad als de oplossing wel exact periodiek was geweest. Bovendien is dit onafhankelijk van waar het vierkantje gelegd wordt. De energie bevindt zich op hetzelfde niveau als die van een periodieke structuur en is gelijkmatig verdeeld over het gebied. Dit is dus een kleiner broertje, een zwakke typering, van het concept periodiciteit. Het is de afgelopen jaren gebleken dat er een grote variatie te vinden is van dit soort sterke uitspraken met zwakke typering, met name in de studie van complexe systemen. Ook hier geldt dat variatie doet weten.

### Biologische membranen

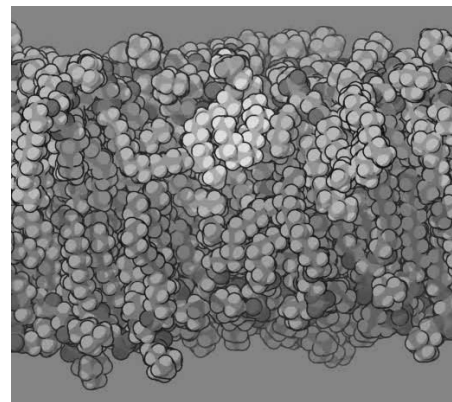
Ik wil als laatste een voorbeeld van zo'n zwakke typering geven dat uit onze eigen stal komt. Ook in dit voorbeeld speelt schaaloverbrugging een rol, maar ik wil u ook laten zien hoe we mechanische eigenschappen op een zwakke manier kunnen beschrijven. Het studie-objekt betreft biologische membranen. Dit zijn de membranen die elke cel in ons lichaam bijeen houden en daarnaast ook nog allerlei andere functies vervullen. Wan-

neer we inzoomen op zo'n membraan, zoals in de artist impression van figuur 11, dan blijkt dat dat membraan bestaat uit losse moleculen, lipiden, die netjes naast elkaar in dat membraan blijven zitten. Dat ze blijven zitten is bijzonder — de lipiden worden heftig heen een weer geschud door de thermische beweging van de watermoleculen. Dit schudden is voor een deel te herkennen in de numerieke berekening van figuur 12. Als het geen lipiden waren geweest, maar bijvoorbeeld alcoholmoleculen in een glas bier, dan waren ze in een mum van tijd over het hele glas verdeeld.

Dus rijst de vraag waarom deze structuren zo bij elkaar blijven; of, in termen van het model dat we beschouwen, waarom dit soort structuren in dat model bestaan en waarom ze stabiel zijn. Maar er blijkt nog meer aan de hand te zijn. Uit experimenten blijkt het membraan in staat te zijn om weerstand te bieden tegen rek, tegen breuk en tegen buiging. Leg dat naast het feit dat deze membranen bestaan uit losse moleculen zonder enige band met hun burens, dan is dat toch merkwaardig. De vraag rijst nu hoe we kunnen begrijpen dat deze eigenschappen ontstaan uit de microscopische eigenschappen van de lipiden.

De basiseigenschap die verantwoordelijk is voor dit gedrag is wel bekend. De lipiden bestaan uit twee delen, een kop die water aantrekt en twee staarten die water afstoten. Het gangbare argument is dat met deze bilaagstructuur de hydrofobe staarten zich van het water afkeren. De uitdaging is nu om dit wat vage argument wetenschappelijk handen en voeten te geven.

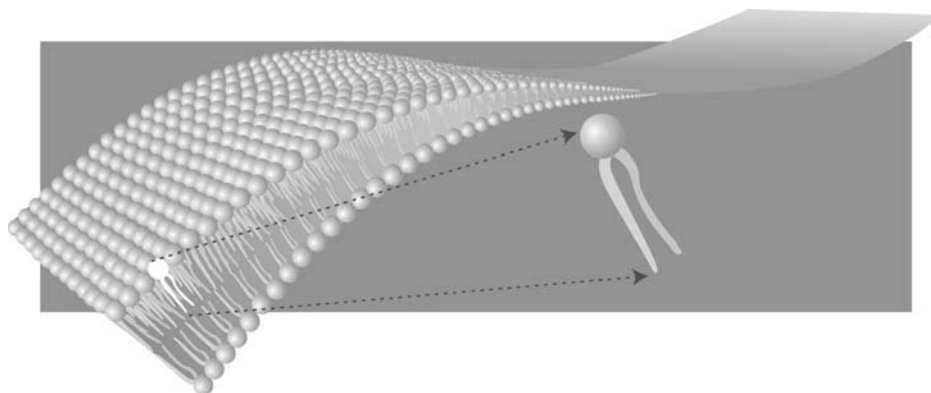
We doen dit door een verband aan te leggen tussen twee beschrijvingen van hetzelfde systeem, één op microscopisch niveau en de ander op macroniveau. Op de microschaal beschrijven we de lipiden met deeltjes en gebruiken een self-consistent mean-field approximation om dit systeem wat te vereenvoudigen. Dat levert, als eindproduct op micro-



Illustratie: Koen Peeters

**Figuur 12** Een numerieke berekening van een lipide bilaag

niveau, een vrije energie op,  $F_\epsilon$ , die een functie is van een kansverdeling  $\psi$  op de verzameling van toestanden. Stationaire punten van  $F_\epsilon$  zijn weer evenwichtstoestanden. De energie  $F_\epsilon$  heeft een subscript  $\epsilon$ , en dit is de belangrijke parameter. Grof gezegd is  $\epsilon$  de dikte van een membraan, en we zullen de limiet gaan bestuderen waarin  $\epsilon$  klein wordt. Dit kan gezien worden als uitzoomen, en dit uitzoomen is weer een voorbeeld van die schaaloverbrugging die ik eerder noemde. Ik zal niet ingaan op de nog aanzienlijke aannamen die we doen om het probleem te simplificeren, en ook niet op de methode van Gammaconvergentie die we gebruiken om dit resultaat te bewijzen. Laat ik alleen zeggen dat we slechts de tweedimensionale situatie aankunnen. We kunnen dus nog niet spreken over oppervlakken in de ruimte, wat de fysisch relevante situatie is, maar alleen van krommen in het vlak. Maar in deze situatie is het wel gelukt om een mooi resultaat te bewijzen, waarin we feitelijk een reeksontwikkeling afleiden van de energie in de kleine parameter  $\epsilon$ . De context is die van een membraan in twee dimensies, of, zoals het ook gesteld kan worden, een cilindervormig membraan in drie dimensies. In de limiet  $\epsilon \rightarrow 0$  gaat de dikte van dit membraan naar nul en houden we een



Illustratie: Tobias Baanders

**Figuur 11** Een biologisch membraan in artist impression

kromme  $y$  over in het vlak. De stelling is dat voor kleine  $\epsilon$  de vrije energie van het membraan zich zo laat beschrijven:

$$F_\epsilon \approx 2 + \int_y (m-1)^2 + c\epsilon(\#\text{uiteinden}) + \frac{\epsilon^2}{4} \int |y''(s)|^2 ds,$$

Ik zal de termen in deze uitdrukking hier uitleggen. Allereerst is er een term die constant is in  $\epsilon$ , gelijk aan 2, en hier is meteen te zien dat we in dimensieloze grootheden werken. Vervolgens is er een term, eveneens op het niveau van orde 1, die afwijkingen penaliseert van massa  $m$  gelijk aan 1. Voor de interpretatie hiervan kunt u denken aan een elastiekje. Dat is te beschrijven als een lang voorwerp van verwaarloosbare dikte, dus als een kromme, maar het heeft nog steeds een massa per lengte-eenheid. Nog sterker, aan deze massa per lengte-eenheid kan de rektostand worden afgelezen: als ik het elastiekje uitrek, gaat de massa per lengte-eenheid omlaag, omdat ik dezelfde massa verdeel over een langere kromme. Deze term penaliseert afwijkingen van de massa van de waarde 1; dat impliceert dat de limietkromme een voorkeurslengte heeft, net als het elastiekje, en afwijkingen daarvan leiden tot hogere energie.

De tweede term, op orde  $\epsilon$ , is een penalisatie van het aantal uiteinden van de kromme. De limietkromme kan gesloten zijn, in welk geval deze term verdwijnt; anders heeft het aantal uiteinden een bijdrage in de energie. In de laatste term, tenslotte, komen we de penalisatie van buiging tegen, op orde  $\epsilon^2$ . Deze integraal is dezelfde energie die Euler ooit afleidde voor de buiging van een elastische staaf.

De bovenstaande reeksontwikkeling is een belangrijk resultaat. Ten eerste komen de drie soorten gedrag die we wilden beschrijven, rek, breuk, en buiging, hier samen voor. Ten tweede zien we een interessante verdeling van schalen. Als  $\epsilon$  klein is, is buiging het goedkoopst, in energetische zin; daarna komt breuk (het aantal uiteinden) en daarna rek. Dat betekent dat een membraan liever zal breken dan rekken en liever zal buigen dan breken.

We keren terug naar de oorspronkelijke vraag: hoe kunnen we begrijpen hoe de weerstand tegen rek, breuk en buiging ontstaat uit de eigenschappen van de lipiden? Hoe kunnen we in het complexe gedrag van de lipiden (zie figuur 12) dit relatief simpele, vaststofgedrag herkennen?

Dit resultaat geeft daar een antwoord op.

Ik heb het wiskundige proces dat van model naar resultaat gaat, weggelaten, maar u kunt zich voorstellen dat de details van dat proces informatie geven over waar de verschillende termen vandaan komen. Met die details is het mogelijk om bijvoorbeeld de term die over buiging gaat te koppelen aan bepaalde eigenschappen van de lipiden. Dit resultaat is ook een voorbeeld van het gebruik van variationale methoden. Deze reeksontwikkeling is een reeksontwikkeling voor de energie: we karakteriseren het systeem door de energie te karakteriseren. Het is ook een voorbeeld van schaaloverbrugging, wat tegenwoordig ook wel bekend is als multi-scale analysis.

Multi-scale analysis heeft een interessant geschiedenis, maar een nog veel interessantere toekomst, onder andere vanwege het belang van dit soort zwakke typering. De drie technische universiteiten zijn afgelopen voorjaar een Center of Excellence gestart met als titel *Multi-scale Phenomena*. Binnen CA-SA zien we hierin prachtige mogelijkheden, te beginnen met de aanstelling van een nieuwe hoogleraar.

Hiermee wil ik het deel van mijn inreerede over variationale methoden beëindigen en starten met het tweede onderwerp van mijn rede: het onderwijs.

### Onderwijs

Toen ik nog onderzoeker was aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam, was een van de aanlokkelijke aspecten van een overstap naar deze universiteit het feit dat ik mij hier met onderwijs bezig zou kunnen houden. De TU/e heeft op veel manieren met onderwijs te maken: wij geven allereerst zelf onderwijs aan onze studenten, wij borduren daarmee tevens voort op het onderwijs dat deze studenten in het voortraject hebben genoten en wij leiden tenslotte zelf docenten op die in dat voortraject lesgeven. Ik vind dat deze universiteit zich moet inzetten voor kwaliteit in elk van deze drie vormen van onderwijs en deze stelling ga ik nu onderbouwen.

In mijn vakgebied, de wiskunde, heeft de Technische Universiteit Eindhoven met mensen als Seidel en De Bruijn al vroeg een naam gevestigd op het gebied van onderwijs; dat werd onlangs weer bevestigd door het overweldigende enthousiasme waarmee een cd met oude wiskundedictaten, die met liefde en toewijding door Jan de Graaf is samengesteld, binnen en buiten de universiteit werd ontvangen. Dat was het verleden. Sinds mijn komst ben ik onder de indruk geraakt van de kwaliteit van het onderwijs dat door de wiskundegroep wordt gegeven en van de mate

waarin het belang van goed onderwijs door de medewerkers wordt gevoeld. Het verzet dat algemeen leeft tegen het denken in termen van rendementpercentages is daar een goed voorbeeld van.

Wiskunde heeft een uitzonderingspositie in het onderwijsveld, doordat het meer dan elk ander vak aan de basis staat van alles dat we in de bètatechnieksector doen. Het is daarmee een vak dat belangrijk is voor de gehele universiteit, en ik zeg dat niet uit arrogantie, maar uit observatie. De afgelopen jaren hebben alle bacheloropleidingen aan deze instelling meer tijd in het eerste jaar ingeruimd voor wiskunde. Dat is nogal wat. Het dalende niveau van de wiskundige kennis en vaardigheden bij onze instroom wordt blijkbaar bij alle studierichtingen als een nijpend probleem ervaren. Ik wil daarom over de grenzen van deze instelling heen kijken, naar het voortgezet onderwijs, naar de problemen die daar leven, en vooral naar de positie en de rol van docent.

### Vakinhoudelijke opleiding van docenten

Iedereen is het erover eens dat het belangrijk is om goede docenten te hebben. Het vergt vele kwaliteiten om een goed docent te zijn; vakinhoudelijke kennis is daar één van. Op dit gebied wil ik hier ingaan.

Uit allerlei onderzoeken blijkt dat het vakinhoudelijke opleidingsniveau van docenten een belangrijke invloed heeft op de kwaliteit van het onderwijs. Smithers en Robinson bijvoorbeeld, hebben in het Verenigd Koninkrijk gekeken naar A-level (eindexamen)cijfers natuurkunde [4]. Zij vinden dat tien procent van de variatie in de gemiddelde cijfers tussen scholen kan worden verklaard uit het niveau van opleiding van de docenten in het vak natuurkunde: dus door het niveau van vakinhoudelijke expertise.

Voor onderzoek van dit type is tien procent overigens een verrassend groot getal; er zijn namelijk zoveel andere factoren die eveneens het gemiddelde cijfer beïnvloeden. Een deel daarvan nemen Smithers en Robinson expliciet mee; deze tien procent is het op-een-na-grootste effect, een groter effect dan het feit of het een witte of een zwarte school betreft, een rijke of arme, een *comprehensive* of een *grammar school*, of dat nu gaat om een meisjes-, jongens-, of gemengde school. De voorspellende waarde van de opleidingsgraad van de docent wordt alleen nog overtroefd door de voorspellende waarde van de leerling zelf: de cijfers die dezelfde leerlingen twee jaar eerder gescoord hebben vertegenwoordigen met vijftien procent een nog grotere voorspellende waarde. Dit is de situatie

aan het eind van het schoolcurriculum. Aan het begin geldt iets vergelijkbaars.

In de VS hebben Hill, Rowan, en Ball gevonden dat een belangrijk deel van de variatie op een rekentoets in groep 3 wordt verklaard door wiskundige kennis van de onderwijzer, op een veel hoger niveau dan wat op de basisschool wordt onderwezen [5].

Als laatste laat ik twee onderzoekers zelf aan het woord: Goldhaber en Brewer hebben gekeken naar wat wij groep 8 en klas 2 en 4 zouden noemen. Zij stellen in [6]: "Students whose teachers possess a B.A. or M.A. in math outperform other students in math." (Toevoeging: met een docent die zowel een BA als een MA in wiskunde heeft, lig je gemiddeld na vier jaar een trimester vóór op leerlingen die niet een dergelijke docent hebben.) Ook zeggen ze: "In mathematics, having a B.A. in education actually has a statistically significant negative impact on scores in math."

Deze onderzoeken tezamen suggereren een belangrijke stellingname: vakkennis is cruciaal; en vooral vakkennis op een niveau dat veel hoger ligt dan het niveau waarop de docent zelf lesgeeft. Wat betekent dit nu voor het voortgezet onderwijs en vooral voor het vwo? In het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs moeten de docenten mensen zijn met een academische opleiding, mensen die de universiteit uit eigen ervaring kennen, mensen met een academisch denken werk niveau. Anders kunnen leerlingen nooit goed voorbereid zijn op de universiteit. En hier wringt nu de schoen.

Het beroep van leraar is hard bezig geen beroep te worden voor academici, zoals Maarten Huygen onlangs opmerkte (zie [7]): van de 20.000 mensen die jaarlijks aan het leraarschap beginnen komt minder dan drie procent van de universitaire lerarenopleiding [8]. De academisch gevormde leraren zijn daarmee een soort die op uitsterven staat: nieuwgeborenen zijn er weinig, de bestaande populatie is sterk vergrijsd en van de paar jongeren emigreert een zorgwekkend groot deel naar banen buiten het onderwijs. Over tien jaar zijn onze studenten opgeleid door docenten die zelf nooit een universiteit van binnen hebben gezien; deze docenten zullen zelf geen master hebben, geen universitaire bachelor, en zij hebben zelfs geen vwo-diploma. Toen zij zelf leerling waren, waren zij daar namelijk niet sterk genoeg voor. Het laat zich raden welk effect deze trend op onze studenten zal hebben.

Laat het duidelijk zijn dat ik de individuele docent, met wat voor opleiding dan ook, van harte steun. Veel docenten spannen zich

met hart en ziel in, om niet te zeggen, werken zich uit de naad, om goed onderwijs te verzorgen. Ze verdienen daarvoor alle lof en alle steun. Waar ik me tegen verzet is ons huidige systeem, waarin we docenten vragen systematisch boven hun niveau les te geven. Dat is een slecht idee.

Alsof het nog niet erg genoeg is dat er weinig jonge academici kiezen voor het leraarschap, hebben we ook nog eens als samenleving het belang van de opleiding en de vakkennis van docenten verwaarloosd. Sinds het HOS-akkoord in de jaren tachtig krijgen eerstegraads- en tweedegraadsleraren hetzelfde salaris. Met de invoering van de wet *Beroepen in het Onderwijs*, begin dit jaar, kunnen scholen vakoverstijgende teams samenstellen. Dan kan de gymleraar wiskunde geven en de wiskundeleraar gym. Van beide verwacht ik brokken, zij het van verschillende aard.

Overigens zijn de eindtermen voor de hbo-lerarenopleidingen met deze wet geformuleerd in termen van competenties. Dat zijn boterzachte criteria en met de outputfinanciering van de hbo-lerarenopleidingen in gedachten verwacht ik vooral dat deze tot nog meer diploma-inflatie zullen leiden. En waar de gymleraar in het voorbeeld van daarnet nog een akte nodig heeft, kan de school sinds de invoering van het nieuwe functiewaarderingssysteem goedkope onderwijsassistenten voor de klas zetten, aan wie geen enkele eis wordt gesteld qua opleiding of diploma.

We zijn feitelijk aangeland in een situatie waarin iedereen voor de klas kan komen, dat de kwaliteiten die een docent bezit, hetzij door talent, hetzij door jarenlange training, inspanning en ervaring, geen rol meer spelen. Geen wonder dat de status van de docent binnen en buiten de school zo laag is. Geen wonder ook, dat academici naar andere banen uitkijken. En dat zal zo blijven totdat we vakkennis en opleidingsniveau weer de status geven die ze verdienen.

#### *De Technische Universiteit Eindhoven*

Uiteraard vind ik dat de politiek hier een verantwoordelijkheid heeft en daarmee ook wij als kiezers. Maar ook de academische wereld heeft hierin een verantwoordelijkheid, en aangezien we hier bijeen zijn concentreer ik me op de Technische Universiteit Eindhoven. Ik vind dat deze universiteit zich moet inspannen voor goed onderwijs in het vwo en voor een goede opleiding aan docenten. Er is al een goed begin:

a. De lezingencyclus binnen het *Pre Univer-*

*sity College* (PUC) is een handreiking naar scholen. De activiteiten binnen het PUC moeten we zien als marketing: we brengen toekomstige 'klanten' in contact met ons 'product'. Dit is belangrijk, maar het is slechts een deel van het verhaal.

- b. De samenwerking met *Fontys* op het gebied van de eerstegraadslerarenopleiding is een uitstekend initiatief. Binnen deze samenwerking gaat de TU/e de vakinhoudelijke kwaliteit borgen. Dit moet ertoe leiden dat het niveau van inhoudelijke scholing van de Fontysafgestudeerden stijgt. Dit is heel hard nodig. Vanuit nationaal perspectief kan ik het belang van deze samenwerking niet genoeg onderstrepen.
- c. Bij vrijwel alle faculteiten bestaan allerlei kleinere initiatieven, zoals masterclasses, voorbeeldlessen, diverse samenwerkingen en nog veel meer. Deze moeten we vooral aanmoedigen en ondersteunen.
- d. Over de instaptoets is veel te doen geweest. Het is belangrijk om die zo te presenteren dat de student niet het gevoel krijgt verantwoordelijk te worden gehouden voor de fouten die bestuurders hebben gemaakt. Maar binnen deze randvoorwaarde pleit ik ervoor om hier vooral mee door te gaan. Het politieke signaal dat het niet goed gaat met het onderwijs in het vwo moeten we blijven geven.
- e. *Wortel TU/e* is een project om studenten en leerlingen via een webinterface sommen te laten maken. Een mogelijkheid die zich hiermee voordoet is dat leerlingen al vóór het eindexamen, de instaptoets op school kunnen uitproberen. Dit brengt de vraag of het vwo voorbereidt op het wetenschappelijk onderwijs hopelijk ook onder de aandacht van de docent.

Maar we kunnen verder gaan. Leiden en Utrecht bieden aan de betere vijfde- en zesdeklassers intensieve programma's aan, in de orde van twee dagen per week. Dit is geen wervingsactiviteit, maar een investering in het nationale onderwijs waarmee het kortetermijnbelang van de universiteit maar heel beperkt wordt gediend. Op de lange termijn, daarentegen, is zowel de bemoeienis zelf, als het signaal dat bemoeienis nodig is, van groot belang.

Wat ik hier beschrijf zijn maatregelen die de TU/e autonoom kan invoeren en dat voor een groot deel al doet. Dat is mooi, maar nog niet genoeg. Veel van de problemen in het onderwijs kunnen alleen op nationaal niveau worden aangepakt. Ik wil hier nog één idee neerleggen voor een dergelijke maatregel op nationaal niveau.



Illustratie: Ruben Oppenheimer

### Certificatie

Ik zei net dat over tien jaar het merendeel van de leerlingen in het pre-academisch onderwijs, het vwo, zal worden opgeleid door docenten die nooit langs de universiteit gekomen zijn, daarmee niet universitair zijn opge-

leid, en ook niet op hun academische kwaliteiten zijn geselecteerd. Met deze situatie doen we de leerlingen en de maatschappij tekort.

Ik zie maar één uitweg hieruit: dat de universiteiten in samenwerking met de vakverenigingen een systeem van certificatie opzetten, gefaciliteerd door een vorm van nascholing. De nascholing moet wel van een ander type zijn dan wat nu gebruikelijk is — het moet intensieve en vakinhoudelijke nascholing zijn, verplicht voor alle docenten, afgesloten met een examen waar je ook voor kunt zakken én de resultaten van dit examen moeten openbaar zijn. Een dergelijk certificatiesysteem dient meerdere doelen tegelijk. Vak-kennis wordt zichtbaar, voor de docent, de school en de ouder; de innige koppeling tussen vakinhoudelijke kennis en kwaliteit van het onderwijs wordt benadrukt; en uiteraard heeft een dergelijk systeem ook een selecterende werking en stimuleert het mensen om

zich te verbreden en verdiepen. Al deze effecten verhogen de status van het beroep en maken het aantrekkelijker voor academici. Zo'n certificatiesysteem vereist gezamenlijke actie van de universiteiten, de vakverenigingen en de wetgever. Met name die laatste, de wetgever, is een trein die op dit moment de andere kant op dendert, naar meer vrijheid en blijheid voor alle betrokkenen. Een dergelijk systeem staat dus niet morgen op de rails. Maar als academisch instituut hebben wij de verantwoordelijkheid om verder te kijken dan morgen. Het probleem van het gebrek aan academisch geschoolde leraren gaat niet weg als wij er niets aan doen.

Ik heb met opzet niets gezegd over de kennissamenleving, over innovatie, en hoe het kabinet daar tegenaan kijkt. Dat zou te gemakkelijk zijn. Maar kijk wat dat betreft eens naar de komische kanttekening van Ruben Oppenheimer die mijn mening hierover heel aardig verwoordt.

### Referenties

- 1 R.V. Kohn, F. Otto, 'Upper Bounds on Coarsening Rates', *Communications in Mathematical Physics* **229**, (2002), pp. 375–395
- 2 S.C. Hardy, P.W. Voorhees, 'Ostwald Ripening in a System with a High Volume Fraction of Coarsening Phase', *Metallurgical Transactions A* **19A** (1988), pp. 2713–2721
- 3 G. Alberti, R. Choksi, F. Otto, *Uniform Energy Distribution for Minimizers of a Nonlocal Functional*, in preparation
- 4 A. Smithers, P. Robinson, 'Physics in Schools and Colleges', <http://www.buckingham.ac.uk/education/research/ceer/pdfs/physicsprint.pdf> (2005)
- 5 H. C. Hill, B. Rowan, D. L. Ball, 'Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement', *American Educational Research Journal* **42**, (2005), pp. 371–406
- 6 Goldhaber, Brewer, 'Teacher Licensing and Student Achievement', *Better Teachers, Better Schools*, Thomas B. Fordham Foundation, [www.edexcellence.net/foundation/publication/publication.cfm?id=15](http://www.edexcellence.net/foundation/publication/publication.cfm?id=15) (1999)
- 7 M. Huygen, 'Leraar is helaas geen vak meer voor academici', *NRC* (27 mei 2006)
- 8 Zie voor de aantallen docenten pagina 20 van de Nota Werken in het Onderwijs 2006 van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, en voor de aantallen ULO-afgestudeerden de onderwijsvisite 2003, [www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf](http://www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf)
- 9 Zie voor de aantallen docenten pagina 20 van de Nota Werken in het Onderwijs 2006 van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, en voor de aantallen ULO-afgestudeerden de onderwijsvisite 2003, [www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf](http://www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf)