Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 9432
3506 GK Utrecht
p.drijvers@fi.uu.nl

Onderwijs

Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra

Van allerlei kanten wordt er geklaagd over het rendement van het wiskundeonderwijs in de tweede fase van het vwo. Studenten voelen zich slecht voorbereid op de universiteit en hebben de 'Lieve Maria' actie op touw gezet. Op universiteiten zijn zogenaamde deficiëntiecursussen gemeengoed. De opvattingen over benodigde maatregelen zijn verdeeld. Stemmen gaan op om minder tijd aan contexten te besteden en meer algebraïsche basisvaardigheden te oefenen. Een aantal medewerkers van het Freudenthal Instituut heeft in een recente bundel 'Wat a is, dat kun je niet weten' [1] de standpunten over algebraonderwijs opnieuw bepaald.[1] Paul Drijvers, redacteur van deze publicatie, stelt dat de gesignaleerde problematiek serieus genomen moet worden, maar dat de voorgestelde oplossingen hun doel voorbij schieten.

Het gaat niet goed met algebra in het vwo. De 'afnemers' uit het hoger onderwijs, bijvoorbeeld de technische universiteiten, klagen in toenemende mate over de gebrekkige beheersing van algebraïsche vaardigheden van eerstejaars studenten. Vervolgopleidingen voeren instaptoetsen in die zich vooral op deze basisvaardigheden richten. De resultaten daarvan laten zien dat slechts weinig studenten aan de verwachtingen van de docenten voldoen. "Is dit wat het studiehuis oplevert?" vraagt men zich af.

Op dit moment presteert de vwo-leerling op algebraïsch gebied onder de maat. We treffen in 6-vwo leerlingen aan die pittig argumenteren, hun verstand durven gebruiken, goede werkstukken maken en die in het openbaar met flair verdedigen. Maar wat algebra betreft zijn diezelfde leerlingen vaak hulpeloos. Een kleine hobbel, bijvoorbeeld in de vorm van een formule met een breuk, blijkt niet zelden onoverkomelijk te zijn.

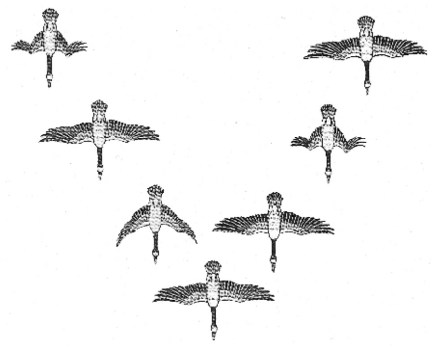
Wat te doen? Er gaan stemmen op om de klok een tijd terug te zetten: 'back to the basics', weg met al die zogenaamd realistische contexten, gewoon veel oefenen! Dit artikel gaat over twee 'hete hangijzers' in de discussie over schoolalgebra en aansluitingsproblematiek: de rol van contexten en de algebraïsche vaardigheden. Hoewel de gesignaleerde problemen in de tweede fase van het vwo de aanleiding vormen van dit artikel, hebben de voorbeelden en de conclusies ook betrekking op de onderbouw, waar de algebralijn immers wordt ingezet.

Context en abstractie

Het gebruik van contexten in de wiskundeles roept vragen op. Zijn contexten wel nodig en moeten we wel zo voorzichtig zijn met de overgang van concreet naar abstract? Veelgehoorde kritiek op de manier waarop contexten in het huidige wiskundeonderwijs functioneren, betreft de volgende punten.

Het gebruik van gekunstelde contexten

Niet zelden zijn contexten gekunsteld en irreëel. Het zijn geen herkenbare problemen die op een natuurlijke manier tot wiskunde leiden, maar ze zijn geconstrueerd om wiskunde te verpakken. In een schoolboek vinden we bijvoorbeeld de tekst "Een ijsblokje met ribben van 30 mm begint langzaam te smelten. Elke minuut worden de ribben 1,5 mm korter." Dat is een context die vanuit fys-



Figuur 1 Vogels in V-formatie

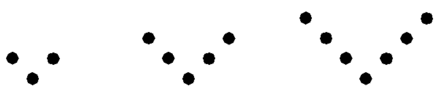
isch oogpunt eerder verwarring oproept dan aanleiding is tot wiskundige activiteit. In zulke gevallen is het eerlijker de wiskunde 'puur' te presenteren.

Het misverstand van het dagelijks leven
Het idee van contexten wordt wel eens karikaturaal opgevat als 'elk sommetje moet met een verhaaltje uit het dagelijks leven beginnen'. In een schoolmethode staat bijvoorbeeld: "Meneer Kok besluit zijn grasveld te vergroten. Aan twee kanten komt er een even brede strook van x meter bij." Dergelijke contexten zijn niet realistisch en niet productief.

Het achterwege blijven van abstractie
Als de context nooit wordt ontstegen, dan houdt de algebra een ad-hoc karakter en wordt aan abstraheren niet toegekomen. In de situatie van de V-formatie bijvoorbeeld (zie figuur 1 en 2) moet het niet blijven bij het bepalen van het aantal ganzen of stippen in het vijfde patroon, maar moeten ook vragen gesteld worden als: waarom is het aantal stippen altijd oneven? Of: hoe kun je het aantal stippen in het n-de patroon uitrekenen?

Deze kritiek op het gebruik van contexten in de huidige onderwijspraktijk is terecht. De conclusie ervan is echter niet dat contexten overbodig zijn; wel dat er het nodige te verbeteren valt aan de manier waarop ze in de praktijk van het wiskundeonderwijs functioneren. Waarom niet zonder context en hoe moet het dan wel? Eerst drie voorbeelden van contexten die aanleiding zijn tot algebra.

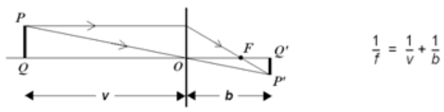
Algebra uit rekenen
Misschien kent u het volgende rekenkunstje.



Figuur 2 Abstracte V-formatie

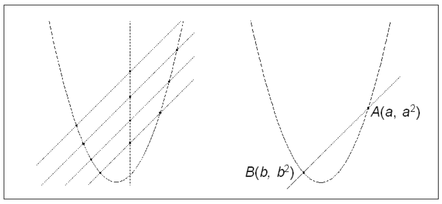
Om 65 te kwadrateren, vermenigvuldig ik de 6 aan het begin met 7, dat is 42, en daar plak ik het kwadraat van 5 achter. Dat geeft dus 4225, klopt. Bij 15 is het nog eenvoudiger te controleren: 1 keer 2 en dan 25 erachter geeft 225. En bij 95 werkt het ook! Met vwo-leerlingen van 13 of 14 jaar kan de verbazing dat dit werkt worden uitgebuit. Om 65 keer 65 te schatten met 60 keer 70, dat is wel een verstandig begin. Maar waarom heb ik dan 25 te kort? Klopt dit altijd? En vooral: hoe kun je dat zeker weten? Met algebra natuurlijk! Uitwerken van $(10a+5)^2$ is de sleutel. Dergelijke intrigerende rekenopgaven, waarvan er meer te vinden zijn in de oefenbundel van Martin Kindt [2], vragen om algebra als middel dat zekerheid verschaft. In deze rekencontext wordt niet alleen algebraïsche basisvaardigheid geoefend, maar blijkt ook hoe algebra functioneert als onderdeel van de wiskundige activiteit als geheel.

De lenzenformule
In figuur 3 staat de lenzenformule die leerlingen van 14–15 jaar bij natuurkunde tegenkomen. De formule beschrijft de samenhang tussen drie grootheden: brandpunt-, voorwerp- en beeldafstand (f, v en b). Een interessante vraag is nu: hoe verandert de beeldafstand bij een gegeven lens (dus f is vast) als het voorwerp van de lens af beweegt? De constructie in de figuur geeft al een idee: als het lijnstuk PQ naar links beweegt, zal de hoek die de lijn PO maakt met de horizontale as kleiner worden met als gevolg dat P' als het ware naar F toe kruipt. De volgende redenering is hierop een belangrijke aanvulling. Bij een gegeven lens is de som $\frac{1}{v}+\frac{1}{b}$ constant. Als v groter wordt, dan wordt $\frac{1}{v}$ kleiner. Omdat het totaal $\frac{1}{v}+\frac{1}{b}$ niet verandert, moet $\frac{1}{b}$ wel groter worden en dus wordt b kleiner. Andersom geldt natuurlijk: als v kleiner wordt, dan wordt b juist groter. De dynamiek in de fysische context ondersteunt het redeneren met de algebraïsche vormen, die betekenis krijgen vanuit de natuurkundige context.



Figuur 3 De lenzenformule in beeld

Algebra in meetkunde
Het voorbeeld in figuur 4, aan de orde in 5 vwo, heeft een meetkundige achtergrond. In het linkerscherm is (met het meetkundeprogramma Cabri) een parabool geconstrueerd. Deze wordt gesneden door enkele evenwijdige lijnen. We letten nu op de middens van de snijpunten van de lijnen en de parabool. De meetkundige plaats van deze middens lijkt een verticale halve rechte te zijn. Maar is dat echt zo en wat is de positie van die lijn? Dit probleem vraagt om algebra. Stel dat een lijn met voorgeschreven richting de parabool in twee punten snijdt. Kies een handig assenstelsel en noem de x-coördinaten a en b; de punten zijn dan $A(a,a^2)$ en $B(b,b^2)$. De richtingscoëfficiënt van AB is nu $\frac{a^2-b^2}{a-b}$. Omdat we in de meetkundige situatie de richting van de lijnen vast hebben gekozen, weten we dat deze uitdrukking in a en b een vaste waarde heeft.



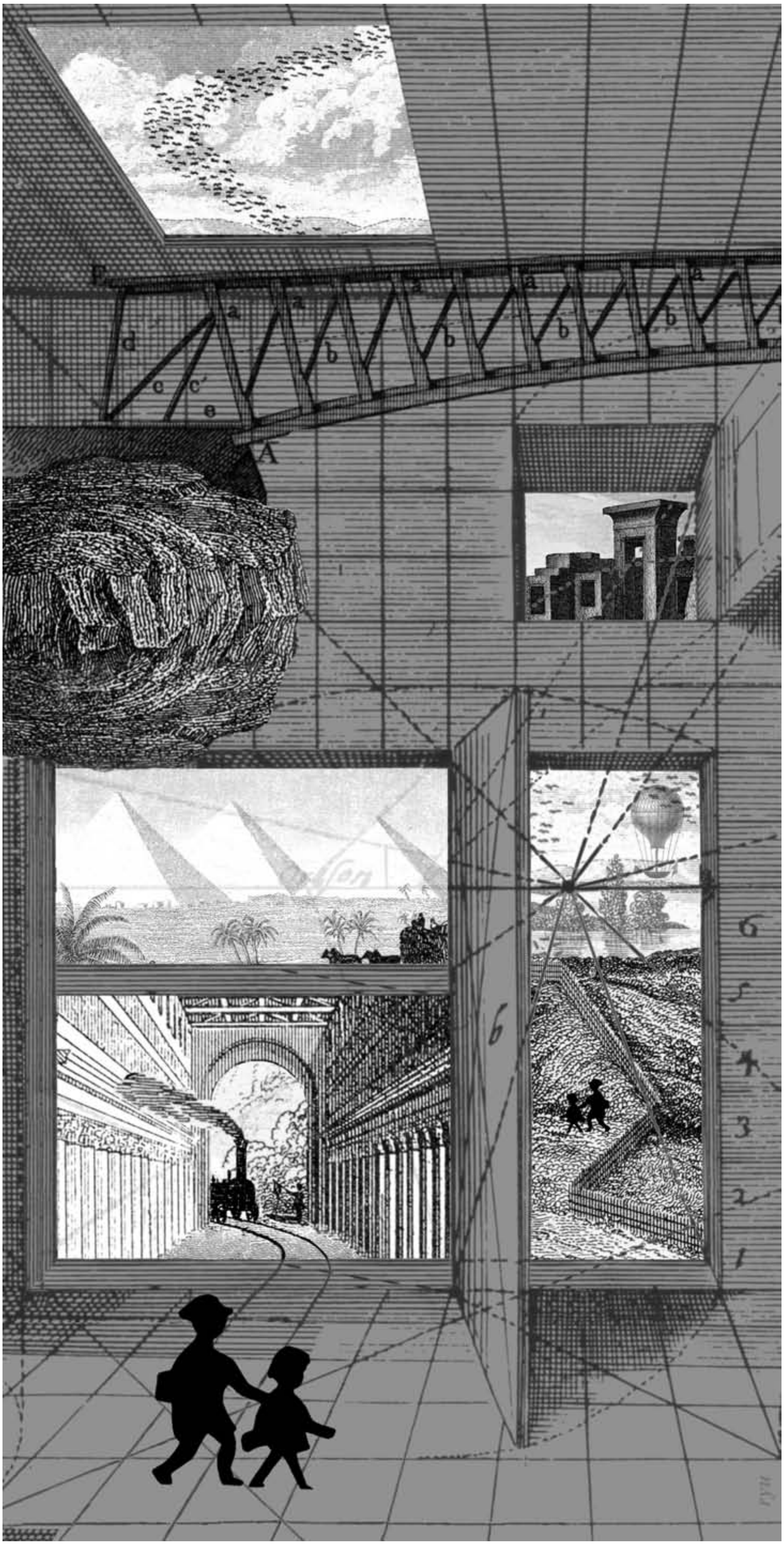
Figuur 4 Een parabool snijden met een lijn met vaste richting

De algebra vertelt ons nu dat

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b, \quad \text{voor} \quad a \neq b$$

En we weten dat $a+b$ constant is. Dus $(a+b)/2$ is ook constant. De verbinding algebra-meetkunde ligt nu voor de hand: de x-coördinaten van die middens zijn $(a+b)/2$ en dus constant. Hieruit volgt het meetkundige feit dat de middens van AB op één lijn liggen. In het algebraïsch deel van dit oplossingsproces is de vereenvoudiging van de uitdrukking voor de richtingscoëfficiënt de belangrijkste schakel. De essentiële stappen, de ontbinding van en het uitdelen van een factor $a-b$, zijn algebraïsch en hebben geen direct zichtbare meetkundige representant. De meetkunde is aanleiding tot algebra, maar de band met de oorspronkelijke context wordt hier tijdens de algebraïsche operatie dus even losgelaten.

Algebra: abstraheren van context
Algebra is een hulpmiddel bij het oplossen van problemen. Deze problemen kunnen zich in allerlei gebieden afspelen: in het rekenen (het eerste voorbeeld), in de wiskunde zelf (meetkunde in het derde voorbeeld, maar ook analyse of kansrekening), in andere exacte vakken (natuurkunde in het tweede voorbeeld), economische wetenschappen, levenswetenschappen of in de dagelijkse (beroeps)praktijk. Deze gebieden leveren de contexten waar algebra uit voort komt en waarbinnen ze functioneert.



illustratie Ryu Tajiri

In de *Van Dale* wordt 'context' onder andere omschreven als het 'verband waarin iets zich voordoet'. Algebra doet zich voor in situaties. Daarmee vormen contexten de bron, de aanleiding en de legitimatie van de algebra. Het is onterecht en gekunsteld om die aanleiding te negeren. Het uitstellen van toepassen 'tot later' is niet motiverend en evenmin productief.

Contexten, in bovenstaande zin opgevat, bieden de leerling grond onder de voeten en zijn het vertrekpunt voor algebra. Een geschikte probleemsituatie wordt vertaald in algebraïsche termen, in een algebraïsch model. Dat modelleren is onderdeel van wat in didactiekjargon horizontaal mathematiseren wordt genoemd. Daar moet het niet bij blijven. Geleidelijk wordt de context losgelaten en gaat het algebraïsch model een eigen leven leiden, waarbij kennis van de abstracte algebrawereld wordt opgebouwd en toegepast. Zo nodigt de context uit tot abstraheren: het loslaten van de concrete context en het opbouwen van een overstijgende wereld van algebraïsche objecten en operaties, die leerlingen zich geleidelijk aan eigen maken. Deze abstractie is een essentieel onderdeel van het zogeheten verticaal mathematiseren [3].

Abstraheren is bijzonder productief, omdat het je in staat stelt klassen van op het eerste gezicht verschillende situaties vanuit hetzelfde overstijgende perspectief te bekijken en aan te pakken. Abstraheren is echter ook moeilijk: een vertrouwd, concreet referentiekader wordt vervangen door een relatienetwerk van wiskundige objecten en operaties. De aanvankelijk abstracte algebrawereld wordt steeds meer een betekenisvolle 'realiteit', die daarnaast ook functioneert bij het oplossen van concrete problemen.

Omdat abstraheren zo complex is, kun je er niet mee beginnen. Het moet uit een context ontstaan. Dat betekent natuurlijk niet dat het achterwege moet blijven. Een van de doelen van het algebraonderwijs in het vwo is dat leerlingen dit abstractieproces ervaren en daaraan schort het vaak in de huidige onderwijspraktijk.

Samengevat

In schoolalgebra vindt een subtiel samenspel plaats tussen context en abstractie, tussen horizontaal en verticaal mathematiseren. De context slaat een brug tussen de ervaringswereld en de wiskundewereld en nodigt uit tot abstractie. Contexten buiten beschouwing laten en meteen insteken op het abstracte niveau is een heilloze weg: voor veel leerlingen is dit niet haalbaar en bovendien leidt het tot manipuleren in een algebrawereld die voor hen geen betekenis heeft. Daardoor ontwikkelen zij niet het vermogen tot modelleren met en toepassen van algebra, of tot transfer naar andere vakken.

In praktijk functioneren contexten niet optimaal. De kunst is om geschikte contexten te vinden die passen bij de leerling, het onderwijsniveau en het doel van het onderwijs. Dat is geen eenvoudige opgave! Voor bètaprofielen liggen toepassingen uit de exacte sfeer voor de hand. Ook is het aan te bevelen om contexten te gebruiken die langer ‘leven’ dan één, vaak korte, opgave.

Aan het begin van deze paragraaf was de vraag: zijn contexten wel nodig en moeten we wel zo voorzichtig zijn met de overgang van concreet naar abstract? De antwoorden zijn dus: ja, in het algemeen zijn contexten nodig, en zeker, de overgang van concreet naar abstract is een subtiele, die verre van triviaal is. De abstractiestap moet, zeker in de tweede fase van het vwo, wel worden gezet, maar met beleid.

Algebraïsche vaardigheden

Een tweede discussiepunt is de beheersing van algebraïsche basisvaardigheden, waaraan het instromende studenten in exacte vervolgopleidingen lijkt te mankeren. Het vereenvoudigen van

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

gaat eerstejaars studenten bijvoorbeeld slecht af[2]. Het differentiëren van een functie als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

kan ook onoverkomelijke problemen veroorzaken.

Ook in de internationale literatuur komen we voorbeelden tegen van tegenvallende vaardigheden. Wenger laat bijvoorbeeld zien dat leerlingen en studenten ook vroeger al geen idee hadden hoe ze een vergelijking als

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

naar v moeten oplossen [4]. Moet er dan niet gewoon meer op die basisvaardigheden worden geoefend? Misschien wel, maar dat is zeker niet het hele antwoord.

Basisvaardigheden en symbol sense

Voor deze discussie is het goed verschillende kanten van algebraïsche vaardigheid te onderscheiden. Schoolalgebra omvat het uit-

illustratie Ryu Tajiri

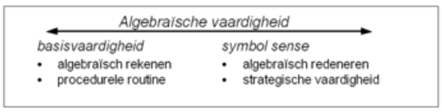
voeren van standaardprocedures zoals het oplossen van eenvoudige vergelijkingen en het vereenvoudigen van uitdrukkingen. Dat is algebraïsche basisvaardigheid, zeg maar algebraïsch rekenen [5]. Het is duidelijk dat leerlingen een aantal basisbewerkingen geroutineerd en foutloos moeten kunnen uitvoeren. Dat vraagt behalve inzicht ook oefening en onderhoud en op dit punt is een herbezinning op de huidige onderwijspraktijk op zijn plaats. Hoewel uitgebalanceerde leerlijnen ontbreken, zijn hiervoor wel aanknopingspunten voorhanden zoals die van het productief oefenen [2].

Maar algebra is meer dan het beheersen van basisvaardigheden. Denk bijvoorbeeld aan:

- een geschikte strategie kiezen, een plan maken, heuristieken gebruiken;
- een algebraïsch model opstellen, algebraïsch modelleren;
- zien hoe het repertoire van basisvaardigheden in de situatie kan worden toegepast;
- overzicht houden op het oplossingsproces zonder te 'verdrinken' in deelstappen;
- vervolgstappen verstandig kiezen;
- globaal kijken naar expressies, formules 'lezen' en daarin relevante en minder relevante kenmerken onderscheiden;
- algebraïsche resultaten interpreteren.

Kemme spreekt in dit verband van algebraïsch redeneren [5]. De redenering bij de lenzenformule is een voorbeeld. In zulke kwalitatieve redeneringen spelen bijvoorbeeld symmetrieoverwegingen en randgevallen een rol, of het identificeren van 'winnende factoren' in een algebraïsch krachtenspel.

In de vakliteratuur wordt voor dit alles het begrip *symbol sense* gebruikt [6–8]. Symbol sense is de algebraïsche expertise of 'algebraïsche geletterdheid' die op de achtergrond de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat.



Figuur 5 Twee kanten van algebraïsche vaardigheid

Figuur 5 geeft de dimensie basisvaardigheid–symbol sense schematisch weer. Het gaat niet om tegenpolen: de twee kanten zijn sterk verweven en het één kan niet zonder het ander. Algebraïsch redeneren is pas goed mogelijk als je de bewerkingen enigszins in de vingers hebt. Andersom is bij het algebraïsch rekenen ook enig redeneren nodig, zeker als de 'automatische piloot' hapert of de situatie afwijkt van de gebruikelijke.

Deze dimensie helpt om het probleem te lokaliseren. De klachten uit het vervolgonderwijs spitsen zich toe op de linkerzijde, wat het pleidooi voor het oefenen van basisvaardigheden verklaart. Het probleem ligt echter complexer. We kijken vanuit dit perspectief even terug op de gegeven voorbeelden.

In het voorbeeld uit de ingangstoets ontbreekt bijvoorbeeld een doel, wat het opstellen van een plan moeilijk maakt. Wat een handige vorm van

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

is, hangt tenslotte van de situatie af. Vermoedelijk zou de score beter zijn als er '$= 0$' achter de uitdrukking had gestaan.

In het voorbeeld van de afgeleide van

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

is het goed mogelijk dat de leerlingen uitstekend in staat zijn om $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ naar x te differentiëren, maar niet zien hoe ze dat kunnen gebruiken in de complexere samenstelling.

Bij het oplossen van

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

naar v is de clou dat leerlingen de vergelijking niet zien als

$$v \times \triangle = 1 + 2 \times v \times \square,$$

waarbij de inhoud van $\triangle$ en $\square$ er niet toe doet omdat de twee wortels niets met v te maken hebben. De basisvaardigheden zijn hier zinloos zolang je niet in staat bent de vergelijking op zo'n globale manier te doorzien. Sterker nog, al te veel oefening met wortelvormen is waarschijnlijk de oorzaak van de veelgemaakte strategische fout om in deze vergelijking eerst te proberen de wortels weg te werken ([4, 9]).

In het eerder gegeven voorbeeld van de parabool en de lijn (figuur 3) zijn leerlingen misschien wel in staat om $a^2 - b^2$ te ontbinden als hun dat 'kaal' wordt gevraagd; de moeilijkheid ligt voor een deel in het herkennen van de toepasbaarheid van deze ontbinding in deze situatie.

De matige prestaties van leerlingen en studenten worden veroorzaakt door de onvoldoende beheersing van het subtiele samenspel tussen routine om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren en impliciete symbol sense vaardigheden die daarbij een rol spelen.

Het gaat dan om het plannen van het oplossingsproces, het herkennen van de toepasbaarheid van basisoperaties in complexere situaties, en het stapelen van verschillende basisoperaties die in principe beheerst worden. Het ontbreken van deze symbol sense vaardigheden is één van de oorzaken van de hulpeloosheid van de leerlingen. Het probleem met het 'kaal' oefenen van basisvaardigheden is dat deze symbol sense aspecten onvoldoende aandacht krijgen. Het strategisch toepassen van basisvaardigheden in complexere situaties moet dus in het algebraonderwijs expliciet aan de orde komen.

Samengevat

Het geïsoleerd oefenen van basisvaardigheden brengt het gevaar met zich mee dat symbol sense vaardigheden onderbelicht blijven. Het gevolg is dan dat leerlingen de algebra niet kunnen toepassen, de oplossingsmethode niet overzien of niet met een stapeling van basisstappen kunnen omgaan. Natuurlijk kan het goed zijn om af en toe een element van het algebrawerk apart te nemen en te oefenen. Toch valt meer te verwachten van geïntegreerde oefening, waarin inzicht en automatisme hand in hand gaan. Beter dan Freudenthal [10]kunnen we het niet zeggen:

"Advocates of insightful learning are often accused of being soft on training. Rather than against training, my objection to drill is that it endangers retention of insight. There is, however a way of training — including memorisation — where every little step adds something to the treasure of insight: training integrated with insightful learning."

Welke kant op met algebra in het vwo?

Wat betekent het bovenstaande nu voor de handelingspraktijk van leerling en docent in de wiskundeles? Om te beginnen is al opgemerkt dat geschikte contexten het vertrekpunt vormen voor mathematiseren. In de Natuurprofielen, waar de kwestie van de algebraïsche vaardigheden het sterkst speelt, zullen deze veelal in de bètasfeer of in de onderdelen van de wiskunde zelf gevonden kunnen worden.

Voor de leerlingen is zo'n context aanleiding tot algebraïseren, waarbij in meer of mindere mate afstand tot de concrete probleemsituatie wordt genomen. Dan is een aantal algebraïsche bewerkingen nodig. Daarbij zijn basisvaardigheden en symbol sense vaardigheden verweven. De basisvaardigheden moeten zodanig beheerst worden dat de leerling niet struikelt over 'letterbreuken', machten en wortels, of haakjes. Symbol sense vaardigheden maken dat de leerling een oplossingsstrategie kan ontwikkelen en aanhouden, en om kan gaan met complexe stapeling van basisoperaties. Samen maakt dit dat de leerling niet langer met lege handen staat bij algebraïsche obstakels. Afhankelijk van de context kan het werk zich op het niveau van de probleemsituatie bevinden of daarnaar terugkeren, of zich meer op het abstracte niveau van de algebrawereld afspelen.

De docent heeft in dit proces een belangrijke rol. Hij kan bepaalde basisvaardigheden uit het oplossingsproces even apart laten oefenen. Als bijvoorbeeld de lenzenformule uit figuur 3 moet worden omgeschreven tot

$$b = \frac{fv}{v - f},$$

kan het uitdrukken van één variabele in andere ook geïsoleerd worden geoefend, wat zeker voor gevallen met parameters is aan te bevelen. Ook kan de docent de vaak impliciete heuristische, begripsmatige en strategische aspecten van het oplossingsproces benadrukken. Of de leerlingen uitdagen om de stap naar de abstractie te zetten. Op deze manier wordt algebraïsche activiteit, die zowel basisvaardigheden als symbol sense omvat, een natuurlijk en geïntegreerd onderdeel van het oplossen van problemen.

Conclusie

De problematiek van de gebrekkige aansluiting tussen voorbereidend onderwijs en hoger onderwijs, de matige beheersing van algebraïsche vaardigheden en het ontbreken van leerlijnen voor ontwikkeling en onderhoud hiervan moet serieus worden genomen. De oorzaak wordt echter al te eenvoudig bij het gebruik van contexten en het gebrek aan oefening van basisvaardigheden gelegd[3]. Te weinig aandacht voor contexten leidt ertoe dat de aanleiding tot en de toepassing van algebra onderbelicht blijven. Dan wordt algebra een geïsoleerde en moeilijk toegankelijke wereld in plaats van een betekenisvol, geïntegreerd en toepasbaar onderdeel van de wiskunde[4]. Een goede context nodigt uit tot abstractie en algebraïsche begripsontwikkeling.

Voor wat betreft de vaardigheden moet de verwevenheid van basisvaardigheden en symbol sense centraal staan. Dat neemt niet weg dat er op het punt van de algebraïsche basisvaardigheden werk aan de winkel is. In onderwerpen als Analytische meetkunde en Dynamische modellen, die in het experimentele examenprogramma voor wiskunde D staan (zie www.ctwo.nl), kunnen algebraïsche basisvaardigheden een natuurlijke en functionele plaats krijgen. De volgende punten geven dan ook richting aan het ontwikkelen van het algebraonderwijs in het vwo:

- Het vertrekpunt zijn goede, functionele en uitdagende contexten die betekenisvol zijn voor de leerlingen van het vwo, aansluiten bij het niveau en het profiel van de leerling en uitnodigen tot abstraheren;
- Algebra wordt organisch ingebed in het wiskundeleerproces en niet aangeleerd als een verzameling geïsoleerde stukjes acrobatiek;
- Algebra is voor de leerling van het vwo zowel een middel om problemen op te lossen als een gebied waarin uitdagende abstractere vragen worden onderzocht;
- Bij schoolalgebra gaan inzicht en beheersing, symbol sense en basisvaardigheid hand in hand.

Noten

1 Voor dit artikel is met name geput uit het hoofdstuk 'Oriëntatie op schoolalgebra' van Paul Drijvers, Aad Goddijn en Martin Kindt.

2 Dit item is afkomstig van de ingangstoets van de TU Eindhoven in 2003.

3 Evenmin ligt naar mijn overtuiging de oorzaak in het gebruik van ICT, maar dat is een onderwerp voor een ander artikel, zie bijvoorbeeld [8].

4 Het is overigens opvallend dat de vernieuwingscommissies van de andere bètavakken het gebruik van contexten in de zogeheten contextconcept benadering als leidraad nemen in de ontwikkeling van de nieuwe examenprogramma's voor de tweede fase h/v per 2010.

Referenties

1 P. Drijvers (red.), *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2006.

2 M. Kindt, *Oefeningen in algebra*, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2003.

3 K. Gravemeijer, 'Revisiting 'Mathematics education revisited' ', in *Freudenthal 100* (H. Ter Heege, T. Goris, R. Keijzer, L. Wesker, red.), Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2005, pp. 106–113.

4 R.H. Wenger, 'Cognitive science and algebra learning', in *Cognitive science and algebra learning* (A. Schoenfeld (Ed)), Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1987.

5 S. Kemme, 'Welke algebra is nodig voor klas 4?', *Nieuwe Wiskrant*, **21**(3) (2002), pp. 29–31.

6 A. Arcavi, 'Symbol sense: Informal sensemaking in formal mathematics', *For the Learning of Mathematics*, **14**(3) (1994), pp. 24–35, http://flm.educ.ualberta.ca/.

7 A. Arcavi, 'Developing and using symbol sense in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, **25**(2) (2005), pp. 42–47.

8 P. Drijvers, 'Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT' *Nieuwe Wiskrant*, **23**(1) (2003), pp. 38–42.

9 K. Gravemeijer, 'Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid' *Nieuwe Wiskrant*, **10**(2) (1990), pp. 29–33.

10 H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1991.