Hans Montanus
Bunuellaan 16
1325 PL Almere
hans.montanus@wxs.nl

Onderzoek

Halltripels en kindertekeningen

In het kader van het NWO-project Leraar In Onderzoek (LIO) heeft wiskundeleraar Hans Montanus zich beziggehouden met onderzoek aan het zogenaamde Hallvermoeden en Belyi-afbeeldingen. Tijdens dit werk heeft hij een resultaat van W.W. Stothers uit 1981 herontdekt, maar dan wel in een alternatieve en combinatorische versie, die geschikt is voor presentatie aan een breder publiek. Dit resultaat wordt hier gepresenteerd. Ander werk op dit gebied zal verschijnen in een wetenschappelijke publicatie samen met Frits Beukers, de begeleider van de auteur. De Groningse wiskundestudent Jeroen Sijsling zette het oorspronkelijke werk om in onderstaande tekst.

Een interessant onderwerp in de getaltheorie is het zoeken naar geheeltallige oplossingen van de vergelijking

$$x^3 - y^2 = k$$

met $|k|$ klein in verhouding tot $|x|$. Hierbij laten we flauwe oplossingen van de vorm $x = n^2$, $y = n^3$, $k = 0$ buiten beschouwing. Op deze gevallen na blijkt vrijwel altijd te gelden dat $|k| > \sqrt{|x|}$. Er zijn echter wel uitzonderingen hierop, bijvoorbeeld één van de simpelste oplossingen: $x = 2$, $y = 3$, $k = -1$. Sterker nog, Danilov en Schinzel hebben zelfs oneindige rijen van oplossingen (x_n, y_n, k_n) met $|k_n|/\sqrt{|x_n|} < 1$ geconstrueerd. Een voorbeeld van zo'n constructie kan worden gevonden in [1]: definieer (a_n, b_n) door

$$(682 + 61\sqrt{125})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{125}.$$

Per constructie hebben we

$$\begin{aligned} a_n^2 - 125b_n^2 &= (682 + 61\sqrt{125})^{2n+1}(682 - 61\sqrt{125})^{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+1} = -1. \end{aligned}$$

Omdat $a_n^2 \equiv -1 \bmod 125$, moet er gelden $a_n \equiv \pm 3 \bmod 5$. Als $a_n \equiv -3 \bmod 5$, dan vervangen we a_n door $-a_n$. Omdat nu $a_n \equiv 3 \bmod 5$, geeft

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(a_n - 3)^2 - 5}{5}, \\ y_n &= b_n(a_n^2 - 9a_n + 19), \\ k_n &= x_n^3 - y_n^2, \end{aligned}$$

een geheeltallige oplossing van onze vergelijking. Het blijkt dat

$$|k_n|/\sqrt{|x_n|} = \frac{27|2a_n - 11|\sqrt{5}}{125\sqrt{(a_n - 3)^2 - 5}},$$

en dit convergeert naar $\frac{54\sqrt{5}}{125} < 1$ als n naar oneindig gaat, hetgeen oneindig veel tegenvoorbeelden levert.

Toch is het verleidelijk om het volgende te poneren:

Vermoeden. *Er bestaat een constante $C > 0$ zo, dat $|x^3 - y^2| \neq 0 \Rightarrow |x^3 - y^2| > C\sqrt{|x|}$ voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Dit staat bekend als het *sterke Hallvermoeden*. Het geloof in dit in 1971 door Marshall Hall Jr. voorgestelde vermoeden is er recentelijk een beetje op achteruit gegaan. De volgende zwakkere variant heeft een grotere kans om waar te zijn:

Vermoeden. *Voor alle $\epsilon > 0$ bestaat er een constante $C_\epsilon > 0$ zo, dat*

$$|x^3 - y^2| \neq 0 \Rightarrow |x^3 - y^2| > C_\epsilon |x|^{\frac{1}{2}-\epsilon}$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Een mooi overzicht van het werk aan deze vermoedens valt te vinden in [2], samen met een oplossing waarvoor

$$|k|/\sqrt{|x|} < \frac{1}{46},$$

tot nu toe het record. Op de tweede plaats in de recordlijst (zie [3]) staat Bosman, met

$$|k|/\sqrt{|x|} < \frac{1}{10}.$$

Polynomiale Halltripels

Het is nogal moeilijk om goed grip te krijgen op de getaltheoretische Hallvermoedens. We kunnen echter ook naar eventuele meetkundige analogieën kijken. Dit gaat als volgt. In plaats van naar gehele getallen kijken we naar polynomen over een algebraïsch afgesloten lichaam van karakteristiek 0, laten we zeggen $\mathbb{C}$. En in plaats van de absolute waarde van een geheel getal kijken we nu naar de graad van een polynoom. Met andere woorden, we kijken naar oplossingen in $\mathbb{C}[z]$ van de vergelijking

$$X^3 - Y^2 = K,$$

en we willen weten hoe groot de graad $\mathrm{grd}(K)$ van K kan zijn vergeleken met $\mathrm{grd}(X)$. Allicht treden de enige interessante gevallen op als de graad van X even is: anders geldt er immers

$$\mathrm{grd}(X^3 - Y^2) \geq \mathrm{grd}(X^3).$$

In tegenstelling tot wat de eerste indruk doet vermoeden, is deze variant van het probleem gemakkelijker dan het origineel. Dat komt omdat polynomen de fijne eigenschap hebben dat ze gedifferentieerd kunnen worden. Voor de graad van polynomen valt nu de sterke variant van het Hallvermoeden te bewijzen:

Propositie. *Laat X en Y polynomen zijn met $\mathrm{grd}(X) = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Als we stellen $K = X^3 - Y^2$, dan hebben we ofwel $K = 0$ ofwel $\mathrm{grd}(K) \geq m+1$.*

Deze propositie kan op diverse manieren worden bewezen. Lezers die bekend zijn met algebraïsche topologie of complexe analyse, kunnen de Riemann-Hurwitz-formule toepassen op de rationale functie X^3/K. Een elementairder bewijs kan verkregen worden door de ABC-stelling voor polynomen toe te passen:

Stelling. *Laten coprieme polynomen A, B, C gegeven zijn, met $A + B = C$. Beschouw $\mathrm{Rad}(ABC)$, het product van de verschillende factoren in de lineaire ontbinding van ABC. Dan geldt*

$$\max(\mathrm{grd}(A), \mathrm{grd}(B), \mathrm{grd}(C)) \leq \mathrm{grd}(\mathrm{Rad}(ABC)) - 1.$$

In feite is deze stelling ook een gevolg van de Riemann-Hurwitz-formule. De stelling komt erop neer dat de som van twee coprieme polynomen die heel veel machten bevatten, zelf niet al te veel machten bevat. Voor een bewijs van deze formule verwijzen we naar [1]. Met deze stelling volgt onze propositie door te nemen

$$A = X^3/\mathrm{ggd}(X,Y),$$
$$B = Y^2/\mathrm{ggd}(X,Y),$$
$$C = K/\mathrm{ggd}(X,Y).$$

De ABC-stelling heeft een analogon in de getaltheorie: het *abc*-vermoeden. De zwakke variant van het Hallvermoeden valt hieruit te bewijzen. Het *abc*-vermoeden is echter nog steeds niet bewezen; het is een Heilige Graal van de huidige wiskunde. Voor een goed relaas over dit vermoeden verwijzen we weer naar [1].

Laten we nog even opmerken dat het echt nodig in om in karakteristiek nul te werken: anders is de propositie simpelweg niet waar. In karakteristiek 2 geldt bijvoorbeeld

$$(z^2)^3 - (z^3+1)^2 = 1,$$

en in karakteristiek 3 hebben we

$$(z^2+1)^3 - (z^3)^2 = 1.$$

Andere polynomen substitueren voor z geeft natuurlijk nog meer tegenvoorbeelden. We weten niet of er in karakteristiek > 3 ook tegenvoorbeelden zijn, maar het lijkt niet onredelijk om dit te veronderstellen.

Van meetkunde naar getaltheorie

We zouden graag iets substantieels zeggen over de Hallvermoedens zonder het *abc*-vermoeden te gebruiken. Misschien kan dit door een omweg te nemen via de eerder genoemde meetkunde. Stel dat X, Y en K alle coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ hebben, en dat $K \neq 0$, $\mathrm{grd}(X) = 2m$ (we kijken dus alleen naar interessante gevallen). Dan zijn voor $n \in \mathbb{Z}$ de getallen $X(n)$, $Y(n)$ en $K(n)$ alle geheel, en natuurlijk is $(X(n), Y(n), K(n))$ dan een oplossing voor de getaltheoretische Hallvergelijking. We willen dat $K(n)$ klein is in verhouding tot $X(n)$. De meest natuurlijke manier om dit voor elkaar te krijgen is om te eisen dat $\mathrm{grd}(K)$ klein is vergeleken met $\mathrm{grd}(X)$. We weten zeker dat er moet gelden $\mathrm{grd}(K) \geq m+1$, dus laten we kijken naar het extreme met $\mathrm{grd}(K) = m+1$.

Definitie. *Een tripel (X, Y, K) van polynomen in $\mathbb{C}[z]$ heet een* polynomiaal Halltripel *van type m als er geldt*

$$X^3 - Y^2 = K,$$
$$\mathrm{grd}(X) = 2m, \mathrm{grd}(Y) = 3m, \mathrm{grd}(K) = m+1.$$

Shioda ([4]) noemt zulke tripels Davenport-Stotherstripels, naar de eerste wiskundigen die ze uitgebreid onderzocht hebben.

Natuurlijk kunnen we gegeven een polynomiale Halltripel (X, Y, Z) oneindig veel polynomiale Halltripels construeren door de coördinaten te transformeren. Deze verschillen echter niet wezenlijk van het oorspronkelijke Halltripel, en we beschouwen ze dan ook als equivalent. Oftewel:

Voorbeelden van polynomiale Halltripels

Om ruimte te besparen beperken we ons tot het geven van alleen X en K. Voor $m \leq 4$ weten we dat onze tripels op equivalentie na de enige zijn (zie het artikel).

$$m = 1 : X = 4z^2 + 1, K = 1 + 3z^2.$$

$$m = 2 : X = z^4 + 4z, K = -8z^3 - 36.$$

$$m = 3 : X = z^6 + 4z^4 + 10z^2 + 6,$$
$$K = \frac{27}{4}(4z^4 + 13z^2 + 32).$$

$$m = 4 : X = z^8 - 2z^7 + 7z^6 - 6z^5 + 11z^4 + 4z^3 + 12z + 1,$$
$$K = \frac{-27}{4}(4z^5 - 5z^4 + 18z^3 - 3z^2 + 14z + 31).$$

Helaas geven deze geen interessante oplossingen van de getaltheoretische Hallvergelijking. Voor $m = 5$ is het volgende Halltripel (gevonden door Birch) wél interessant:

$$X = \frac{1}{9}(z^{10} + 6z^7 + 15z^4 + 12z),$$
$$K = -\frac{1}{108}(3z^6 + 14z^3 + 27).$$

Coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ worden in deze oplossing verkregen door $6z + 3$ voor z te substitueren. Dan worden de coëfficiënten echter nogal groot, dus in plaats daarvan kijken we naar $P(n)$ voor $n \equiv 3 \bmod 6$. Het blijkt voor $n = -9, -3, 3, 9$ we vier interessante oplossingen van de getaltheoretische Hallvergelijking, met $|k|/\sqrt{|x|}$ gelijk aan respectievelijk 0.75, 0.23, 0.27 en 0.75.

Het Birchpolynoom correspondeert met het dessin voor $m = 5$ met de meeste symmetrie (zie rechterhelft figuur 1, linksboven).

Definitie. *Twee Halltripels* (X_1, Y_1, K_1) *en* (X_2, Y_2, K_2) *heten* equivalent *als er constanten* $u, w \in \mathbb{C}^*$, $v \in \mathbb{C}$ *bestaan zo, dat* $X_2(z) = w^2 X_1(uz + v)$, $Y_2(z) = w^3 Y_1(uz + v)$, *en* $K_2(z) = w^6 K(uz + v)$.

Merk op dat zelfs als we een polynomiaal Halltripel (X, Y, K) beschouwen, er nog steeds maar eindig veel $n \in \mathbb{Z}$ zijn met de eigenschap dat $|K(n)| < \sqrt{|X(n)|}$. Immers, door de voorwaarden op de graad zien we dat

$$lim_{n \to \infty}|K(n)|/\sqrt{|X(n)|} = \lim_{n\to\infty} |n|^{m+1}/\sqrt{|n|^{2m}} = \infty.$$

Er is dus geen enkele kans op het vinden van veel interessante getaltheoretische Halltripels met één vast polynomiaal Halltripel. Toch zijn er vaak wel een paar interessante waarden (zie het kader). Er dringen zich nu de volgende vragen op:

- Is er een systematische manier is om een oneindige rij polynomiale Halltripels te bepalen?
- Is het mogelijk om, gegeven een polynomiaal Halltripel in die rij, systematisch een 'goed' getaltheoretisch Halltripel te destilleren?

Als het antwoord op deze vragen bevestigend luidt, dan zouden we misschien een oneindige rij tripels kunnen construeren dat een tegenvoorbeeld vormt voor één van de Hallvermoedens.

Het antwoord op onze vragen lijkt helaas ontkennend te moeten luiden. Het expliciet verkrijgen van polynomiale Halltripels is een vrij lastige aangelegenheid, en er lijkt geen manier te zijn om de Halltripels van type $m + 1$ snel te bepalen gegeven de Halltripels van type kleiner dan $m + 1$. Daardoor kunnen we ook niet systematisch 'goede' gehele waarden voor polynomiale Halltripels vinden. Er speelt ook nog een andere kwestie: om veel gehele waarden te krijgen is het op zijn minst wenselijk dat het polynomiale Halltripel coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ heeft. Zoals beschreven in [5], blijkt dit niet vaak het geval te zijn. Voor $m = 1, 2, 3, 4$ hebben alle equivalentieklassen van tripels een representant met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$. Er zijn ook zulke klassen voor $m = 5$, maar het lijkt erop dat bijvoorbeeld voor $m = 6, \ldots, 11$ er geen klassen zijn met representanten die coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ hebben.

Polynomiale Halltripels zijn echter op zich al interessant: zoals we zullen zien bevinden ze zich op een belangrijk kruispunt van verschillende wiskundige takken. Bovendien is er één stukje informatie dat we wél kunnen verkrijgen, namelijk het aantal equivalentieklassen van tripels van vast type m.

Dessins d'enfants

We gaan het verband bekijken tussen onze Halltripels en een andere klasse wiskundige objecten die naar Grothendieck *dessins d'enfants* of *kindertekeningen* worden genoemd. Het verband is als volgt. Een snelle berekening toont aan dat, gegeven een Halltripel (X, Y, K), de rationale functie

$$f = X^3/K = 1 + Y^2/K$$

de eigenschap heeft dat

$$f'(z) = 0 \Rightarrow X = 0,$$

of

$$Y = 0 \Rightarrow f(z) \in \{0, 1\}.$$

Een functie met deze eigenschap heet een Belyi-afbeelding. Beschouw nu het inverse beeld in $\mathbb{C}$ van het interval $[0, 1]$ onder f. Dit is een samenhangende graaf in het vlak. De punten die afbeelden naar 0 (ook wel 0-vertices genoemd) markeren we met een open stip, en de punten de afbeelden naar 1 (de 1-vertices) markeren we met een gesloten stip. Met deze markeringen wordt ons inverse beeld een speciaal soort gemarkeerde graaf, dat een dessin d'enfant genoemd wordt. Een uitgebreide inleiding tot dessins is [6], maar deze is van nogal hoog technisch niveau; een toegankelijker inleiding is [7].

Het valt na te gaan dat in het extremale geval van Halltripels geldt dat X, Y en K geen meervoudige nulpunten hebben. Dit betekent dat in 0-vertices f tot de derde macht verdwijnt, want daar geldt $f = X^3/K = 0$. In termen van het dessin betekent dit dat er in 0-vertices steeds drie zijden samenkomen. Op een zelfde manier valt te zien dat

$$f - 1 = X^3/K - 1 = 1 + Y^2/K - 1 = Y^2/K$$

tot de tweede macht verdwijnt in een 1-vertex, waardoor er in de 1-vertices steeds twee zijden samenkomen. De nulpunten van K

blijken door het dessin te worden ingesloten in celletjes die snel kleiner worden naarmate m groter wordt. Door de graad van X, Y en K te beschouwen valt te zien dat het dessin dat bij een Halltripel van type m hoort, $2m$ stuks 0-vertices en $3m$ stuks 1-vertices (dus $3m$ zijden) bevat, en dat het $m+1$ celletjes insluit. Zo'n dessin noemen we een *Halldessin* van type m.

We hebben nu de volgende opmerkelijke omkering:

Stelling. *Met elk Halldessin correspondeert een rationale functie* X^3/K *met* $\mathrm{grd}(X) = 2m, \mathrm{grd}(K) = m+1$ *die dat dessin levert. Deze functie is op equivalentie na uniek bepaald.*

Op dit punt zal de lezer ons moeten vertrouwen. De stelling is niet extreem moeilijk om te bewijzen, maar er moet een nogal uitgebreide en technische reis door de wiskunde voor gemaakt worden. Het idee is dat de kindertekening een vertakte overdekking van de Riemannbol specificeert, die de 0-vertices naar 0 stuurt, de 1-vertices naar 1, de zijden naar $(0,1)$, en de open cellen naar de rest van de Riemannbol. Als we dan de analytische structuur op de Riemannbol liften, wordt deze overdekking precies de rationale functie die we zoeken.

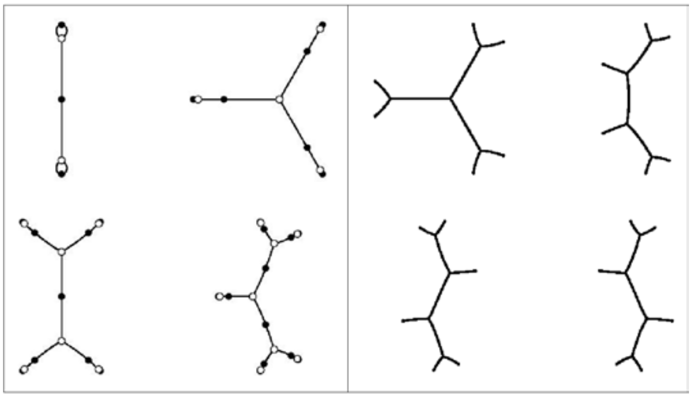
Wij volstaan met het geven van een heuristisch argument voor de eindigheid van het aantal polynomiale Halltripels. Definieer de volgende variabelen:

$$\begin{aligned} X &= a(z-p_1)\cdots(z-p_{2m}),\\ Y &= b(z-q_1)\cdots(z-q_{3m}),\\ K &= c(z-r_1)\cdots(z-r_{m+1}). \end{aligned}$$

In totaal hebben we $6m+4$ parameters. We willen dat

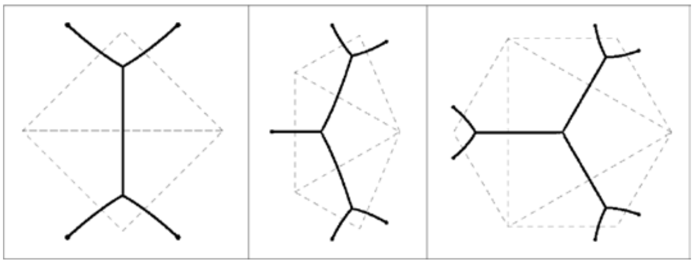
$$X^3 - Y^2 = K.$$

Deze vergelijking levert $6m+1$ eisen op de parameters. Er blijven er 3 over, en die worden geëlimineerd door de equivalentie.



Figuur 1 Links de dessins voor $m = 1, \ldots, 4$, rechts de vier dessins voor $m = 5$, weergegeven als boom

Het begrip equivalentie transformeert als volgt onder de reis van polynomiale Halltripels naar dessins: twee tripels zijn equivalent precies als hun kindertekeningen in elkaar vervormd kunnen worden door een oriëntatie-bewarende deformering van het vlak (dus spiegelingen zijn niet toegestaan). Dit betekent een equivalentieklasse van Halltripels ook opgevat kan worden als een deformatieklasse van een Halldessin. Door dit opmerkelijke verband tussen meetkunde en combinatoriek dat dessins ons verschaffen, wordt het tellen van polynomiale Halltripels aanzienlijk gemakkelijker. Zo valt bijvoorbeeld aan de plaatjes te zien dat er maar één zo'n deformatieklasse is voor $m = 1, \ldots, 4$, dus kan er ook maar één equivalentieklasse van Halltripels van die types zijn. Voor $m = 5$ krijgen we vier deformatieklassen. Één van die klassen is de spiegeling van een andere. Omdat complexe conjugatie het vlak spiegelt gaan de corresponderende Halltripels door complexe conjugatie in elkaar over.



Figuur 2 Links het duale dessin voor $m = 3$, in het midden het duale dessin voor $m = 4$, rechts het meest symmetrische duale dessin voor $m = 5$

De toegevoegde plaatjes zijn de daadwerkelijke inverse beelden van $[0,1]$ onder de rationale functies X^3/K die bij de oplossingen in het kader horen. De grootte van de celletjes neemt drastisch af met m: de stippen die de vertices markeren begin elkaar zelfs te overlappen. Dit suggereert een nieuwe manier om zulke dessins weer te geven. Hiervoor beginnen we met ons dessin, maar we verwijderen de markeringen en knippen de celletjes eraf. Zo krijgen we een boom met $m+1$ eindpunten en $m-1$ interne punten waar steeds 3 zijden samenkomen. Laten we zo'n boom een *Hallboom* noemen (van type m). Uit een Hallboom kunnen we het Halldessin reconstrueren door aan elk eindpunt een celletje vast te maken, de punten waar drie zijden samenkomen, met een open stip te markeren, en de zijden met een gesloten stip te markeren. Dus er is een bijectieve correspondentie tussen equivalentieklassen van polynomiale Halltripels van type m en deformatieklassen van Hallbomen van type m. Die laatste verzameling heeft een veel betere combinatorische structuur. Zo is het bijvoorbeeld, in tegenstelling tot het eerdere geval met Halltripels, nu wel duidelijk hoe we de Hallbomen van type $m+1$ kunnen construeren gegeven de Hallbomen van type m: dit gaat simpelweg door het lijmen van de Hallboom van type 2 aan de uiteinden van de Hallbomen van type m. Het is daarom eenvoudiger om het aantal Hallbomen te berekenen. We kunnen echter nog één laatste versimpeling bereiken, namelijk door *duale dessins* te beschouwen.

Duale Halldessins

Uit een Hallboom zoals boven beschouwd kunnen we een nieuw dessin construeren, dat we het *duale Halldessin* zullen noemen. Hiervoor denken we eerst een lange lus om de boom die alle eindpunten raakt. De Hallboom verdeelt de binnenkant van deze lus nu in $m+1$ delen. We tekenen nu een open stip in elk deel van de binnenkant en een gesloten stip op elke zijde van de oorspronkelijke boom. Dan verbinden we elke open stip met de gesloten stippen die op de rand liggen van het deel van de binnenkant waar de open stip zich in bevindt. Dit is ons duale dessin. Het dient opgemerkt te worden dat deze definitie van duaal dessin niet geheel natuurlijk is: een fatsoenlijk duaal dessin had natuurlijk direct uit het oorspronkelijke Halldessin geconstrueerd moeten worden, en niet uit de Hallboom die een verminking van dat dessin is. In ons speciale geval is het echter veel inzichtelijker om op onze manier te werk te gaan. We zien namelijk dat we met deze constructie een triangulatie verkrijgen van een convexe $(m+1)$-hoek bestaande uit $m-1$ driehoeken. Uit deze triangulatie valt de Hallboom (op deformering na) terug te vinden door een punt te tekenen in elke driehoek van de triangulatie en deze punten te verbinden met de gesloten punten op de zijden van die driehoek. Een paar plaatjes zijn bijgevoegd.

We zien dus dat het aantal deformatieklassen van Hallbomen gelijk is aan het aantal triangulaties van een convexe $(m+1)$-hoek in $m-1$ driehoeken. Dit getal (noem het $D(m)$) is door Brown expliciet bepaald ([8]). Het kan ook worden gevonden in de *Encyclopedia of Integer Sequences* ([9]). Een formule is

$$D(m) \;=\; \frac{1}{m+1}C(m-1) + \frac{1}{2}C(\frac{m-1}{3}) + \frac{2}{3}C(\frac{m-2}{3}).$$

Hier is $C(x)$ het x-de Catalan-getal

$$\frac{1}{x+1}\binom{2x}{x}$$

als x geheel is, en anders is het 0. De rij

$$\{D(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$$

begint als volgt:

$$1,1,1,1,4,6,19,49,150,442,1424,$$
$$4522,14924,49536,167367,570285,\ldots$$

Samengevat:

Stelling. *Een expliciete formule voor het aantal equivalentieklassen van Halltripels van type m, het aantal deformeringsklassen van Hallbomen van type m, en het aantal triangulaties van een convexe $(m+1)$-hoek in $m-1$ driehoeken wordt gegeven door $D(m)$.*

Deze opmerkelijke formule is maar een van de resultaten die mogelijk worden gemaakt door het expliciete verband tussen meetkunde en combinatoriek dat gevormd wordt door dessins. Grothendieck's eigen beschrijving van hun deugden in zijn *Esquisse d'un Programme* (zie [10]) is in dit verband aardig om te lezen.

Referenties

1 F. Beukers. *Getaltheorie voor Beginners*, Epsilon, 1999.

2 N. Elkies. *Rational Points near curves and small nonzero $|x^3-y^2|$ via lattice reduction*, Proc. ANTS-IV (2000), pp. 33-63.

3 www.iec.csic.es/ismael/hall.htm.

4 T. Shioda, *Elliptic Surfaces and Davenport-Stothers Triples*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 54 (2005), pp. 49-68.

5 J.C.M. Montanus, *Polynomial solutions of the equation $x^3-y^2=k$*, verslag in Project LIO, NWO (2004).

6 J. Oesterlé, *Dessins d'enfants*, Séminaire Bourbaki, Juni 2002.

7 L. Zapponi, *What is a dessin d'enfant?*, Not. AMS 50 (2003), pp. 788-789.

8 W. G. Brown, *Enumeration of triangulations of the disk*, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), pp. 746-768.

9 http://www.research.att.com/njas/sequences/.

10 L. Schneps and P. Lochak (ed.), *Geometric Galois Actions 1*, Cambridge University Press, 1997.