Raoul Robert
Institut Fourier, 100 rue des Maths BP 74
38402 St Martin d'Heres
Frankrijk
robertr@fourier.ujf-grenoble.fr

Overzichtsartikel

Wiskunde en turbulentie

Ook aan het begin van het nieuwe millenium is de verklaring van het verschijnsel turbulentie nog steeds één van de grote fundamentele onderwerpen in de fysica. Daarnaast beschouwen vooraanstaande wiskundigen het analyseren van de Navier-Stokesvergelijkingen als één van de hoofdproblemen voor de toekomst van hun vakgebied. Wat is nu eigenlijk het verband tussen deze vergelijkingen en turbulentie. Raoul Robert, wetenschappelijk directeur van het Institut Fourier van de Universiteit Joseph Fourier te Grenoble, geeft een overzicht van huidige stand van het turbulentieonderzoek. Dit artikel verscheen eerder in de bundel 'Images des Mathémathiques 2004' van het Centre national de la recherche scientifique. Vertaling: Reinie Erné en Jaap Molenaar.

Aangezien niet iedereen vertrouwd zal zijn met vloeistofmechanica zal ik beginnen met een aantal begrippen te introduceren.

Het doel van de vloeistofmechanica

Het doel van de vloeistofmechanica is het beschrijven en berekenen van allerlei typen vloeistofstromingen. De moeilijkheden die hierbij opduiken worden al duidelijk bij een eenvoudig (en goedkoop) experiment. Bekijk eens de rook van een sigaret die opstijgt in een stille atmosfeer. De eerste paar tientallen centimeters stijgt de rook rustig op en lijkt het alsof de rookdeeltjes regelmatig en ongeveer evenwijdige banen volgen. Dan, ook gedurende zo'n tien centimeter, wordt deze regelmaat vervangen door kleine wervelingen waarvan de breedte vergelijkbaar is met die van de rookkolom; deze evolueren en vervormen al stijgend, om plotseling plaats te maken voor een beweging die zo rommelig is dat je met het oog niet meer de baan van een enkel deeltje kunt volgen.

De regelmatige beweging vlakbij de sigaret heet *laminair*. Het verst van de sigaret vandaan heet de beweging *turbulent*, terwijl daar tussen in de overgangszone zit. De omstandigheden in deze drie zones lijken erg op elkaar, maar toch zijn de bewegingen erg verschillend. Als we aannemen dat de bewegingen door eenzelfde vergelijking beschreven worden, dan kunnen we vermoeden dat het oplossen van die vergelijking nog wel wat voeten in de aarde zal hebben.

In de studie van de stroming in de laminaire en de overgangszone zijn zoveel vorderingen gemaakt in de twintigste eeuw dat ze als begrepen beschouwd kunnen worden; het turbulente gedrag blijft daarentegen een raadsel.

De Euler- en Navier-Stokesvergelijkingen

De eerste vergelijking om de beweging van een vloeistof te beschrijven is door Euler opgesteld in 1755: het is de vergelijking (of beter: de vergelijkingen) voor de ideale vloeistof, oftewel een incompressibele vloeistof zonder inwendige wrijving.

In de meest gebruikelijke vorm luiden de bewegingsvergelijkingen van Euler in een gebied Ω in de ruimte als volgt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{E}$$

waar $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ het snelheidsveld is van de vloeistof en $p(t, \mathbf{x})$ de druk. Bij deze vergelijkingen hoort een randconditie voor de snelheid op de rand $\partial\Omega$ van het gebied: bijvoorbeeld $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, waar $\mathbf{n}$ de naar buiten gerichte normaalvector is. Om de beweging van de vloeistof volledig vast te leggen is het ook nodig een beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ voor te schrijven.

Het is opvallend dat dit, samen met die voor de trillende snaar, de eerste partiële differentiaalvergelijking is uit de mathematische fysica die ooit opgeschreven werd, en dat de analyse ervan nog steeds weerstand biedt...

Het heeft enige tijd geduurd voordat men in staat was om de inwendige wrijving te modelleren. De vergelijking voor viskeuze vloeistof, de Navier-Stokesvergelijking, is in 1824 door Navier opgesteld. Onder de aanname dat de vloeistof incompressibel is met dichtheid 1 luiden deze:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{N-S}$$

De parameter ν is de kinematische viscositeit van de vloeistof. Er moet natuurlijk een randvoorwaarde bij, waarvoor meestal de 'no slip'-voorwaarde van

Stokes genomen wordt: $\mathbf{u} = 0$ op $\partial\Omega$. Tevens moet er een beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ gespecificeerd worden.

Nu deze modellen geïntroduceerd zijn, gaan we verder met een belangrijk fysiek kenmerk van stromingen: het Reynoldsgetal. In de vergelijkingen (E) en (N-S) heet de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ de *convectieve term*: het is een niet-lineaire term die instabiliteit kan veroorzaken, en die verantwoordelijk gehouden wordt voor het mogelijk turbulente karakter van stromingen. De term $\nu\Delta\mathbf{u}$ is de viskeuze term; die heeft het tegenovergestelde effect, want deze strijkt namelijk de stroming glad en leidt tot het laminaire karakter ervan. Het is de orde van grootte van de verhouding tussen deze twee termen die het gedrag van de stroming zal bepalen. We definiëren het dimensieloze Reynoldsgetal van de stroming als volgt:

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{UL}}{\nu} \approx \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\nu\Delta\mathbf{u}|},$$

waar L en U de karakteristieke lengteschaal, respectievelijk de karakteristieke snelheid van de stroming zijn.

Experimentele waarnemingen vertellen ons nu dat er een kritiek Reynoldsgetal Re^* bestaat, zodanig dat de stroming laminair is als $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ en turbulent als $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$. Re^* is geen universele waarde; hij hangt onder andere af van de geometrie van het gebied en van het beginprofiel, maar grof gezegd ligt deze waarde in de orde van 100.

Aangezien de kinematische viscositeit van lucht ongeveer $0,15\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ is, kunnen we meteen de orde van grootte van Re voor een aantal gevallen opschrijven. Luchtstroming rond een auto:

$$\mathrm{Re} \approx 10^7 \qquad (\mathrm{U} = 100\,\mathrm{km/uur}, \mathrm{L} = 4\,\mathrm{m}).$$

Atmosferische luchtstroming:

$$\mathrm{Re} \approx 10^{12} \qquad (\mathrm{U} = 10\,\mathrm{m/s}, \mathrm{L} = 1000\,\mathrm{km}).$$

Vlucht van een vlieg:

$$\mathrm{Re} \approx 300 \qquad (\mathrm{U} = 1\,\mathrm{m/s}, \mathrm{L} = 0,5\,\mathrm{cm}).$$

We zien dus dat de meeste stromingen die voor ons waarneembaar zijn volledig turbulent zijn. De vlieg is een opmerkelijk geval, omdat deze voortdurend pendelt tussen de laminaire en de turbulente fase, wat hem vast en zeker interessante problemen oplevert bij het onder controle houden van zijn vlucht. Hetzelfde geldt voor sigarettenrook, wat verklaart waarom we de drie fases tegelijkertijd kunnen zien.

Het is handig om de Navier-Stokesvergelijkingen dimensieloos op te schrijven door geschikte schalingen toe te passen. We krijgen dan:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} = -\nabla p\,.$$

Wiskundige aanpak

Het meeste dat we weten over het oplossen van het Cauchy probleem voor de Navier-Stokesvergelijkingen met beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ in een begrensd gebied Ω in $\mathbf{R}^3$ is afkomstig van het werk van Leray (1933-34).

Stelling. *Als $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ voldoende glad is op $\overline{\Omega}$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0$ en $\mathbf{u}_0 = 0$ op $\partial\Omega$, dan bestaat er een unieke gladde oplossing op een tijdsinterval $[0, T^*]$. Na T^* bestaat er een minder gladde oplossing (ook wel 'zwakke oplossing' genoemd), waarvan we de uniciteit niet kunnen aantonen.*

De (expres) vage formulering van de stelling roept om opheldering.

- De term 'voldoende glad' (ook wel 'regulier' genoemd) betekent dat zowel $\mathbf{u}_0$ als zijn afgeleiden kwadratisch integreerbaar zijn (in de zin van distributies) op Ω.
- Het tijdstip $T^* > 0$ hangt natuurlijk af van $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.
- De betekenis van een 'zwakke oplossing' is als volgt. Als $\mathbf{u}$ niet glad is, heeft de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ *a priori* geen betekenis. We kunnen er wel een betekenis aan toekennen: vanwege de voorwaarde $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ geldt er dat $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \partial_i(u_i\mathbf{u})$. Deze laatste term bestaat in de zin van distributies zodra $\mathbf{u}$ kwadratisch integreerbaar is. Het is dus voldoende om de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ in deze vorm te schrijven en de vergelijking opgelost te beschouwen in de zin van distributies op Ω.
- Volgens Leray wordt de beweging turbulent op het ogenblik dat de reguliere oplossing plaats maakt voor een zwakke oplossing die oneindige vorticiteit $\omega = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ kan hebben in bepaalde punten.
- De vraag "Houdt de oplossing inderdaad op regulier te zijn na bepaalde tijd?" is één van de millenniumproblemen van Clay.

We zien dat deze stelling in feite het bestaan van laminaire stromingen behandelt, maar niet het turbulente geval, want het bestaan van een zwakke oplossing zonder uniciteit is fysisch inconsistent.

En de Eulervergelijking?

Het eerste belangrijke resultaat van de Eulervergelijking dat vergelijkbaar is met dat van Leray komt van Kato (1972).

Stelling. *Als $\mathbf{u}_0$ voldoende glad is, met $\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0$ en $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ op $\partial\Omega$, dan bestaan er een tijdstip $T^* > 0$ en een unieke gladde oplossing van de Eulervergelijkingen op het interval $[0, T^*]$.*

We kunnen hierbij de volgende opmerkingen maken:

- De gladheid komt hier terug in het feit dat er aan een Höldervoorwaarde voor de afgeleiden van $\mathbf{u}_0$ voldaan dient te zijn.
- We weten niets over het eventuele bestaan van zwakke oplossingen voor $t > T^*$.
- We kunnen eenvoudig nagaan dat voor een reguliere oplossing de kinetische energie $\frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{u}^2 d\mathbf{x}$ behouden is.

Samenvattend kunnen we zeggen dat ongeveer een eeuw verwoede inspanningen een raadsel uit de fysica heeft gekoppeld aan een uiterst zwaar wiskundig probleem. Het lijkt er dus op dat we op dit moment nog niet echt ver gekomen zijn. Om deze deprimerende constatering te verzachten zullen wij nu precieser uitwerken wat de fysicus verwacht.

Terug naar de fysica: wat willen we beschrijven?

We hebben gezien dat de turbulente situatie overeenkomt met grote waarden van het Reynoldsgetal Re.

Het aantal vrijheidsgraden

Alhoewel de beschrijving van het snelheidsveld van een stroming in principe een oneindig aantal vrijheidsgraden impliceert, suggereert een heuristische redenering van Kolmogorov dat een viskeuze stroming in feite maar van een eindig aantal vrijheidsgraden afhangt, in de orde van $\mathrm{Re}^{9/4}$. Dit getal geeft de dimensie van de ruimte aan waarin we het snelheidsveld dienen te approximeren om een redelijk nauwkeurige numerieke oplossing te verkrijgen.

We zien dat het aantal vrijheidsgraden in een turbulente stroming al snel gigantisch groot wordt: voor de atmosfeer, waarvoor we geschat hebben dat $\mathrm{Re} = 10^{12}$, krijgen we een dimensie van 10^{27}! Om deze reden levert turbulentie nu, maar ook in de toekomst, een groot probleem op voor effectieve numerieke berekeningen.

Er zij opgemerkt dat de redenering van Kolmogorov ervan uitgaat dat de oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen zo glad is dat op kleine schaal $\mathbf{u}$ constant genomen mag worden, hetgeen voor de wiskundigen juist de kern van het probleem is. Hoe kijken de fysici aan tegen turbulente stromingen? Hierbij dienen we twee gevallen te onderscheiden, al naar gelang de stroming in dimensie twee of drie plaatsvindt. Dit onderscheid is niet puur technisch, maar het weerspiegelt zeer uiteenlopende waargenomen verschijnselen. De tweedimensionale benadering, waarbij de stroming in een vlak of op een oppervlakte plaatsvindt, wordt in de praktijk vaak gebruikt als de vloeistof zich in een dun laagje beweegt. De dikte van de laag is dan verwaarloosbaar ten opzichte van de horizontale schaal van de laag. Bijvoorbeeld, de bewegingen van de atmosfeer of de oceanen kunnen als tweedimensionaal beschouwd worden.

De voornaamste eigenschappen van turbulentie in dimensie twee zijn het behoud van de kinetische energie en de neiging om grote, stabiele structuren te vormen. We noemen dit *coherente structuren*, zie figuur 1.

Ter vergelijking: in dimensie drie, denk bijvoorbeeld aan stroming in een windtunnel, is er een grote dissipatie van kinetische energie en ziet men over het algemeen geen coherente structuren. De metingen verschaffen informatie over het spectrum van de kinetische energie en de statistische verdeling van de snelheidsverschillen $\mathbf{u}(t,x) - \mathbf{u}(t,x')$ voor naburige punten x en x' op tijdstip t.

Turbulentie in dimensie twee

In dimensie twee is de grote vraag hoe het behoud van de kinetische energie en het ontstaan van coherente structuren te verklaren is. Volgens Onsager is de vergelijking van Euler hiervoor prima geschikt, want deze behoudt energie. Volgens hem volgt het ontstaan van coherente structuren uit een statistisch evenwichtsmechanisme.

Laten we ter verduidelijking even teruggaan naar de Navier-Stokesvergelijkingen. In dimensie twee gebeurt er iets opmerkelijks: de problemen in de stelling van Leray verdwijnen:

- Voor glad beginprofiel $\mathbf{u}_0$ bestaat de reguliere oplossing van Navier-Stokes altijd.
- Als $\mathbf{u}_0$ niet glad is, bestaat er toch een unieke zwakke oplossing.

Voor de Eulervergelijking wordt de situatie ook een stuk aantrekkelijker. Door de rotatie van de Eulervergelijking (E) te nemen, krijgt men een vergelijking voor de vorticiteit $\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ (in twee dimensies is dat een scalaire grootheid!):

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\omega\mathbf{u}) = 0\,, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \omega, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ op } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{E_ω}$$

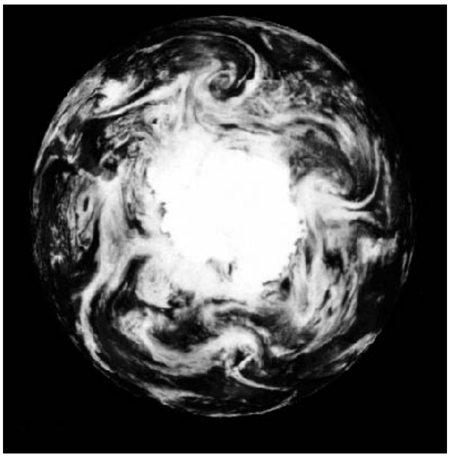
Dit is een transportvergelijking voor ω met daaraan gekoppeld een elliptisch probleem voor $\mathbf{u}$. Hiervoor geldt het volgende existentie- en uniciteitsresultaat:

Stelling. *(Youdovitch 1963) Voor ieder meetbaar en begrensd vorticiteitsbeginprofiel ω_0 bestaat er een meetbare, begrensde, zwakke oplossing $\omega(t,x)$ voor het probleem (E_ω). Deze oplossing is uniek.*

Opmerking

De situatie wordt een stuk ingewikkelder als ω_0 een maat mag zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval als het initiële snelheidsveld discontinu is. Dit treedt op bij wervelwinden. Maar voor ons voldoet een begrensde initiële vorticiteit.

In dimensie twee geldt de volgende geruststellende eigenschap: onder redelijke voorwaarden nadert de oplossing van de Navier-Stokesvergelijking met beginwaarde $\mathbf{u}_0$ tot de oplossing van de Eulervergelijking met diezelfde beginwaarde indien de viscositeit naar nul gaat. Onder redelijke voorwaarden verstaan we dat we ofwel te maken hebben met ruimtelijk periodieke oplossingen (stromingen op een torus), ofwel te maken hebben met een wrijvingsvoorwaarde op de rand die de Stokesconditie $\mathbf{u} = 0$ op de rand van het gebied vervangt. Zo'n wrijvingsconditie



Figuur 1 Op deze satellietfoto zien we een systeem van grote atmosferische wervels om de zuidpool. Dit zijn 'coherente structuren', die ontstaan door de karakteristieke zelforganisatie van tweedimensionale turbulente stromingen. (foto NASA, Galileomissie)

werd oorspronkelijk al door Navier voorgesteld en is in veel gevallen fysisch realistischer dan een no-slipconditie.

We concluderen uit het bovenstaande dat het legitiem is om turbulentie in dimensie twee te bestuderen aan de hand van de modelvergelijking van Euler, die opgesteld is om het gedrag van vloeistoffen in het geval van kleine viscositeit te beschrijven. Dit had Onsager inderdaad goed aangevoeld. Aangezien we aan kunnen tonen dat de oplossing die gegeven wordt door de stelling van Youdovitch energie behoudt, is de eerste eigenschap van turbulentie in dimensie twee gemodelleerd.

Het ontstaan van coherente structuren is een ingewikkelder vraagstuk. Wat gebeurt er met de oplossingen van de Eulervergelijking? Met behulp van numerieke simulaties is het bijvoorbeeld mogelijk de evolutie van een zogenaamde wervelvlek te bepalen, waarvoor geldt dat ω_0 constant is in een bepaald gebied en 0 daarbuiten. Aangezien de vorticiteit ω vervoerd wordt door een incompressibel snelheidsveld, zal ω op ieder ogenblik een vlek blijven met dezelfde oppervlakte, maar deze vlek zal zich over het algemeen op een zeer ingewikkelde manier vervormen, bijvoorbeeld door draden uit te schieten die steeds dunner worden naargelang zij zich vervormen en oprollen. Met andere woorden, ω gaat variëren op een steeds kleiner wordende ruimteschaal. Als we de stroming op steeds kleinere schaal observeren, dan wordt het ω-profiel steeds ingewikkelder en convergeert het niet. We spreken dan over turbulente chaos op kleine schaal. Echter, als we niet de details bekijken maar het lokale gemiddelde van ω nemen op een vastgelegde middelgrote schaal, dan zien wij dat dit gemiddelde wel convergeert. Met andere woorden, als t naar oneindig gaat, convergeert $\omega(t,x)$ in de zwakke topologie naar een zekere functie ω^* (zie figuur 2). Aangezien de overdekking ($\omega \to \mathbf{u}$) compact is, volgt er dat $\mathbf{u}$ convergeert in de L^2-norm naar een bijbehorend snelheidsveld $\mathbf{u}^*$. Deze $\mathbf{u}^*$ is het snelheidsveld dat de coherente structuur beschrijft.

Hoe kunnen wij in het algemeen laten zien dat dit mechanisme het juiste is voor de oplossing van de Eulervergelijkingen? Dat weten wij nu nog niet. Echter, voor een gegeven ω_0 kunnen wij wel een geschikte kandidaat voor de limiet ω^* vinden.

Bepaling van ω^*

Om dit te doen passen we het programma van Onsager toe, dat neerkomt op het toepassen van de statistische mechanica van Boltzmann op de Eulervergelijking. Gebruikmakend van de theorie van de 'large deviations', bestaat de eerste stap uit het opstellen van de functionele entropie. Dit is een maat voor de intuïtieve notie van wanorde in een turbulente stroming. De tweede stap is het oplossen van het variationele probleem van het maximaliseren van deze entropie onder de voorwaarden die horen bij de invarianten van de Eulervergelijking. Dit leidt tot ω^*.

Dan moet nog aangetoond worden dat ω inderdaad convergeert naar ω^*. Net als bij vele andere resultaten uit de statistische mechanica, geldt ook hier dat we de ergodiciteit van het dynamische systeem gedefinieerd door de Eulervergelijking in dimensie twee — dat is een oneindig dimensionaal Hamiltoniaans systeem — zouden moeten bewijzen. Helaas, dat kunnen wij (nog) niet. Wij kunnen daarentegen wel, door numerieke simulaties te vergelijken met laboratoriumexperimenten, controleren dat het gedrag correct beschreven wordt.

Turbulentie in dimensie drie

In dimensie drie zijn er veel waarnemingen gedaan in windtunnels. Dit heeft geleid tot het ontdekken van een aantal experimentele wetmatigheden. Overigens, in dimensie drie wordt over het algemeen niet het ontstaan van structuren zoals in dimensie twee waargenomen.

De energie-dissipatiewet

Een verbazend resultaat is als volgt: als de viscositeit naar nul gaat, gaat in een turbulente stroming de dissipatie van de kinetische energie per massaeenheid naar een limiet die niet nul is:

$$\frac{dE}{dt} \to D\,,$$

waarin de factor D, die dimensie L^2T^{-3} heeft, een functie van de 'intensiteit' van de turbulentie is. dE/dt is hier een gemiddelde waarde, genomen over het gehele gebied. Hieruit blijkt dat de dissipatie van de energie in een turbulente stroming in dimensie drie niet afhangt van de viscositeit.

De 2/3-wet

Zij Ω een gebied in de turbulente stroming. Voor ieder vast tijdstip t geldt:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\mathbf{u}(t,x+\xi)-\mathbf{u}(t,x)|^2dx \approx K|\xi|^{2/3}.$$

De factor K hangt alleen van D af en niet van Ω. Deze tweede wet geeft belangrijke informatie over de regulariteit van het turbulente snelheidsveld.

De 4/5- wet

Deze wet komt voort uit de berekeningen van Von Karmàn en Howarth (1938), die gecompleteerd zijn door Kolmogorov in 1941. Een erg interessante algemenere versie, zonder isotropievoorwaarde, is door Monin in 1959 gegeven. Om deze wet op te schrijven nemen we aan dat het turbulente snelheidsveld gegeven wordt door een stochastische oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen $\mathbf{u}(t,x,a)$, met a een stochastische parameter. Dit betekent dat voor iedere vaste a $\mathbf{u}(t,x,a)$ een oplossing is van de Navier-Stokesvergelijkingen, en wel in de zwakke zin aangezien het veld volgens de 2/3 wet niet regulier kan zijn. We maken een aantal aannames:

- De gemiddelde waarde is nul: voor alle t en x geldt $\langle \mathbf{u}(t,x,a)\rangle = 0$, waar $\langle\ \rangle$ het ensemblegemiddelde voorstelt.
- Het veld is homogeen in de ruimte: voor alle t en ξ heeft $\mathbf{u}(t,x+\xi,a)$ dezelfde kansverdeling als $\mathbf{u}(t,x,a)$.
- Het veld is isotroop in de sterke zin: voor iedere reële unitaire matrix A heeft $A^t\mathbf{u}(t,Ax,a)$ dezelfde kansverdeling als $\mathbf{u}(t,x,a)$.

Zij $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x+\xi,a) - \mathbf{u}(t,x,a)$. De 4/5-wet zegt dan:

$$\left\langle \left(\delta\mathbf{u}\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\right)^3\right\rangle = -\frac{4}{5}D|\xi|\,. \quad (4/5)$$

Opmerkingen

- D is hier de constante die ook voorkomt in de dissipatiewet. Deze formule verbindt dus op een verbazend eenvoudige manier de energiedissipatie van de turbulente stroming aan de statistiek van de snelheidsverschillen.
- We hebben niet aangenomen dat het veld $\mathbf{u}$ stationair is, en ook niet dat het invariant is onder schaalverandering.
- Er bestaat een niet-isotrope versie van dit resultaat (Monin) die als volgt luidt:

$$D = -\frac{1}{4}\mathrm{div}_\xi\langle(\delta\mathbf{u})^2\delta\mathbf{u}\rangle_{\xi=0}\,.$$

- De 4/5-formule wordt verkregen met behulp van formele bewerkingen uit de Navier-Stokesvergelijking, gevolgd door het nemen van de limiet $\nu \to 0$. De wiskundige rechtvaardiging van de methode is niet duidelijk. Desalniettemin wordt deze wet algemeen geaccepteerd door alle fysici die zich met turbulentie bezig houden (cf. Frisch).

Een echte theorie zou op rigoureuze manier deze wetten moeten kunnen afleiden vanuit de bewegingsvergelijkingen, hetzij Navier-Stokes, hetzij Euler. Maar de keuze tussen deze twee modellen geeft direct al een probleem.

Viskeus of niet viskeus?

We hebben laten zien dat in dimensie twee het mogelijk is turbulentie in principe te beschrijven vanuit de Eulervergelijking, wat de zaak behoorlijk vereenvoudigt. Hoe zit het in dimensie drie? De nu bekende resultaten zijn nogal mager. Het feit dat de dissipatie van energie groot is brengt veel fysici ertoe te denken dat de viscositeit, zelfs al is die verdwijnend klein, altijd een rol speelt. We zouden dus de Navier-Stokesvergelijking moeten bestuderen in de limiet $\nu \to 0$. Zo dacht ook Leray erover. In feite wantrouwde hij de Eulervergelijking vanwege de paradox van d'Alembert, een paradox die men kan beschouwen als het zichtbare stuk van de ijsberg aan problemen die deze vergelijking oplevert.

Een zekere versie van deze paradox zegt dat voor een stationaire, rotatievrije stroming rond een obstakel de resultante van de drukkrachten op het obstakel nul is. Kortom, het obstakel wordt niet meegesleurd door de stroming, wat duidelijk tegen de ervaring ingaat....

Ik ga nu een andere manier uiteenzetten om naar de zaken te kijken. Deze enigszins vergeten aanpak komt van Onsager. Het viel Onsager op dat de viscositeit geen rol speelt in de 4/5 wet; de dissipatie is slechts gekoppeld aan de irregulariteit van het snelheidsveld. We kunnen dus $\nu = 0$ nemen, dat wil zeggen met de Eulervergelijking werken. Het probleem is dan dat de Eulervergelijkingen een Hamiltoniaans systeem vormen, en deze systemen zijn energiebehoudend. Laten we eens kijken hoe je energiebehoud aantoont voor een oplossing van de Eulervergelijking. Ter vereenvoudiging nemen we aan dat de oplossingen periodiek in de ruimte zijn.

We beginnen met de vergelijking

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p.$$

We nemen het inproduct met $\mathbf{u}$ en integreren over de torus. Dit geeft

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int u_i\partial_i u_k u_k \mathrm{d}x = -\int \nabla p\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,,$$

waar we de gebruikelijke sommatieconventie voor herhaalde indices volgen.

We merken op dat $u_i\partial_i u_k u_k = u_i\partial_i(\mathbf{u}^2/2)$ en we zien onmiddellijk door partiële integratie dat de twee laatste integralen nul zijn aangezien div $\mathbf{u} = 0$. Dan hoeven we alleen nog maar op te merken dat de eerste integraal gelijk is aan de afgeleide van de kinetisch energie naar de tijd.

Om deze berekening te verantwoorden, moeten op zijn minst alle uitdrukkingen die wij opgeschreven hebben zinvol zijn, wat een zekere regulariteit veronderstelt van het veld $\mathbf{u}$. Onsager realiseerde zich dat de turbulentie kennelijk beschreven wordt door oplossingen (in een gegeneraliseerde zin) van de Eulervergelijking, die zodanig irregulier zijn dat de energie niet behouden is. De oplossingen bedacht door Onsager zijn precies de zwakke oplossingen die wij eerder ingevoerd hebben. Bestaan dergelijke oplossingen? Ja, Shnirelman heeft recent een voorbeeld van een zwakke oplossing gegeven die de kinetische energie dissipeert.

We hebben dus potentiële kandidaten om turbulente stroming te beschrijven: zwakke oplossingen van de Eulervergelijking die energie dissiperen. Jammer genoeg hebben we geen algemeen existentieresultaat voor dergelijke oplossingen (we kunnen het Cauchy-probleem voor nietgladde beginwaarden niet oplossen) en nog minder een uniciteitsresultaat. Toch kunnen we een kleine extra stap in deze richting zetten.

Het Onsager-vermoeden

Gebruikmakend van de 4/5-wet heeft Onsager in 1949 het vermoeden geopperd dat de zwakke oplossingen van Euler, die aan een voorwaarde van Hölder van orde strikt groter dan 1/3 voldoen, energie moeten behouden. Dit vermoeden is in vergetelheid geraakt tot 1992, toen Eyink het belang van dit probleem weer belicht heeft en een bewijs gegeven heeft van een zwakkere probleemstelling. In 1994 hebben de drie wiskundigen Constantin, E (dat is zijn volledige naam) en Titi een esthetisch en eenvoudig bewijs gegeven van een sterker resultaat.

We kunnen echter meer bereiken en de dissipatie van lokale energie in geval van irregulariteit nauwkeurig expliciet maken.

Stelling. *(Duchon en Robert, 2000) Zij $\mathbf{u}$ een zwakke oplossing van de Eulervergelijking op de torus Π^3, zodat $|\mathbf{u}|^3$ integreerbaar is op $(0,T)\times\Pi^3$. Zij φ een oneindig differentieerbare functie met compact support op $\mathbf{R}^3$, die positief is, met integraal gelijk aan 1, en symmetrisch. Zij, voor $\varepsilon > 0$,*

$$\varphi^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

$$D_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\int \nabla\varphi^\varepsilon \xi\cdot\delta\mathbf{u}(\delta\mathbf{u})^2\mathrm{d}\xi\,.$$

Als ε naar 0 gaat, convergeert $D_\varepsilon(\mathbf{u})$, die een functie van t en x is, in de zin van distributies op $(0,T)\times\Pi^3$ naar een distributie $D(\mathbf{u})$ die onafhankelijk is van φ, en voldoet aan de volgende lokale energievergelijking:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) + \mathrm{div}\left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p\right)\mathbf{u}\right) + D(\mathbf{u}) = 0\,.$$

Opmerkingen

- Het bewijs volgt uit een aantal eenvoudige bewerkingen op een geregulariseerde versie van de Eulervergelijking.
- Uit dit resultaat volgt door het integreren van de lokale energievergelijking over het hele gebied een bewijs van het vermoeden van Onsager, onder de voorwaarde dat het snelheidsveld regulier is:

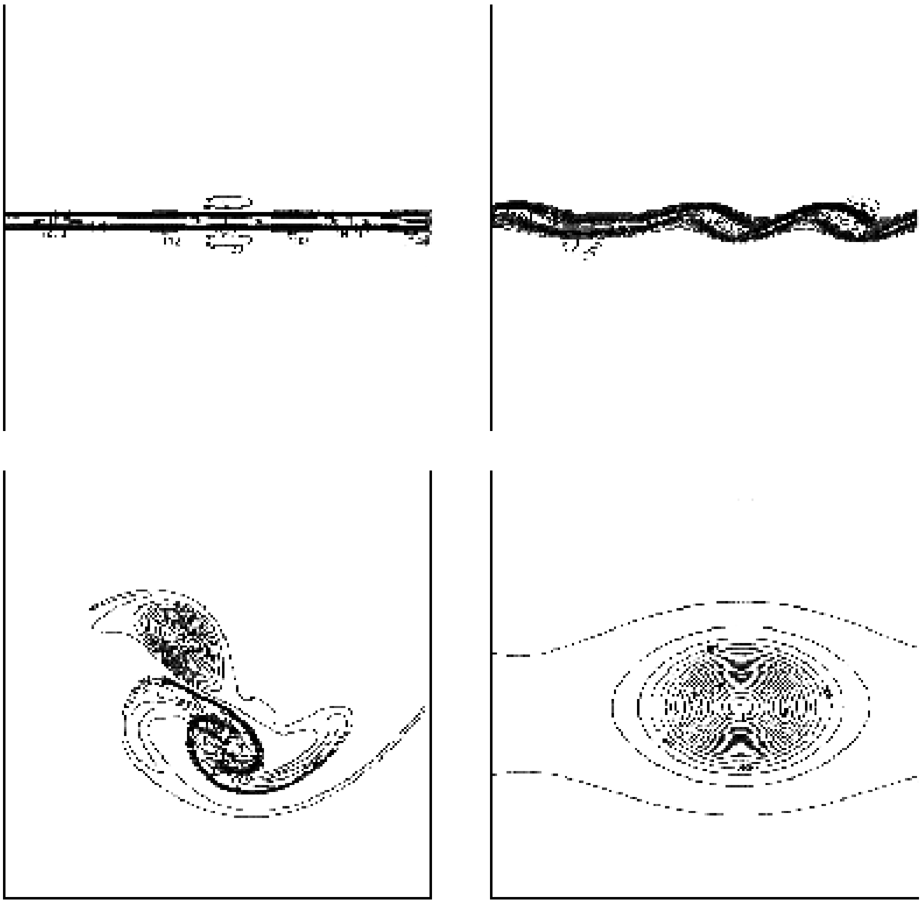
$$\int |\mathbf{u}(t,x+\xi) - \mathbf{u}(t,x)|^3\mathrm{d}x \le c(t)|\xi|\sigma(|\xi|)\,,$$

  waarin $\sigma(r)$ naar 0 gaat als r naar 0 gaat en $\int_0^T c(t)\mathrm{d}t < \infty$.
- De lokale energievergelijking legt een natuurlijke voorwaarde op: energie kan alleen gedissipeerd worden en niet ontstaan. We nemen daarom aan dat $D(\mathbf{u})$ positief is. Deze voorwaarde moet natuurlijk gezien worden in het licht van de entropievoorwaarden die voorkomen in de studie van niet-lineaire hyperbolische vergelijkingen. Wij komen daarop nog terug.
- Het is makkelijk om vanuit deze vergelijking een rigoureus bewijs te geven van de 4/5-wet onder redelijke aannames over het snelheidsveld.

Een instructief model: de Burgersvergelijking in één dimensie

De betekenis van de voorwaarde $D(\mathbf{u}) \ge 0$ die wij zomaar opgelegd hebben kan verduidelijkt worden aan de hand van de Burgersvergelijking. Laten wij beginnen met een aantal bekende feiten over nietlineaire hyperbolische vergelijkingen in het algemeen. Denk hier bijvoorbeeld aan vergelijkingen die de evolutie beschrijven van een compressibel niet-viskeus gas. Voor deze vergelijkingen zijn wij ook verplicht met niet-reguliere zwakke oplossingen te werken. De reden hiervoor is dat, als we vanuit een reguliere beginwaarde werken, de oplossing de neiging heeft om in eindige tijd schokken te ontwikkelen, dat wil zeggen, er ontstaan discontinuïteiten. Dit fenomeen is heel algemeen en kan expliciet beschreven worden met de meest eenvoudige vergelijking van dit type, namelijk de Burgersvergelijking in ruimtedimensie een:

$$\partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0\,, \qquad \text{(B)}$$



Figuur 2 Numerieke simulatie van de evolutie van een tweedimensionale stroming, waarvoor het beginsprofiel bestaat uit een dunne strook waar de vorticiteit constant en ongelijk nul is en met vorticiteit nul daarbuiten. De strook is instabiel en er onstaan wervels. De krommen stellen hier isovorticiteitslijnen voor. Uiteindelijk komt er een stationaire toestand met een enkele wervel. De viscositeit, die, hoe klein ook, onmisbaar is voor de stabiliteit van de numerieke berekening, dempt de variaties in de vorticiteit onder een bepaalde ruimteschaal. Daarom treedt er convergentie op naar een stationaire toestand. Dit fenomeen is heel algemeen. Simulaties door J. Sommέria, C. Staquet en R. Robert, op de CRAY 2 van het *Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche* (CCVR, Palaiseau, Frankrijk).

waar u nu een scalaire functie op de reële rechte is. Voor deze vergelijking tonen we eenvoudig aan dat als we van een reguliere beginwaarde uitgaan, bijvoorbeeld als u_0 oneindig differentieerbaar met compacte support is, er een unieke oplossing bestaat die regulier is op een eindig interval $[0, T^*)$. Op tijdstip T^* ontstaan er discontinuïteiten in de oplossing.

Als u_0 slechts integreerbaar verondersteld wordt, kunnen we aantonen dat er op ieder tijdstip een zwakke oplossing bestaat. Het probleem met zwakke oplossingen is dat we de uniciteit voor het Cauchyprobleem kwijtraken: er kunnen meerdere oplossingen zijn bij een gegeven beginwaarde. Er moet dan een extra voorwaarde bij om de 'goede' oplossing te selecteren: de entropievoorwaarde van Lax. In het geval van de Burgersvergelijking komt deze voorwaarde neer op de eis dat de discontinuïteiten van de oplossing neerwaartse sprongen hebben. De verklaring dat deze voorwaarde de fysisch toelaatbare oplossing selecteert heeft te maken met het feit dat de informatie bevat in de beginwaarde niet vernietigd of gecreërd kan worden op het niveau van schokken.

Wij kunnen ook aantonen dat deze oplossing de limiet van de viskeuze oplossing is die verkregen wordt door een kleine viscositeit aan het systeem toe te voegen en deze naar nul te laten gaan. We kunnen dan aantonen dat er één zwakke entropische oplossing bestaat voor het Cauchy probleem (stelling van Kruzkhov).

De berekening van de lokale energievergelijking voor de zwakke oplossingen van de Eulervergelijking kan uitgebreid worden naar de zwakke oplossingen van de Burgersvergelijking. Dit geeft

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}u^2\right) + \partial_x \left(\frac{1}{3}u^3\right) + D(u) = 0 .$$

Als we aannemen dat u discontinu is in de punten x_i, met rechter en linker limieten u_i^+ en u_i^-, dan kunnen we de distributie $D(u)$ expliciet maken:

$$D(u) = -\frac{1}{12} \sum_i \left(u_i^+ - u_i^-\right)^3 \delta_{x_i} .$$

De entropievoorwaarde van Lax betekent hier dus ook dat $D(u)$ positief is, en we zien dat de energiedissipatie op het niveau van de schokken plaatsvindt.

Statistische oplossingen

We hebben gezien dat in een turbulente stroming het aantal vrijheidsgraden gigantisch is. Hieruit volgt dat alle waarnemingen een statistisch karakter hebben. Vanuit wiskundig oogpunt leidt dit tot het probleem van het zoeken van statistische oplossingen.

A priori is het concept van een statistische oplossing van een evolutievergelijking eenvoudig: we nemen aan dat het beginprofiel van een stochastische parameter afhangt. De oplossing hangt dan daar ook van af en is daarmee stochastisch. Deze aanpak werkt goed als we het bijbehorende Cauchyprobleem kunnen oplossen.

Aangezien dit niet altijd het geval is, nemen we over het algemeen genoegen met bredere definities van de notie van statistische oplossing, definities die netelige problemen geven (zoals uniciteit) maar waarvan het interessant is om toch statistische oplossingen te zoeken voor vergelijkingen waarvan we het Cauchyprobleem niet op kunnen lossen (bijvoorbeeld Euler). Zelfs als we het bijbehorende Cauchyprobleem wel kunnen oplossen, is het overigens nog niet zo eenvoudig om de volledige oplossing op te schrijven als functie van het beginprofiel, en dus als functie van de stochastische parameter.

Laten we dit expliciet maken voor de Burgersvergelijking. We nemen als beginproces: $u_0(x, a)$, met a een stochastische parameter. De stroming beschreven door de Burgersvergelijking geeft op het tijdstip t een nieuw proces $u(t, x, a)$. Wat kunnen wij hierover zeggen?

De eerste stap voorwaarts bij dit vraagstuk is gezet door Sinai (1992): hij nam voor u_0 de Brownse beweging vanuit 0. Hij kan dan op het tijdstip t het proces $u(t, x, a)$ beschrijven: het is een zogenaamd *Lévyproces*, een welbekend proces dat sprongen kan hebben. Hiervoor gebruikte Sinai de klassieke constructie van Hopf-Cole, die het mogelijk maakt om de zwakke entropische oplossing van de Burgersvergelijking als functie van de beginwaarde expliciet te maken.

De tweede stap voorwaarts is die van Carraro en Duchon (1994): deze auteurs bekeken het geval dat u_0 een proces van Lévy is, homogeen aan de rechterkant (dus translatie-invariant) en met negatieve sprongen. Zij tonen aan dat op het tijdstip t, $u(t,x,a)$ nog steeds een homogeen Lévyproces is met negatieve sprongen. Verder verkrijgen zij expliciet de evolutievergelijking, die de evolutie van de Lévy-exposant van het proces bepaalt (een homogeen Lévyproces wordt eenvoudig beschreven met een bepaalde functie die men de Lévy-exposant noemt).

De derde stap voorwaarts komt van Bertoin (1998): Bertoin behandelt het geval dat u_0 een Lévyproces is vanuit 0. In tegenstelling tot de vorige auteurs gebruikt Bertoin net als Sinai de Hopf-Coletransformatie, terwijl Carraro en Duchon die niet gebruiken en daarom de notie van intrinsieke statistische oplossing moeten invoeren. Dit is een zeer interessante notie want zij geeft een natuurlijke oplossing voor het probleem van de zogenaamde *infrarode divergentie* die overal aanwezig is in turbulentie.

De vierde stap voorwaarts komt van Chabanol en Duchon (2002): zij nemen deze keer voor u_0 een Markovproces, homogeen aan de rechterkant en met negatieve sprongen. Op ieder tijdstip blijft u een homogeen Markovproces met negatieve sprongen. Zij verkrijgen verder de evolutievergelijking die te maken heeft met de transitiekern van het proces.

Natuurlijk beweer ik hier niet alles te vertellen over de Burgersvergelijking. Er zijn nog veel andere vragen, zoals de rol van de homogeniteit en het vraagstuk van de uniciteit van de statistische oplossingen, plus het grote vraagstuk van het vinden van oplossingen van dit type voor andere vergelijkingen, zoals die van Euler.

Conclusie

Wat is het juiste model om turbulente stroming te beschrijven? Misschien zijn de zwakke oplossingen van het Eulerprobleem, zoals Onsager aankondigde, de sleutel, maar zeker is dat niet. Het kan ook zijn dat de juiste vergelijking niet die van Euler is, maar een ingewikkelder model dat gebruikt maakt van de lokale variaties van het snelheidsveld.

In ieder geval lijkt het erop dat voor het turbulentieprobleem de Eulervergelijking relevanter is dan de Navier-Stokesvergelijking. Want als men het Cauchyprobleem voor de Navier-Stokesvergelijkingen adequaat zou kunnen oplossen, dan nog moet men de viscositeit naar nul laten gaan om turbulentie in dimensie drie te begrijpen. Er is weinig kans dat we iets kunnen zeggen over deze limiet, zonder informatie over het gedrag van een limietvergelijking.

Aanvullende literatuur

Over het werk van Jean Leray verscheen in 2000 een artikel in de *Gazette des mathématiciens* [1]. Voor niet-lineaire hyperbolische vergelijkingen en de entropievoorwaarde verwijs ik naar [2]. Turbulentie gezien door een fysicus is te vinden in [3–4]. Over de resultaten die in dit artikel ter sprake kwamen en een aantal gevolgen, zie [5]. Over de Burgersvergelijking en Lévyprocessen kan men lezen in [6].

Referenties

1 Jean-Yves Chemin, *Gazette des mathématiciens*, bijlage bij nummer 84, geheel gewijd aan het werk van Jean Leray, 2000.

2 Denis Serre, *Systèmes de lois de conversation I*, Diderot éditeur, 1996.

3 Uriel Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.

4 Lars Onsager, 'Statistical hydrodynamics', *Nuovo Cimento*, **(2)**, pp. 279–287, 1949.

5 Raoul Robert, *Statistical hydrodynamics. Handbook of mathematical fluid mechanics*, **2**, Friedlander and Serre editors, 2003.

6 Laurent Carraro, Jean Duchon, 'Equation de Burgers avec conditions initiales à accroissements indépendants et homogènes', *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*, **15**(4) (1998), pp. 431–458.