Walter van Suijlekom
Max-Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7, 53111 Bonn
Duitsland
waltervs@mpim-bonn.mpg.de

Onderzoek

Niet-commutatieve meetkunde niet-communicabel?

Niet-commutatieve meetkunde is een snelgroeiend wiskundig vakgebied, met steeds meer interactie met andere delen van de wiskunde. Wat zijn de ideeën die ten grondslag liggen aan dit gebied? Walter van Suijlekom, van oorsprong natuurkundige, is postdoc aan het Max Planck Instituut voor Wiskunde in Bonn. Hij werkt op het gebied van de niet-commutatieve meetkunde in interactie met kwantumveldentheorie.

Alhoewel de niet-commutatieve meetkunde een centrale plaats inneemt binnen de moderne wiskunde, blijkt dat er weinig voor een breder (wiskundig) publiek toegankelijke teksten zijn geschreven. Laat ik hierbij een poging wagen een tipje van de sluier op te lichten. Naast elementaire topologie, lineaire algebra en analyse, zal ik slechts enkele basisconcepten van representatietheorie gebruiken.

Laten we beginnen met het basisidee van de niet-commutatieve meetkunde, zoals rond 1980 uiteengezet door Alain Connes. Zijn ideologie berustte deels op een veel ouder resultaat van Gelfand en Naimark. Zij bewezen in 1943 een stelling die aangeeft hoe een topologische ruimte kan worden geconstrueerd uit een commutatieve (C^*-) algebra, zodanig dat deze algebra isomorf is met de algebra van continue functies op de bewuste topologische ruimte. De topologische eigenschappen van de onderliggende ruimte zijn dus geheel gecodeerd in de algebra van continue functies op deze ruimte. Vergelijk dit met de dualiteit in de algebraïsche meetkunde tussen variëteiten en polynoomringen.

Op grond van deze stelling, zou men dus een virtuele *niet*-commutatieve ruimte kunnen beschrijven door middel van een *niet*-commutatieve (C^*-) algebra. Zo'n algebra wordt beschreven door een onderalgebra van de algebra van begrensde operatoren in een Hilbertruimte.

We zullen hier zien dat *niet-commutatieve* meetkunde ook bijzonder geschikt is om bepaalde exotische *commutatieve* ruimtes te beschrijven. Als voorbeeld nemen we hier de zogeheten bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus en associëren met deze niet-Hausdorff topologische ruimte op natuurlijke wijze de niet-commutatieve torus.

We generaliseren zijn constructie naar een grote klasse van gladde ruimtes en beschrijven in het bijzonder de niet-commutatieve vier-dimensionale sfeer.

Commutatieve meetkunde anders belicht

We beginnen met een beschrijving van de commutatieve meetkunde vanuit een niet-commutatief perspectief. Een belangrijk resultaat in de functionaalanalyse, dat een drijvende kracht is achter de constructie van Connes' niet-commutatieve meetkunde, is de Gelfand-Naimark stelling. Deze stelling geeft een dualiteit tussen enerzijds bepaalde topologische ruimtes en anderzijds een zekere klasse van commutatieve algebra's. We brengen eerst in herinnering wat een (irreducibele) representatie van een algebra is. We werken steeds met de complexe getallen $\mathbf{C}$ als grondlichaam.

Definities.

1. Een (eindig-dimensionale) *representatie* van een (mogelijk niet-commutatieve) algebra A op een vectorruimte $\mathbf{C}^n$ is een homomorfisme π van A naar de algebra $M_n(\mathbf{C})$ van $n \times n$ matrices.
2. Een representatie heet *irreducibel* als de enige deelruimtes van $\mathbf{C}^n$ die invariant zijn onder de werking van $\pi(A)$, de triviale deelruimtes $\{0\}$ en $\mathbf{C}^n$ zijn.
3. Twee representaties π_1, π_2 op respectievelijk $\mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}^m$, heten *unitair equivalent* als er een unitaire matrix $U \in M_{nm}(\mathbf{C})$ bestaat zodat $\pi_1(a) = U\pi_2(a)U^*$ voor elke $a \in A$.

Als de algebra A een involutie heeft (zoals complexe conjugatie), dan verlangen we dat de representatie π deze structuur respecteert. In het geval van oneindig-dimensionale representaties vervangen we $\mathbf{C}^n$ door een Hilbertruimte en $M_n(\mathbf{C})$ door de begrensde operatoren op deze Hilbertruimte.

Merk op dat een irreducibele representatie van een commutatieve algebra altijd 1–dimensionaal is. Hieruit volgt dat de notie van unitaire equivalentie in het geval van commutatieve algebra's triviaal is.

Laat X een compacte Hausdorff topologische ruimte zijn, en definieer $C(X)$ als de algebra van continue functies op X met puntsgewijs product: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ en involutie $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Gelfand en Naimark bewezen de volgende stelling, hier in iets uitgeklede vorm,[1] die een mijlpaal vormt in de functionaalanalyse.

Stelling. *De ruimte van irreducibele representaties van $C(X)$ vormt in een geschikte topologie een compacte Hausdorff topologische ruimte homeomorf aan X. Elk punt $x \in X$ induceert een irreducibele representatie ev_x in $\mathbf{C}$ gegeven door evaluatie in het punt x:*

$$\mathrm{ev}_x(f) = f(x).$$

De bedoelde topologie op de ruimte van 1-dimensionale irreducibele representaties is gegeven als volgt. Voor eindige verzamelingen van elementen $f_1, \ldots, f_n$ in $C(X)$ en $\epsilon > 0$ definieert

$$\mathcal{U}(\pi, f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \{\pi' : |\pi'(f_i) - \pi(f_i)| < \epsilon, i = 1, \ldots n\}$$

een open omgeving van π.

Voorbeelden.

a. X bestaat uit één punt. Een continue functie op X is gegeven door een complex getal, zodat $C(X) \cong \mathbf{C}$. Een irreducibele representatie is gegeven door een homomorfisme $\pi : \mathbf{C} \to M_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ zodat $\pi(\lambda 1) = \lambda\pi(1) = \lambda$. Dit legt π volledig vast en er is dus één irreducibele representatie, corresponderend met het punt in X.

b. X bestaat uit n punten. Een continue functie op X is nu gegeven door n complexe getallen, met puntsgewijs product zodat $C(X)$ de onderalgebra $D_n(\mathbf{C})$ van diagonaalmatrices in $M_n(\mathbf{C})$ vormt. Er zijn n irreducibele representaties en wel de projecties op het k-de diagonaalelement: $\pi_k(M) = M_{kk}$ met M een diagonaalmatrix en $k = 1, \ldots, n$. De topologie op de ruimte van irreducibele representaties zoals gedefinieerd door de open verzamelingen U, is de discrete topologie op X.

c. Een iets interessanter voorbeeld is gegeven door de cirkel S^1. Het is bekend dat een continue functie op S^1 kan worden geschreven als een Fourierexpansie:

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k z^k$$

waar $z(t) = e^{2\pi i t}$ voor $t \in [0,1[$ en $\{a_k\}$ een snel dalende rij. Voor een representatie π van $C(S^1)$ geldt nu dat $\pi(f) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi(z)^k$ zodat een representatie volledig is gekarakteriseerd door de waarde die hij aanneemt op het polynoom z. Hier is $\pi(z)^{-1} = \pi(z^{-1})$. Omdat een irreducibele representatie van een commutatieve algebra 1-dimensionaal is, geldt dat $\pi(z)\overline{\pi(z)} = \pi(z\bar{z}) = \pi(1) = 1 \in \mathbf{C}$, en dus is $\pi(z)$ een complex getal met modulus 1: een punt op de cirkel! We zien dat de verzameling van irreducibele representaties van $C(S^1)$ is gegeven door de cirkel. Het is dan niet moeilijk in te zien dat de topologie zoals gedefinieerd door de open verzamelingen U, wordt gegenereerd door de intervallen op S^1.

De stap van commutatieve naar niet-commutatieve meetkunde bestaat uit het toelaten van niet-commutatieve algebra's. Gemotiveerd door de stelling van Gelfand en Naimark, beschrijft een niet-commutatieve (C^*-)algebra A een onderliggende, virtuele niet-commutatieve topologische ruimte, waarop A de algebra van continue functies vormt.

Een motiverend voorbeeld hiervan komt uit de natuurkunde. In de overgang van de klassieke naar de kwantummechanica worden de coördinaten plaats en impuls van de klassieke faseruimte vervangen door elementen x en p van een niet-commutatieve algebra. Zij voldoen aan de beroemde Heisenberg-relatie: $[x, p] = i\hbar$, met $\hbar$ de constante van Planck. Deze niet-commutatieve algebra geeft een beschrijving van de virtuele niet-commutatieve faseruimte.

Nu is meetkunde meer dan alleen topologie zodat we meer data nodig hebben om een (compacte) gladde ruimte te beschrijven. Connes heeft daartoe zogeheten *spectraaltripels* ingevoerd, die bestaan uit een (onderalgebra van een) C^*-algebra A die gerepresenteerd is in een Hilbertruimte, samen met een zelfgeadjungeerde onbegrensde operator D op deze Hilbertruimte, onderhevig aan een aantal condities [1]; één van de meest belangrijke is dat de commutator $[D, a] = D \circ a - a \circ D$ een begrensde operator is voor alle $a \in A$. Voor meer details verwijzen we naar Connes' boek [2] en naar [12].

In het geval van een compacte (Riemannse spin) gladde ruimte X, neemt men als algebra $C^\infty(X)$ bestaande uit de gladde (oneindig differentieerbare) functies op X en voor D de zogeheten Diracoperator, beide gerepresenteerd op een geschikte Hilbertruimte. (Dit is de Hilbertruimte bestaande uit kwadratisch integreerbare secties van een spinorbundel op X.) Het is mogelijk vanuit deze drie objecten de gehele Riemannse gladde ruimte X met al zijn structuur – metriek, atlas van kaarten – te reconstrueren. We zullen dit illustreren aan de hand van een eenvoudig voorbeeld: de cirkel.

Voorbeeld. Zoals beschreven in voorbeeld (c) hierboven, beschrijft de algebra $C(S^1)$ van continue functies op S^1 de topologische ruimte S^1. Als eerste ingrediënt van het spectraaltripel nemen we de dichtliggende onderalgebra $C^\infty(S^1)$ in $C(S^1)$ van gladde functies op S^1. Als Hilbertruimte nemen we de ruimte $L^2(S^1)$ bestaande uit kwadratisch integreerbare functies ψ op S^1. De representatie van $C^\infty(S^1)$ op deze Hilbertruimte is gegeven door middel van het puntsgewijs product: $(f\psi)(t) = f(t)\psi(t)$. De definitie van het spectraaltripel wordt voltooid door de onbegrensde operator: $D = -\frac{i}{2\pi}\frac{d}{dt}$. Voor een gladde functie f is de commutator $[D, f]$ zeker een begrensde operator op $L^2(s^1)$.

We reconstrueren de gebruikelijke metriek op S^1, gegeven als de afstand $(s - t) \mod 1$ tussen twee punten $s, t \in [0, 1)$ op de cirkel. We confronteren Connes' afstandsfunctie voor een spectraaltripel met deze natuurlijke metriek op de cirkel. De afstandsfunctie tussen twee punten op de cirkel (herinner dat de topologie van S^1 al is gereconstrueerd, zie voorbeeld (c)) is gedefinieerd als

$$d(s,t) = \sup_{f \in C^\infty(S^1)} \left\{ |f(s) - f(t)| : \sup_{t' \in S^1} [D, f](t') \leq 1 \right\}.$$

Dit supremum is gegeven door

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \left| \frac{e^{2\pi ins} - e^{2\pi int}}{2\pi n} \right|,$$

daar $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ een basis vormt voor $C^\infty(S^1)$. Met enige analyse volgt dat het supremum wordt bereikt voor $n = 0$, zodat $d(s,t) = (s-t) \mod 1$.

In de volgende paragraaf zullen we laten zien hoe we de technieken van de niet-commutatieve meetkunde ook kunnen gebruiken voor het beschrijven van niet-Hausdorff ruimtes. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de zogenaamde bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus; we zullen zien dat deze wordt beschreven door de de ruimte van equivalentieklassen van irreducibele representaties van de *niet-commutatieve torus*. Hoewel de unitaire equivalentie niet aan de orde was in het commutatieve geval, is het natuurlijk equivalentieklassen van representaties te beschouwen.

Foliatie van de torus

Een voorbeeld van een niet-Hausdorff ruimte wordt gegeven door de *bladenruimte* (*leaf space*) van een foliatie van een gladde variëteit. Om een goede beschrijving te geven van continue functies op zulke ruimtes, moeten we weer een niet-commutatieve algebra toelaten. We beperken ons tot het illustratieve voorbeeld van de zogenaamde Kroneckerfoliatie van de torus en zullen zien dat de niet-commutatieve algebra de niet-commutatieve torus is. We beperken de volgende definitie tot het 1-dimensionale geval (zie bijvoorbeeld Moerdijk & Mrčun [17] voor het algemene geval).

Definities. Een 1-dimensionale *foliatie* van een gladde variëteit V is gegeven door een vectorveld χ op V. Een *blad* L van deze foliatie is een curve die door dit vectorveld wordt gegenereerd en de *bladenruimte* is de partitie van V in bladen: $V = \cup_\alpha L_\alpha$.

De Kroneckerfoliatie van de torus is gedefinieerd als volgt. We beschouwen de torus $\mathbf{T}^2$ als $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ zodat we een vectorveld lokaal kunnen schrijven in de coördinaten (x,y) van $\mathbf{R}^2$. Zij $\chi = \partial/\partial x + \theta\partial/\partial y$ met θ een reëel getal. Een blad L van deze foliatie is gegeven door de curve op $\mathbf{T}^2$ geïnduceerd door de lijn $y = \theta x + c$ in $\mathbf{R}^2$.

Hierin is c een reëele constante tussen 0 en 1. Twee constantes c en c' definieren hetzelfde blad als $c = c' + \theta N$ (mod 1) voor een geheel getal N. We concluderen dat de bladen worden geparametriseerd door de cirkel modulo $\theta\mathbf{Z}$, zodat de ruimte van bladen $X = \mathbf{R}/(\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z})$. Als θ een rationaal getal is, is dit een bepaald interval op de cirkel. Echter, als θ een irrationaal getal is, is $S^1/\theta\mathbf{Z}$ een veel exotischer ruimte en bevat de algebra van continue functies op de bladenruimte X weinig interessante functies. Omdat $\theta\mathbf{Z}$ in dit geval dicht ligt in S^1, is $C(X) \simeq \mathbf{C}$. Met de stelling van Gelfand en Naimark in ons achterhoofd concluderen we dat deze algebra duidelijk niet fijn genoeg is om de (niet-Hausdorff) topologie van X te beschrijven. We zullen zien dat dit probleem kan worden opgelost door een niet-commutatieve algebra toe te laten.

We beginnen met een motiverende beschouwing van de bladenruimte $S^1/\theta\mathbf{Z}$ in het geval dat θ een rationaal getal is en schrijven $\theta = \frac{p}{q}$, met p en q copriem. Laat A_θ de algebra zijn die bestaat uit Fourierexpansies

$$a = \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} a_{nm} u^n v^m$$

met a_{nm} een snel dalende rij en u, v twee unitaire elementen die voldoen aan

$$uv = e^{2\pi i\theta} vu.$$

Stelling. *Er bestaat een één-op-één verband tussen eindig dimensionale irreducibele representaties van $C(S^1/\theta\mathbf{Z})$ en van A_θ voor θ irrationaal.*

De essentiële stap in het bewijs is om aan te tonen dat elke irreducibele representatie unitair equivalent is aan de representatie π gedefinieerd door de volgende twee $q \times q$ matrices,

$$\pi(u) = \begin{pmatrix} e^{2\pi it} & & & \\ & e^{2\pi i(t+\theta)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi i(t+(q-1)\theta)} \end{pmatrix},$$

$$\pi(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat de irreducibele representaties van A_θ zijn gegeven door een element $t \in [0,1)$, een punt op de cirkel. Uit de vorm van deze matrices leest men af dat twee verschillende $t, t' \in S^1$ unitair equivalente representaties π, π' definieren slechts in het geval dat $t' = t + k\theta \mod 1$, voor een geheel getal k. Inderdaad kan dan de representatie π' worden verkregen door een 'shift' in de diagonaalelementen in $\pi(u)$; met andere woorden, de shiftmatrix U gedefinieerd door $Ue_i = e_{i+k}$ geeft de unitaire equivalentie tussen π' en π:

$$\pi' = U\pi U^*.$$

Zodoende zijn de equivalentieklassen van irreducibele representaties van A_θ gelabeld door een element $t \in S^1/\theta\mathbf{Z}$, hetgeen ook geldt voor de equivalentieklassen van irreducibele representaties van $C(S^1/\theta\mathbf{Z})$.

Als θ een irrationaal getal is, is de ruimte $S^1/\theta\mathbf{Z}$ niet meer Hausdorff. We zagen al dat $C(S^1/\theta\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{C}$ en dus weinig informatie bevat over de quotiëntruimte. Maar de stelling van hierboven geldt nu niet meer en de topologie van $S^1/\theta\mathbf{Z}$ is veel beter gevat door de algebra A_θ. Hier definieren we A_θ net als hierboven door

Figuur 1 Definitie van het blad $y = \theta x$ en een Kroneckerfoliatie van de torus

weer twee unitaire elementen u en v te introduceren die voldoen aan $uv = e^{2\pi i\theta} vu$, met nu θ irrationaal. Laat A_θ dus bestaan uit Fourierexpansies:

$$a = \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} a_{nm} u^n v^m$$

met a_{nm} een snel dalende rij. Gemotiveerd door het voorbeeld voor rationele θ, kunnen we concluderen dat de *niet-commutatieve* algebra A_θ een fijnere beschrijving geeft van de continue functies op de niet-Hausdorff ruimte $S^1/\theta\mathbf{Z}$ dan $C(S^1/\theta\mathbf{Z})$.

In de literatuur staat de algebra A_θ bekend onder de naam *niet-commutatieve torus*. De oorsprong van deze naamgeving is dat de algebra A_θ in de klassieke limiet $\theta \to 0$ een algebra vormt die bestaat uit Fourierexpansies in twee onderling commuterende unitaire elementen u en v. Inderdaad kan zowel u als v worden opgevat als het genererend polynoom op een cirkel zodat $A_{\theta=0} = C(\mathbf{T}^2)$.

De niet-commutatieve torus kan ook worden begrepen als een *kwantisatie* van de torus $\mathbf{T}^2$. De kwantisatietheorie geeft een wiskundige beschrijving van het aan het eind van de vorige paragraaf beschreven vervangen van de grootheden plaats en impuls van een fysisch deeltje door elementen in een niet-commutatieve algebra. In het geval van de torus is er door Rieffel in [18] een *kwantisatieafbeelding* $Q_\theta \colon C(\mathbf{T}^2) \to A_\theta$ geconstrueerd; deze afbeelding voegt aan iedere continue functie op de torus $\mathbf{T}^2$ een element in A_θ toe:

$$Q_\theta\left(\sum_{nm} f_{nm} e^{2\pi i(ns+mt)}\right) = \sum_{nm} f_{nm} u^n v^m\ ,$$

met $(s,t) \in \mathbf{T}^2$ en u, v de unitaire generatoren van A_θ. Het nemen van de klassieke limiet $\theta \to 0$ kan dan worden begrepen als een inverse van de kwantisatieafbeelding.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat de *meetkunde* van de niet-commutatieve torus kan worden beschreven door middel van een spectraaltripel, geïntroduceerd in [1]. Er zijn verschillende toepassingen van de niet-commutatieve torus te vinden in de natuurkunde; onder andere in de beschrijving van het kwantum Hall-effect.

Recente ontwikkelingen

Recentelijk is er door Connes en Landi in [6] een veelomvattende generalisatie gevonden van de niet-commutatieve torus A_θ naar compacte gladde ruimtes die een actie dragen van de torus $\mathbf{T}^2$. Dit geeft een veelomvattende uitbreiding van de schaarse lijst met voorbeelden van niet-commutatieve meetkundige ruimtes.

Een interessant voorbeeld dat we hier willen uitlichten is de niet-commutatieve vierdimensionale sfeer S^4_θ. We definieren eerst de (commutatieve) vier-sfeer S^4 door middel van twee complexe getallen a, b en één reëel getal x, die voldoen aan de relatie van de sfeer

$$aa^* + bb^* + x^2 = 1$$

waarin * staat voor complexe conjugatie. We nemen nu de volgende parametrisatie van deze coördinaten,

$$\begin{aligned} a &= e^{2\pi is}\cos\phi\cos\psi\ , \\ b &= e^{2\pi it}\sin\phi\cos\psi\ , \\ x &= \sin\psi\ , \end{aligned}$$

waarbij de hoeken ϕ, ψ domein $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ hebben en $s, t \in [0, 1)$.

Het voorkomen van de twee fasefactoren $e^{2\pi is}$ en $e^{2\pi it}$ staat ons toe een niet-commutatieve algebra te introduceren, door deze fasefactoren te vervangen door twee unitaire elementen u, v die voldoen aan $uv = e^{2\pi i\theta} vu$, met $\theta \in \mathbf{R}$. We introduceren drie elementen α, β en χ als

$$\begin{aligned} \alpha &= u\cos\phi\cos\psi\ , \\ \beta &= v\sin\phi\cos\psi\ , \\ \chi &= \sin\psi\ . \end{aligned}$$

De relatie tussen u en v induceert $\alpha\beta = e^{2\pi i\theta}\beta\alpha$ terwijl χ met α en β commuteert. Verder is er nog steeds de sfeer-relatie:

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \chi^2 = 1\ .$$

De niet-commutatieve algebra gegenereerd door $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$ en χ wordt vaak genoteerd met $C(S^4_\theta)$, suggererend dat deze algebra bestaat uit functies op de niet-commutatieve ruimte S^4_θ. In de klassieke limiet $\theta \to 0$, reduceert $C(S^4_\theta)$ tot de algebra $C(S^4)$ van continue functies op S^4.

Het blijkt dat er weer een spectraaltripel kan worden geconstrueerd dat een complete beschrijving geeft van de meetkunde van de niet-commutatieve vier-dimensionale sfeer S^4_θ.

In hetzelfde artikel [6] is hiervan een veelomvattende generalisatie geconstrueerd naar gladde ruimtes waarop een torus werkt door middel van diffeomorfismes. Men gebruikt hier de actie van de torus om als het ware een niet-commutatieve torus in de gladde ruimte te voegen. De meetkunde van al deze niet-commutatieve ruimtes kan weer worden beschreven met behulp van een spectraaltripel.

Conclusie

We concluderen dat de alledaagse meetkunde niet altijd goed te beschrijven is met behulp van commutatieve algebra's. Wanneer de topologische ruimte onder beschouwing niet Hausdorff is, bevat de algebra van continue functies op deze ruimte niet alle topologische informatie over deze ruimte.

Het toelaten van een niet-commutatieve algebra kan een uitweg bieden om zulke ruimtes toch (algebraïsch) te kunnen beschrijven. We hebben laten zien dat de niet-commutatieve torus een beschrijving geeft van de bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus.

Met het bespreken van de niet-commutatieve torus en de niet-commutatieve vier-sfeer hebben we geprobeerd te illustreren dat meetkunde een veel groter speelveld omvat; hierin zijn niet-commutatieve ruimtes net zo goed te beschrijven als commutatieve ruimtes.

Er zijn nog vele uitbreidingen denkbaar van de niet-commutatieve meetkunde van Connes. Zo is het mogelijk niet-commutatieve vectorbundels en hoofdvezelbundels met daarop connecties te definieren, en zelfs een niet-commutatieve Chern-Weiltheorie te construeren. We zullen hier niet verder op in gaan (zie hiervoor het boek [1]). In plaats daarvan geven we een aantal toepassingen van niet-commutatieve meetkunde of de technieken daarvan in andere delen van de wiskunde.

Eén toepassing is al genoemd, en is het beschrijven van mogelijk niet-Hausdorff topologische ruimten, in het bijzonder foliaties van gladde ruimtes. Naast een effectieve beschrijving van deze ruimtes met behulp van een spectraaltripel, zijn er ook belangrijke resultaten geboekt in de indextheorie, hetgeen meteen een andere toepassing levert. Zo is er een verreikende generalisatie van de indexstelling van Atiyah en Singer in de vorm van de Connes-Moscovici-indexstelling [10]. Deze laatste stelling drukt de index van een bepaalde operator uit in eenvoudigere uitdrukkingen, zodat de index gemakkelijker te berekenen is. Een grote motivatie voor Connes en Moscovici in het bewijzen van deze indexstelling, was het uitbreiden van de Atiyah-Singer-indexstelling naar niet-Hausdorff ruimtes, zoals de bladenruimte van een foliatie. De Connes-Moscovici-indexstelling gaat veel verder dan dat en is toepasbaar op willekeurige spectraaltripels, en dus willekeurige niet-commutatieve gladde ruimtes.

Daarnaast is een belangrijke toepassing te vinden in de theorie van Hopfalgebra's. Kort gezegd is een Hopfalgebra een niet-commutatieve generalisatie van een groep waarbij de groepsstructuur wordt vertaald op het niveau van de algebra van (polynome, continue of gladde) functies op de groep. De niet-commutatieve groepen worden vaak aangeduid met de naam *kwantumgroepen*; zie voor meer details over kwantumgroepentheorie onder andere de boeken [14–15].

De rijke interactie tussen (commutatieve) differentiaalmeetkunde en Liegroepen motiveert de studie naar de interactie tussen de theorie van spectraaltripels (niet-commutatieve gladde ruimtes) en Hopfalgebra'ss (kwantumgroepen). Lange tijd leek het onmogelijk de twee theorieën op een consistente manier te combineren, er waren zelfs enkele *no-go* stellingen. Recentelijk is er een manier gevonden om deze problemen te overwinnen aan de hand van een voorbeeld [11]. Hierin wordt een kwantisatie van de Liegroep $SU(2)$ bestudeerd. De meetkunde van deze niet-commutatieve ruimte, genoteerd met $SU_q(2)$, wordt beschreven door middel van een spectraaltripel, terwijl de groepsstructuur is gecodeerd in een Hopfalgebrastructuur op de algebra die hiervan onderdeel uitmaakt.

Tot slot merken we op dat er de laatste vijf jaar verschillende toepassingen zijn gevonden van niet-commutatieve meetkunde in de getaltheorie. Als voorbeelden noemen we het verschijnen van modulaire vormen in de classificatie van niet-commutatieve driedimensionale sferen [4–5] en in de berekening van de cyclische cohomologie[2] van de hierboven genoemde kwantumgroep $SU_q(2)$ [3]. Nog recentere interacties tussen niet-commutatieve meetkunde en getaltheorie zijn te vinden in het werk van Connes en Marcolli [7] (zie ook de review artikelen [8–9, 16]). Hierin wordt de structuur achter renormalisatie van kwantumveldentheorie bestudeerd. Het blijkt dat de vier-cyclotomische gehele getallen $\mathbf{Z}[i][\frac{1}{2}]$ ten grondslag liggen aan de niet-commutatieve structuur van renormalisatie.

Dankwoord Ik wil Klaas Landsman bedanken voor zijn commentaar, en Michel Ferrero en Giovanni Landi voor de uitgebreide discussie.

Noten

1 De volledige stelling luidt: De ruimte van irreducibele representaties van een commutatieve C^*-algebra A vormt een compacte Hausdorff topologische ruimte X zodat $A \cong C(X)$. Een C^*-algebra is een genormeerde algebra met involutie, compleet in de norm topologie, waarbij de norm $\| \ \|$ voldoet aan $\|a^*a\| = \|a\|^2$ voor elke $a \in A$. Voor $A = C(X)$ is de norm gedefinieerd door $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, welke voldoet aan de bovenstaande eigenschap zodat A een C^*-algebra vormt. Zie voor meer details bijvoorbeeld [13].

2 Cyclische cohomologie is een niet-commutatieve generalisatie van de Rham cohomologie

Referenties

1 A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, 1994.

2 A. Connes, 'Noncommutative geometry and reality', *J. Math. Phys.*, **36** (11) (1995), pp. 6194–6231.

3 A. Connes, 'Cyclic cohomology, quantum group symmetries and the local index formula for $SU_q(2)$', *J. Inst. Math. Jussieu*, **3** (2004), pp. 17–68.

4 A. Connes and M. Dubois-Violette, 'Noncommutative finite-dimensional manifolds I. Spherical manifolds and related examples', *Commun. Math. Phys.*, **230** (2002), pp. 539–579.

5 A. Connes and M. Dubois-Violette, 'Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres', *Lett. Math. Phys.*, **66** (2003), pp. 91–121.

6 A. Connes and G. Landi, 'Noncommutative manifolds: The instanton algebra and isospectral deformations', *Commun. Math. Phys.*, **221** (2001), pp. 141–159.

7 A. Connes and M. Marcolli, 'Renormalization and motivic Galois theory', *International Math. Research Notices*, **75**, pp. 4073–4092.

8 A. Connes and M. Marcolli, '**Q**-lattices: Quantum statistical mechanics and Galois theory', *Journal of Geometry and Physics*, **56** (2006), pp. 2–23.

9 A. Connes and M. Marcolli, 'Quantum fields and motives' *Journal of Geometry and Physics*, **56** (2006), pp. 55–85.

10 A. Connes and H. Moscovici, 'The local index formula in noncommutative geometry', *Geom. Funct. Anal.*, **5** (1995), pp. 174–243.

11 L. Dabrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom, and J. C. Várilly, 'The Dirac operator on $SU_q(2)$', *Commun. Math. Phys.*, **259** (2005), pp. 729–759.

12 J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.

13 R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol.1: Elementary theory*, Academic Press, 1983.

14 C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, Berlin, 1995.

15 S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge, UK: University Press, 1995.

16 M. Marcolli, *Arithmetic noncommutative geometry*, University Lecture Series, 36. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

17 I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge, UK: University Press, 2003.

18 M. A. Rieffel, 'Deformation quantization of Heisenberg manifolds', *Commun. Math. Phys.*, **122** (1989), pp. 531–562.