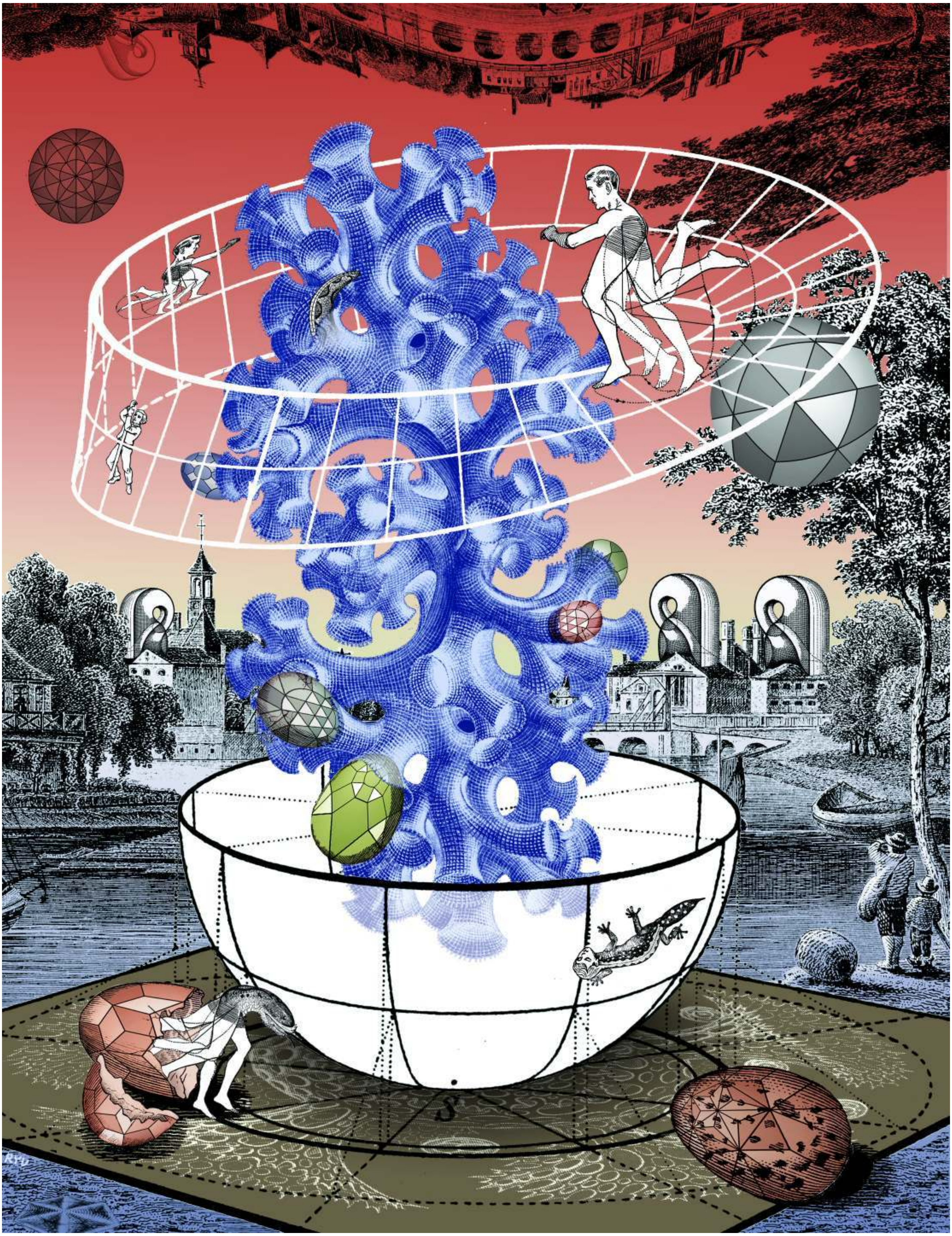


illustratie: Ryu Tajiri

Jan Aarts
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.m.aarts@ewi.tudelft.n

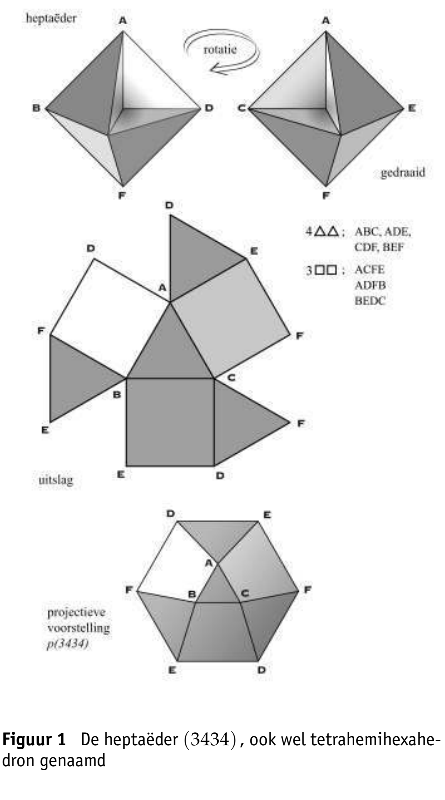
Onderwijs

Voorstellingen van het projectieve vlak

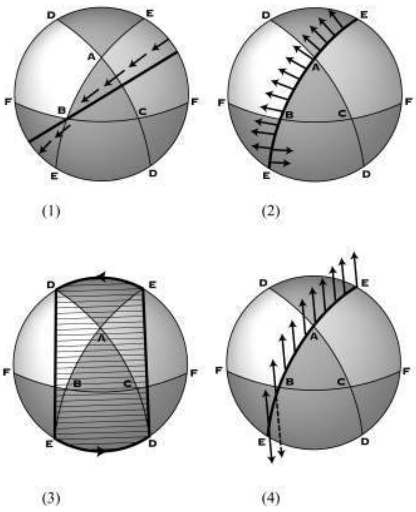
Meetkunde spreekt tot de verbeelding. Het is bijvoorbeeld een leuke opgave om je voor te stellen wat voor veelvlakken je allemaal kunt krijgen als je bij een regelmatig veelvlak alle hoekpunten op dezelfde manier afknot. Omgekeerd kunnen elementaire objecten uit de driedimensionale meetkunde, zoals Platonische lichamen, ons helpen om moeilijkere meetkundige objecten te begrijpen. Dit artikel gaat over de verschillende manieren waarop het projectieve platte vlak aanschouwelijk te maken is. Het kwam voort uit een vraag van een vwo-leerling en blijkt een onderwerp te zijn dat goed aansluit bij de kennis van de vwo-ers. Jan Aarts is emeritus hoogleraar topologie aan de Technische Universiteit te Delft. Hij heeft zich altijd bijzonder ingezet voor het onderwijs aan middelbare scholieren van wiskunde die wat verder gaat dan gebruikelijk op het vwo.

De *heptaëder*, het halfregelmatige zevenvlak, is een oppervlak dat is opgebouwd uit vier driehoeken en drie vierkanten. Al zijn ribben zijn even lang en in ieder hoekpunt komen om en om twee vierkanten en twee driehoeken samen. De heptaëder ontstaat uit de oktaëder, het regelmatige achtvlak, door weglating om en om van vier driehoeken en inhanging van drie vierkanten, zie figuur 1. Deze vierkanten zijn de middenvlakken van de oktaëder, die door vier van zijn hoekpunten gaan. In deze voorstelling van de heptaëder treedt zelfdoorsnijding op: de vierkanten doorsnijden elkaar twee aan twee in drie onderling loodrechte lijnen (die door één punt gaan). Die doorsnijding hangt samen met deze speciale wijze van voorstelling van de heptaëder. In werkelijkheid (in het echt) heeft elk tweetal van de drie vierkanten slechts twee overliggende hoekpunten gemeenschappelijk. Maar omdat we de heptaëder als figuur in de drie-dimensionale ruimte willen zien, is zelfdoorsnijding onvermijdelijk. In het fraaie knutselboek [5] heet de heptaëder een tetrahemihexahedron; *tetra* verwijst naar de vier driehoeken van de tetraëder , *hemi* naar de aanwezigheid van vlakken door het middelpunt, die dezelfde vorm hebben als de middelvlakken van het *hexahedron* (= regelmatig zesvlak of kubus), waarvan de middelvlakken vierkanten zijn. Dat wat betreft de nomenclatuur. In zekere zin is de heptaëder een uniform of Archimedisch veelvlak. Immers, het is opgebouwd uit regelmatige veelhoeken en in ieder hoekpunt zien we dezelfde configuratie: om en om 2 driehoeken en 2 vierkanten. In de gebruikelijke notatie van de uniforme veelvlakken zou het zevenvlak moeten worden aangeduid met (3434), vergelijk Van der Vegt [4] [p. 30]. Toch heeft Van der Vegt het heptaëder terecht niet opgenomen bij de opsomming van de Archimedische veelvlakken. Wat is hier aan de hand?

Om een beter inzicht in de heptaëder te krijgen maken we er een *uitslag* van. Na topologische vervorming ontstaat er een zeshoek waarvan het binnengebied verdeeld is in vier (topologische) driehoeken en drie (topologische) vierkanten. De plaatsing van de labels bij de hoekpunten geeft aan dat we op de rand nog diametrale punten twee aan twee met elkaar moeten identificeren (op elkaar moeten plakken). Om redenen die later duidelijk zullen worden, noemen we de zo verkregen figuur, inclusief plakschema, de *projectieve voorstelling* p(3434) van de heptaëder. In de drie-dimensionale ruimte is de identificatie van de diametrale punten alleen



Figuur 1 De heptaëder (3434), ook wel tetrahemihexahedron genaamd



Figuur 2 Merkwaardige eigenschappen van de heptaëder (in projectieve voorstelling)

mogelijk als we zelfdoorsnijding van de figuur toestaan; het resultaat is dan de heptaëder zoals boven beschreven. Terloops merken we nog op dat het wèl mogelijk is om in de vier-dimensionale ruimte een voorstelling zonder zelfdoorsnijding te maken. Laten we eens kijken welk een merkwaardige eigenschappen we uit de projectieve voorstelling kunnen aflezen, zie figuur 2.

1. Door twee diametrale punten met een rechte lijn te verbinden krijgen we een topologische cirkel (de diametrale punten worden immers op elkaar geplakt). Zo'n cirkel brengt geen verdeling van de heptaëder teweeg.
2. De heptaëder is niet oriënteerbaar. Bekijken we bijvoorbeeld de topologische cirkel $EBAE$ en zetten we, gaande in de richting van E naar B, pijltjes uit naar links, dan blijkt na een volledige rondgang dat de pijltjes naar rechts staan.
3. Van de (rechthoek) $DEDE$ moeten, in verband met het identificatie voorschrift, twee overstaande zijden, beide met label DE aan elkaar geplakt worden. Bij dat plakken wordt de rechthoek een halve slag gedraaid. Zo zien we dat er een Möbiusband in de heptaëder zit. Voor een impressie van de Möbiusband zie figuur 3. In de figuur staat rechts boven de bekende voorstelling van de Möbiusband als een band met een halve slag erin. Links in het midden staat een voorstelling van de Möbiusband met zelfdoorsnijding en links onder staat er een waarbij een zogenaamde kruismuts is gebruikt. Merk op dat je in beide laatste voorstellingen geen halve slag meer ziet.
4. De volgende eigenschap is nauw verwant met de eigenschap 2. De heptaëder is een éénzijdig oppervlak. Bepalen we een normaal met behulp van een rechtsdraaiende driepoot dan blijkt na rondgang langs een niet-scheidende cirkel dat de normaal de andere kant op wijst. We kunnen dus geen binnen- en buitenkant onderscheiden.
5. Uit de vorige eigenschap zien we meteen dat de heptaëder geen scheiding in de ruimte aanbrengt. Zijn er twee willekeurige punten in de ruimte gegeven die niet op de heptaëder liggen, dan kun je die punten altijd met een kromme verbinden. Je kan immers vanuit beide punten eerst richting oppervlak gaan tot je er heel dicht bij bent. Gelet op het gestelde in 4 kan je daarna de twee dicht bij de heptaëder gelegen punten met een kromme verbinden.
6. Zoals gebruikelijk geven we met Z, R, H opeenvolgend aan de aantallen zijvlakken, ribben, hoekpunten van een veelvlak. Voor de heptaëder vinden we $Z - R + H = 7 - 12 + 6 = 1$.

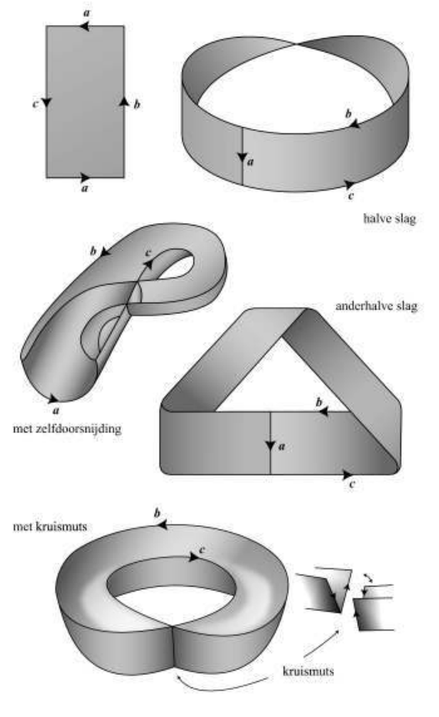
Zoals gezegd, wordt de heptaëder niet vermeld bij Van der Vegt [4]. Dat komt omdat Van der Vegt zich alleen bezighoudt met oriënteerbare oppervlakken (namelijk, afgesloten delen van de ruimte die begrensd worden door vlakke veelhoeken; loc.cit., p. 10) en eigenlijk alleen met sferische veelvlakken, dat zijn veelvlakken met met de topologische vorm van een sfeer; dat zie je aan het feit dat voor de sferische veelvlakken de volgende Formule van Euler geldt: $Z - R + H = 2$.

Samenvattend: *de heptaëder is noch oriënteerbaar, noch sferisch.*

Dit artikel is ontstaan naar aanleiding van vragen van Vera Wagenaar die ook na het Gymnasium nog belangstelling had voor stereometrie. Bij de studie van veelvlakken in [4] ging ze er zelf mee aan de slag en ontdekte de heptaëder en de treiskaidekaëder (dertien-vlak), die ontstaat door afknotting van de heptaëder. De vraag van Vera was: zijn deze oppervlakken bekend, en zo ja, waarom staan ze niet in [4]? Deze vragen zijn zojuist gedeeltelijk beantwoord. We komen er nog op terug in de sectie *De heptaëder*.

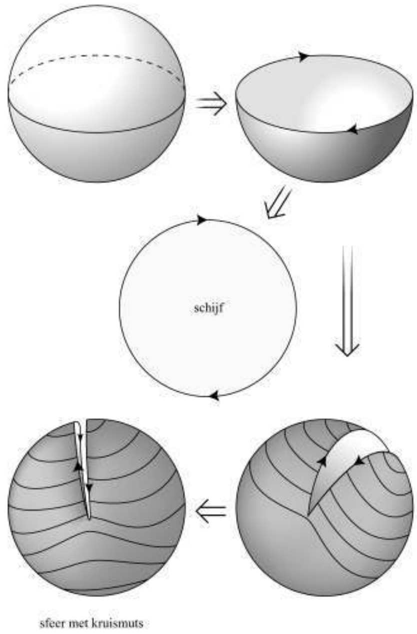
Het projectieve vlak

In de gewone vlakke meetkunde hebben twee verschillende evenwijdige lijnen per definitie geen snijpunt. Voor sommige doeleinden is het nuttig om elk tweetal verschillende evenwijdige lijnen wel een snijpunt te geven (en ook niet meer dan één). Zo'n snijpunt kun je je voorstellen als een *richting* of als een *oneindig ver punt*. Het *projectieve vlak* $\mathbf{P}^2$ bestaat uit het *gewone platte vlak* tezamen met *de oneindig verre punten.* Om dit beter te kunnen beschrijven, werken we met homogene coördinaten. Een punt x uit het vlak met gewone coördinaten (x_1, x_2) krijgt de homogene coördinaten (ξ_0, ξ_1, ξ_2) waarbij de ξ_n's reële getallen zijn, $\xi_0 \neq 0$, $x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}$ en $x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$. Bij een punt x horen meerdere drietallen van homogene coördinaten. De drietallen (ξ_0, ξ_1, ξ_2) en (η_0, η_1, η_2) zijn de homogene coördinaten van eenzelfde punt uit het vlak dan en alleen dan als er een getal $\lambda \neq 0$ bestaat zó dat $\xi_n = \lambda\eta_n$ voor $n = 1, 2, 3$. Aan een (richtings)vector $a = (a_1, a_2)$ in het vlak - een oneindig ver punt dus - voegen we de homogene coördinaten $(0, a_1, a_2)$ toe. De drietallen $(0, a_1, a_2)$ en $(0, b_1, b_2)$ zijn de homogene coördinaten van eenzelfde oneindig verre punt dan en slechts dan als er een getal $\lambda \neq 0$ bestaat zó dat $a_1 = \lambda b_1$ en $a_2 = \lambda b_2$; de vectoren (a_1, a_2) en (b_1, b_2) bepalen dan dezelfde richting.



Figuur 3 Vijfmaal de Möbiusband

Merk op dat bij alle drietallen van homogene coördinaten tenminste één van die getallen ongelijk aan nul is. Immers bij de punten uit het gewone vlak horen drietallen waarvan het eerste getal ongelijk 0 is en bij de oneindig verre punten horen drietallen waarvan weliswaar het eerste getal gelijk 0 is, maar de andere twee niet beide 0 kunnen zijn, omdat ze bij een richtingsvector horen (die altijd ongelijk aan de nulvector is). Verder is het duidelijk dat elk drietal van reële getallen die niet alle drie nul zijn ook optreedt als drietal van homogene coördinaten van een punt uit $\mathbf{P}^2$. Nu zijn we gewend om bij een drietal reële getallen (x_0, x_1, x_2) te denken aan (de gewone coördinaten van) een punt in de ruimte $\mathbf{R}^3$. De relatie tussen homogene coördinaten van een punt in het projectieve vlak $\mathbf{P}^2$ en punten in de ruimte $\mathbf{R}^3$ is als volgt. Alle homogene coördinaten van een punt uit het projectieve vlak zijn de punten van eenzelfde lijn in de ruimte door de oorsprong O, met uitzondering van O. De lijnen door O gelegen in het vlak $x_0 = 0$ corresponderen met de oneindig verre punten, de andere lijnen met door O corresponderen met de punten uit het (gewone) vlak. Dit volgt uit de boven gemaakte opmerkingen over de vraag wanneer twee drietallen de homogene coördinaten van eenzelfde punt zijn. Zo komen we tot een meer formele definitie van het projectieve vlak.



Figuur 4 Ontstaan van schijf met diametraalpuntsidentificatie en van bol met kruismuts

Definitie. De punten van het *projectieve vlak* $\mathbf{P}^2$ zijn de lijnen door de oorsprong in $\mathbf{R}^3$.

Een punt x in $\mathbf{P}^2$ is geheel bepaald door een vector langs de lijn in $\mathbf{R}^3$, met andere woorden door zijn homogene coördinaten, $x = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$. Een *lijn in* $\mathbf{P}^2$ is gegeven door een homogene lineaire vergelijking in de homogene coördinaten:

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0.$$

De getallen (a_0, a_1, a_2) heten de coördinaten van de lijn. De lijn $\xi_0 = 0$ is de verzameling van alle oneindig verre punten.

Twee verschillende lijnen in het projectieve vlak hebben precies één snijpunt. Dat kan men op de volgende wijze berekenen. Gegeven zijn de homogene vergelijkingen

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0$$
$$b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 = 0$$

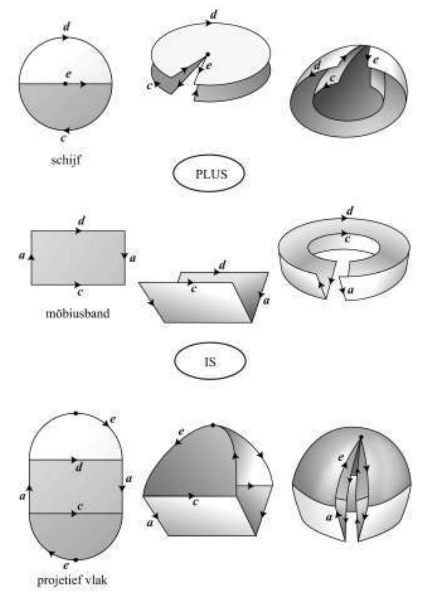
waarbij (a_0, a_1, a_2) en (b_0, b_1, b_2) verschillende vectoren in $\mathbf{R}^3$ zijn, beide ongelijk aan de nulvector. We onderscheiden twee gevallen.

1. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. In het gewone vlak hebben we te maken met twee niet-evenwijdige lijnen. Stellen we $\xi_0 = 1$, dan vinden we als oplossing de homogene coordinaten $(1, \cdot, \cdot)$ van een gewoon punt.
2. $a_1b_2 = a_2b_1$. Het gaat nu om evenwijdige lijnen in het gewone vlak. Er is nu een oplossing van de vorm $(0, \cdot, \cdot)$, de homogene coördinaten van een oneindig ver punt.

Het projectieve vlak is het standaardmodel van de tweedimensionale *elliptische meetkunde.*

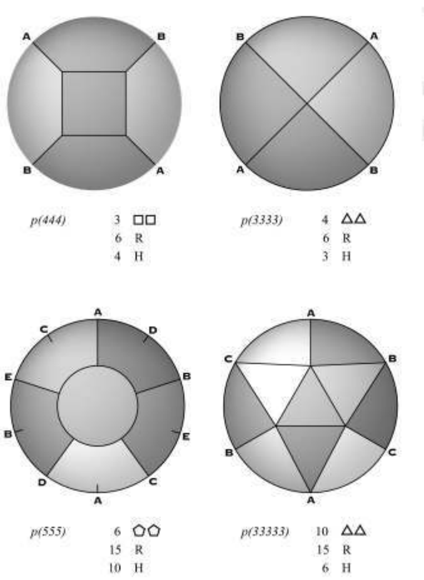
Topologie van het projectieve vlak

We zoeken nu een topologische voorstelling van het projectieve vlak. Daartoe proberen we een afstandsfunctie te introduceren. Hoe zou je de afstand tussen twee punten uit $\mathbf{P}^2$ meten? Volgens de definitie is een punt in $\mathbf{P}^2$ een lijn in $\mathbf{R}^3$ door O. De afstand tussen twee lijnen door O, dat lijkt wat vreemd. We bekijken de eenheidssfeer $\mathbf{S}^2$ in $\mathbf{R}^3$, met middelpunt O en straal 1. Deze snijdt elke lijn door O in een paar van diametrale punten. In plaats van 'paar van diametrale punten' gebruiken we ook wel de term 'antipodaal paar'. Vanuit topologisch standpunt is het projectieve vlak de verzameling van alle antipodale paren van $\mathbf{S}^2$. De afstand tussen antipodale paren wordt op de gebruikelijke manier berekend; de afstand van het antipodale paar $\{p, p^a\}$ tot het antipodale paar $\{q, q^a\}$ is het minimum van de afstanden $d(p, q)$ en $d(p, q^a)$. Voor een geoefend topoloog is dit een prima definitie van het (topologische) projectieve vlak.



Figuur 5 Het projectieve vlak is de som van een schijf en een Möbiusband

Een duidelijk en bruikbaar beeld van het projectieve vlak ontstaat op de volgende manier. In figuur 4 zien we links een sfeer; dit is de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^3$. Hiervan moeten we alle antipodale paren identificeren (op elkaar plakken). Om te beginnen 'onthoofden' we de sfeer; we verwijderen alle punten boven het equatorvlak. Wat overblijft is de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand. Bijna alle punten van het projectieve vlak worden nu voorgesteld door één punt; de bijbehorende diametrale punten zijn bij de 'onthoofding' verdwenen. Op de rand zijn nog antipodale paren. Die moeten we paarsgewijs op elkaar plakken. Nu is een onthoofde bol topologisch niet anders dan een cirkelschijf. Zo komen we tot een voorstelling van het projectieve vlak die we in het vervolg nog vaak zullen gebruiken: *een schijf met diametraalpunts-iden-*



Figuur 6 De regelmatige projectieve veelvlakken

tificatie van de rand. Het is dus een cirkelschijf met antipodale paren op de rand. Met pijltjes geven we eventueel aan hoe de bogen op de rand op elkaar geplakt worden. De afstand tussen twee punten is nu de kortste verbinding tussen de punten, waarbij men ook gebruik mag maken van het feit dat de afstand tussen twee diametrale punten op de rand gelijk aan 0 is.

Toch is het ook interessant om een voorstelling van het projectieve vlak te maken waarbij elk punt gewoon een punt is en niet zoiets als een speciale lijn of bijzonder puntenpaar. We geven nu twee manieren waarop dit zou kunnen. De eerste manier sluit aan bij wat we net gedaan hebben. We gaan verder met de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand van antipodale paren. Nu brengen we de te identificeren punten zo dicht mogelijk bij elkaar; dat kan met een topologische deformatie. Om nu het plakken mogelijk te maken moet het projectieve vlak zichzelf doorkruisen. Het kan ook niet anders, omdat het projectieve vlak niet zonder zelfdoorsnijding in de drie-dimensionaal ruimte kan worden ingebed. De zojuist verkregen figuur wordt een *sfeer met kruismuts* genoemd.

Een andere manier om een topologische voorstelling van het projectieve vlak te krijgen is geschetst in figuur 5. De figuur bestaat uit negen deelfiguren. Op de eerste rij staat drie keer een schijf, in de tweede rij staat driemaal een Möbiusband en op de derde rij driemaal het projectieve vlak. Het doel van de figuur is aan te tonen dat een schijf en Möbiusband, op passende wijze aan elkaar geplakt, het projectieve vlak opleveren. In de linkerkolom gebeurt dit schematisch en de rechterkolom laat zien hoe dat in de ruimte gerealiseerd wordt (met zelfdoorsnijding). De middelste kolom is een fase tussen de schematische en realistische benadering.

Regelmatige veelvlakken in het projectieve vlak

Ieder weet dat er maar vijf typen van regelmatige sferische veelvlakken zijn: de tetraëder, kubus, oktaëder, dodekaëder en icosaëder, met opeenvolgend 4, 6, 8, 12 en 20 zijvlakken. Regelmatig wil hier zeggen dat alle zijvlakken van het veelvlak regelmatige veelhoeken zijn met evenveel hoeken en dat in ieder hoekpunt evenveel zijvlakken bij elkaar komen. Vaak geeft men het regelmatige veelvlak aan door de configuratie bij een hoekpunt op te schrijven. Bij bovenstaande opsomming krijgen we opeenvolgend (333), (444), (3333), (555), (33333). Meestal legt men aan de regelmatige veelvlakken de eis op dat ze convex zijn. We hebben dat hier vervangen door de voorwaarde dat het veelvlak vanuit topologisch standpunt de sfeer $\mathbf{S}^2$ is. Het doet er ook niet toe of de zijvlakken regelmatig zijn; wel is essentieel dat alle zijvlakken evenveel hoekpunten hebben. De gebruikelijke classificatie van de regelmatige en halfregelmatige veelvlakken, zie bijvoorbeeld [4] of [2], is alleen gebaseerd op de Formule van Euler:

$$Z - R + H = 2,$$

waarin Z, R en H de aantallen van opeenvolgend zijvlakken, ribben en hoekpunten zijn.

Bij toepassingen van de formule van Euler is het irrelevant dat de ribben keurige rechte lijntjes zijn; het mogen ook wel kronkellijntjes (zonder dubbelpunten!) zijn. In de topologische context is een *regelmatig sferisch veelvlak* een verdeling van het boloppervlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben, alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen. De ribben zijn topologische bogen. Een veelhoek wordt dus begrensd door een aantal bogen. Gemakshalve zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen. Ook in deze context *zijn er precies vijf regelmatige sferische veelvlakken.* Voor de volledigheid zullen we dat hier bewijzen. Zij namelijk Z het aantal zijden van een regelmatig sferisch veelvlak, R het aantal ribben en H het aantal hoekpunten, n het aantal ribben van elke zijde en k het aantal veelhoeken die in elk hoekpunt samenkomen. Merk op dat altijd al $n \geq 3$ en $k \geq 3$. Tel eerst de hoekpunten via de zijden: er zijn Z zijden; die leveren nZ hoekpunten. Hierbij wordt ieder hoekpunt k keer geteld. Dus $nZ = kH$. Tel nu de hoekpunten via de ribben: er zijn R ribben; die leveren $2R$ hoekpunten. Maar ieder hoekpunt wordt hierbij k maal geteld. Dus $2R = kH$. Invulling in de Formule van Euler geeft:

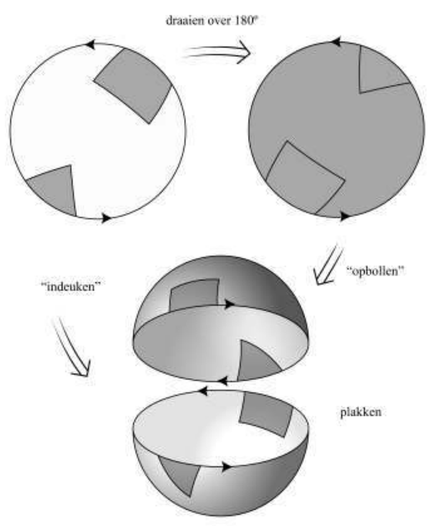
$$H(\tfrac{k}{n} - \tfrac{k}{2} + 1) = 2.$$

Omdat $H > 0$, moet ook $\frac{k}{n} - \frac{k}{2} + 1 > 0$. Daaruit volgt $3 \leq n < \frac{2k}{k-2}$, en dus $k < 6$. Bijgevolg $k = 3$, $k = 4$ of $k = 5$. Voor $k = 3$ komt er $n < 6$, en dus $n = 3$ ($H = 4$, de tetraëder), $n = 4$ ($H = 8$, de hexaëder of kubus) of $n = 5$ ($H = 20$, de dodekaëder.) Voor $k = 4$, krijgen we $n < 4$, dus $n = 3$ ($H = 6$, de oktaëder.) Voor $k = 5$ tenslotte: $n = 3$ ($H = 12$, de icosaëder.)

Ter introductie van de regelmatige projectieve veelvlakken het volgende. We gaan uit van een regelmatig veelvlak op de sfeer $\mathbf{S}^2$ dat invarant is ten opzichte van de inversie ι in het middelpunt; dat wil zeggen dat de afbeelding $\iota(x) = -x$ het veelvlak in zichzelf overvoert (dus hoekpunten in hoekpunten, ribben in ribben, zijden in zijden). Merk op dat ieder antipodaal paar door de afbeelding ι in zichzelf wordt overgevoerd. Dus geeft het regelmatige sferische veelvlak op natuurlijke wijze een regelmatig projectief veelvlak in de volgende zin.

Definitie. Een *projectief veelvlak* is een verdeling van het projectieve vlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben. Men noemt het veelvlak *regelmatig* als alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen.

Ook nu zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen. Het tetraëder is regelmatig, maar niet invariant onder inversie; de tetraëder geeft dus *geen* aanleiding tot een regelmatig projectief veel-



Figuur 7 Verdubbelingstelling

vlak. Maar de andere regelmatige veelvlakken doen het wel. De kubus, oktaëder, dodekaëder en icosaëder geven na identificatie van antipodenparen regelmatige projectieve veelvlakken die we opeenvolgend projectieve kubus, projectieve oktaëder, projectieve dodekaëder en projectieve icosaëder noemen. Ze zijn getekend in figuur 6. In samenhang met de boven gegeven notatie voor regelmatige sferische veelvlakken noteren we de veelvlakken opeenvolgend met $p(444)$, $p(3333)$, $p(555)$ en $p(33333)$. Zijn dit nu alle regelmatige projectieve veelvlakken? Ja, dat zijn alle regelmatige projectieve veelvlakken. Dat is een direct gevolg van de volgende stelling.

Verdubbelingsstelling. *Laat een projectief veelvlak gegeven zijn. Dan is er een sferisch veelvlak dat invariant is onder inversie en dat na identificatie van antipodenparen het gegeven projectieve veelvlak oplevert.*

Het bewijs staat in figuur 7. We stellen het projectieve vlak voor door een cirkelschijf met antipodenparen op de rand en stellen ons voor dat daarin het gegeven projectieve veelvlak is getekend. Om te beginnen maken we nu een kopie die uit de eerste ontstaat door draaiing over 180 graden. De eerste cirkelschijf 'deuken we in' en de tweede 'bollen we op'. Daarna plakken we de halve bollen op elkaar en *vergeten de identificatie van de antipodale paren op de rand.* Het zo verkregen sferisch veelvlak is invariant ten opzichte van inversie, dus na identificatie van antipodenparen ontstaat weer het gegeven projectieve veelvlak.

We merken nog op dat bij het verdubbelingproces het aantal zijden van het veelvlak verdubbelt en ook het aantal ribben en het aantal hoekpunten. Deze beschouwing levert een bewijs voor de Formule van Euler.

Formule van Euler voor het projectieve vlak. *Als van een projectief veelvlak het aantal zijden gelijk is een Z, het aantal ribben gelijk aan R en het aantal hoekpunten gelijk aan H dan is*

$$Z - R + H = 1.$$

Als we de tekening van de projectieve dodekaëder $p(555)$ bekijken, dan zien we dat die bestaat uit zes zijden die elk vijf ribben hebben. Iedere zijde grenst aan de vijf anderen. Daaruit volgt bijna onmiddellijk dat er zes kleuren nodig zijn om dit veelvlak zó te kleuren dat aan elkaar grenzende zijden een verschillende kleur krijgen. Hiermee is de helft van de volgende stelling bewezen.

Zeskleurenstelling. *Ieder projectief veelvlak kan met zes kleuren gekleurd worden. Het veelvlak $p(555)$ kan niet met minder dan zes kleuren gekleurd worden.*

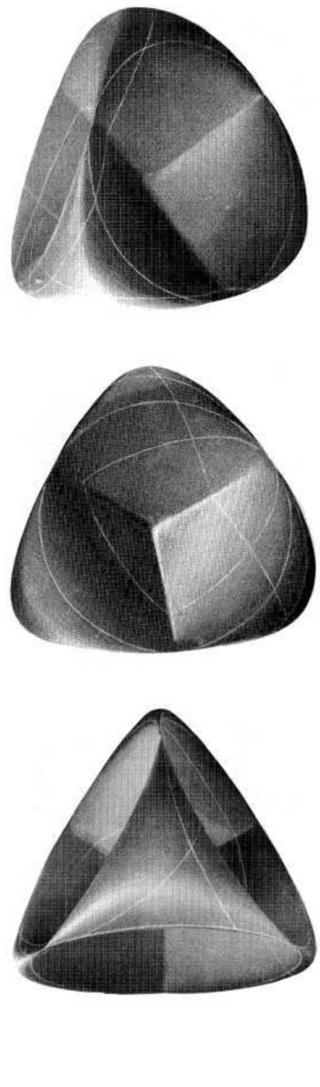
Het zou te ver voeren om hier een gedetailleerd bewijs van de Zeskleurenstelling te geven. Voor degenen die enigszins vertrouwd zijn met de aanpak van zulke bewijzen volstaat wellicht het volgende. Als we aannemen dat in ieder hoekpunt van het veelvlak precies drie zijden samenkomen, dan is de volgende uitgebreide formule van Euler van kracht. Is Z_k het aantal zijden met k ribben, dan is

$$Z_3 + 2Z_4 + Z_5 = 6 + \sum_{k \geq 7} (k-6)Z_k.$$

Uit de formule volgt dat er bij deze veelvlakken altijd zijden bestaan met vijf of minder buren.

Halfregelmatige projectieve veelvlakken

Naast de regelmatige projectieve veelvlakken kunnen ook nog de halfregelmatige veelvlakken van de eerste en tweede soort bekijken. We noemen een projectief veelvlak *halfregelmatig van de eerste soort* indien voor ieder hoekpunt de configuratie van de zijden die in dat hoekpunt samenkomen dezelfde is. In het bijzonder komen in ieder hoekpunt evenveel zijden samen. De halfregelmatige veelvlakken van de eerste soort worden ook wel *Archimedische* of *uniforme* veelvlakken genoemd. Door rolverwisseling van zijden en hoekpunten komt er de definitie van halve regelmaat van de tweede soort. Een projectief veelvlak heet *halfregelmatig van de tweede soort* indien voor iedere zijde de hoekpunten rond die zijde 'hetzelfde patroon hebben'. In figuur 8 is een overzicht gegeven van alle halfregelmatige projectieve veelvlakken. Telkens staat links het halfregelmatige veelvlak van de eerste soort, en rechts het halfregelmatige veelvlak van de tweede soort. De reeks is op de volgende wijze tot stand gekomen. Volgens de Verdubbelingstelling kan ieder halfregelmatig projectief veelvlak door identificatie

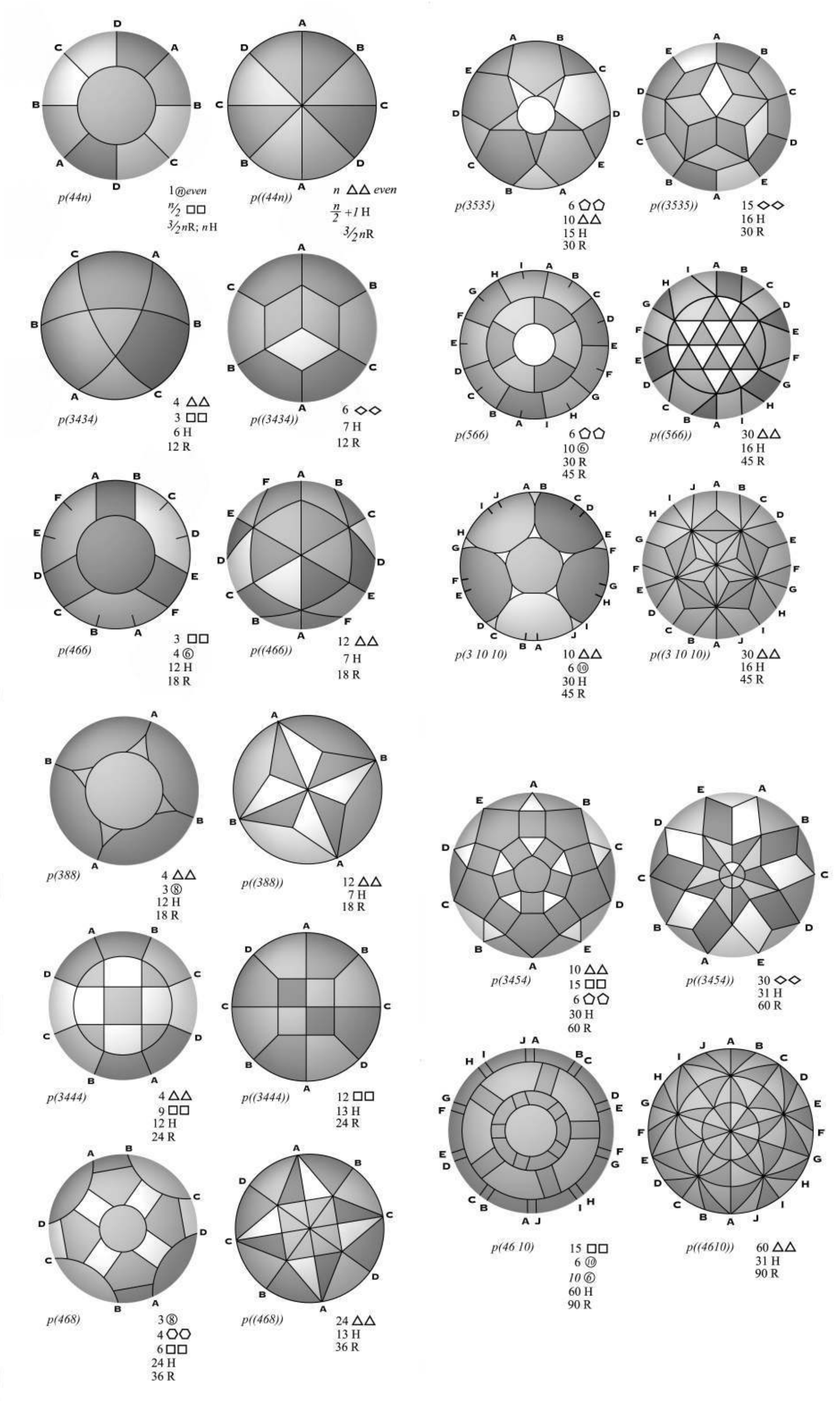


Figuur 8 Het Romeins oppervlak van Steiner

van antipodenparen worden verkregen uit een sferisch halfregelmatig veelvlak dat invariant is onder inversie. Dit is nu wat je te doen staat. Neem de lijst van halfregelmatige veelvlakken, bijvoorbeeld uit Van der Vegt [4]. Deze lijst van halfregelmatige sferische veelvlakken geeft in verband met de Verdubbelingstelling een volledige lijst van halfregelmatige projectieve veelvlakken. Het enige waar je op moet letten is dat het halfregelmatige veelvlak *invariant is onder inversie.* Alleen *die* halfregelmatige veelvlakken geven aanleiding tot halfregelmatige projectieve veelvlakken. In de figuren zijn dezelfde namen gebruikt als in het sferische geval. Ook de andere notatie vertoont grote gelijkenis met die van [4].

De heptaëder

We lichten een enkel speciaal geval uit de lijst. Het halfregelmatige (sferische) veertienvlak, de kubo-oktaëder (3434), dat ontstaan gedacht kan worden als doorsnede van een kubus en een oktaëder en dat is opgebouwd uit zes vierkanten en acht gelijkzijdige driehoeken, gaat door identificatie van antipodale paren over in de *heptaëder*, $p(3434)$. Als je nu wilt weten wat er gebeurt bij afknotten van de heptaëder, dan kun je net zo goed eerst de kubo-oktaëder afknotten en daarna de antipodenparen identificeren. Nu kun je de kubo-oktaëder op twee wijzen afknotten: tot op de helft of tot op een-derde. Bij afknotten tot op de helft ontstaat er een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een rombenkubo-oktaëder (3444) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak $p(3444)$, dat is opgebouwd uit vier driehoeken en negen vierkanten, een dertienvlak. Bij afknotten tot op eenderde ontstaat er uit de kubo-oktaëder een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een grote rombenkubo-oktaëder (468) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak $p(468)$, dat is opgbouwd uit drie achthoeken, vier zeshoeken en zes vierkanten, ook een dertienvlak.



Figuur 9 Een overzicht van alle halfregelmatige projectieve veelvlakken. De veelvlakken zijn in paren afgebeeld: links staat steeds het halfregelmatige projectieve veelvlak van de eerste soort en rechts staat het halfregelmatige projectieve veelvlak van de tweede soort.

Nogmaals het projectieve vlak

We hebben ondertussen begrepen dat de heptaëder een model is voor het projectieve vlak. In het boek van Hilbert en Cohn-Vossen worden verschillende voorbeelden gegeven van gladde oppervlakken die model zijn voor het projectieve vlak, [3] [p. 267, p. 280, p. 300]. Allereerst is er het algebraïsch oppervlak van Steiner dat gedefinieerd is door de vergelijking

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz.$$

Het oppervlak ziet er inderdaad uit als een minder hoekige variant van de heptaëder, figuur 8. Ook bij het oppervlak van Steiner is er zelfdoorsnijding. Je kunt zo narekenen dat de coördinaatassen de lijnen van zelfdoorsnijding zijn. Het punt

$(1,1,1)$ ligt op het oppervlak; welke punten nog meer? In de figuur zie je ook punten waar de kromming van het oppervlak niet continu is, namelijk de eindpunten van de lijnstukken van zelfdoorsnijding.

De wiskundige Boy heeft een voorstelling van het projectieve vlak gemaakt die overal een continue kromming heeft [3] [p. 280–283], [1]. Men kan zich afvragen waarom er altijd zelfdoorsnijding is bij de voorstelling van het projectieve vlak in de ruimte. De reden daarvoor is de volgende. Het projectieve vlak is een *compact oppervlak*, dat wil zeggen in ieder punt ziet het projectieve vlak er bij benadering uit als een stukje uit het platte vlak (ieder punt heeft een omgeving die homeomorf is met $\mathbf{R}^2$) en het projectieve vlak is als deel van een $\mathbf{R}^n$ altijd begrensd en gesloten. Nu heeft Brouwer de volgende generalisatie van de Stelling van Jordan voor de ruimte bewezen: een compact oppervlak dat topologisch (in dit bijzondere geval continu en éénduidig) in de ruimte is ingebed verdeelt de ruimte in twee delen. We hebben gezien dat het projectieve vlak geplaatst in de ruimte dat niet doet. Daarom moet er altijd zelfdoorsnijding zijn.

Je bent pas verlost van het verschijnsel van zelfdoorsnijding als je naar de $\mathbf{R}^4$ gaat. In [3] [p. 300] wordt de volgende inbedding (dus echt één-één en zonder zelfdoorsnijding) van het projectieve vlak in $\mathbf{R}^4$ gegeven. Zoals we in paragraaf 3 gezien hebben is het projectieve vlak $\mathbf{P}^2$ topologisch de $\mathbf{S}^2$ met identificatie van antipodenparen. We kunnen de $\mathbf{S}^2$ dus gebruiken om het projectieve vlak te parameteriseren. De vergelijking van $\mathbf{S}^2$ is

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ieder punt uit $\mathbf{P}^2$ heeft twee parameters; als $(x,y,z) \in \mathbf{S}^2$ als parameter van een punt van $\mathbf{P}^2$ optreedt, dan ook $(-x,-y,-z)$. Definieer nu $f(x,y,z) = (u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbf{R}^4$ door

$$u_1 = x^2 - y^2, \quad u_2 = xy,$$
$$u_3 = xz \quad u_4 = yz.$$

Het is direct duidelijk dat $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$ voor alle x, y, z. Dus de beide parameters van een punt uit $\mathbf{P}^2$ hebben hetzelfde beeld; f geeft dus een deugdelijke afbeelding van $\mathbf{P}^2$ naar $\mathbf{R}^4$. Hij is ook continu. Dat f ook ééneénduidig (en dus topologisch) is, kan men als volgt vaststellen. Neem aan dat $f(x_1,y_1,z_1) = (u_1,u_2,u_3,u_4) = f(x_2,y_2,z_2)$. De hyperbolen $x^2 - y^2 = u_1$ en $xy = u_2$ hebben twee snijpunten die gespiegeld liggen ten opzichte van de oorsprong. Dus geldt $(x_1,y_1) = \pm(x_2,y_2)$. Uit de andere twee vergelijkingen volgt dan $z_1 = \pm z_2$. De punten (x_1,y_1,z_1) en (x_2,y_2,z_2) vormen dus een antipodenpaar en representeren hetzelfde punt van $\mathbf{P}^2$.

Verantwoording Ik ben Tobias Baanders van het CWI veel dank verschuldigd voor de fraaie tekeningen die hij voor dit artikel heeft gemaakt.

Referenties

1 F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, 1987

2 P.R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1997

3 D. Hilbert en S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932, tweede uitgave 1996

4 A.K. van der Vegt, *Regelmaat in de ruimte*, Delftse Uitgevers Maatschappij, 1991

5 Magnus J. Wenniger, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1996