Jan P. Hogendijk
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
hogend@math.leidenuniv.nl

Inaugurele rede

Geschenken uit

De ontwikkeling van wiskunde heeft zich nooit veel van taalgrenzen aangetrokken. Wiskundige problemen reisden van de ene cultuur naar de andere en op die manier werden vaak nieuwe oplossingen gevonden. Dit is goed te zien aan de verschillende getallenstelsels die we in ons dagelijks leven aantreffen. In zijn oratie van 8 maart 2005 ter aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Universiteit Leiden geeft Jan Hogendijk een historisch overzicht.

Wiskunde is veel ouder dan de meeste wetenschappen die tegenwoordig aan de universiteit worden onderwezen. Vierduizend jaar geleden werden in het huidige Irak al wiskundige problemen opgelost. De moderne wiskunde is grotendeels in het Westen ontwikkeld, maar sommige bijdragen van Oosterse culturen zijn nog steeds zichtbaar. Twee van deze 'geschenken uit het Oosten' zijn het tientallig en het zestigtallig positiestelsel, die allebei voorkomen in de aanvangstijd 16.15 uur in de uitnodiging voor mijn oratie. Door op tijd te komen, lieten de aanwezigen zien dat ze voldoende voorkennis hadden om een groot deel van mijn verhaal te volgen.

Wij gebruiken het tientallig positiestelsel als iets vanzelfsprekends, maar de wiskundigen hebben het meer dan 2000 jaar zonder dit stelsel moeten doen: aan de oude Grieken en Romeinen was het onbekend. In het tientallig positiestelsel gebruiken we symbolen voor één tot en met negen, en het cijfer nul. Hiermee vormen we willekeurig grote getallen door deze symbolen naast elkaar te schrijven. Van rechts naar links geven de posities eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort aan. We schrijven zestien als 16, dat is zes eenheden plus één tiental, en het jaar twee duizend vijf, waarin we leven, als 2005, dat is vijf eenheden, geen tientallen, geen honderdtallen en twee duizendtallen. Het cijfer nul heeft betekenis 'geen' (wat niet hetzelfde is als 'heeft geen betekenis').

Een symbool met zo'n abstracte betekenis was wel even wennen voor de Europese wiskundigen in de twaalfde en dertiende eeuw, toen het tientallig positiestelsel pas uit de Islamitische wereld naar Europa was gekomen. De Europese wiskundigen noemden de symbolen voor 1 tot en met 9 de negen 'figuren', maar voor de nul verlatijnsten ze het Arabische woord *ṣifr*. Dit woord betekent 'leegte', en het is de oorsprong van het moderne woord 'cijfer'. Het woord cijfer wordt dus eigenlijk ten onrechte ook voor de symbolen 1 tot en met 9 gebruikt.[1]

We zijn gewend in het tientallig positiestelsel ook breuken te schrijven. Zestien en een kwart schrijven we als 16,25, dat is één tiental, zes eenheden, twee tienden en vijf honderdsten. Met de komma geven we aan waar de breuk begint. Sinds de Franse revolutie zijn maten, gewichten en munteenheden steeds verder aan het tientallig positiestelsel aangepast. De aanvangstijd van deze oratie laat zien dat de overwinning van dit stelsel niet volledig is. In het tientallig positiestelsel zouden we kwart over vier 's middags als 16.25 moeten noteren. Maar we schrijven 16.15 omdat we een uur in 60 minuten verdelen. We gebruiken het zestigtallig stelsel ook bij het verdelen van een minuut in 60 seconden, en bij het rekenen met hoeken in graden, minuten en seconden. De aantallen minuten en seconden schrijven we, nogal inconsequent, weer in het tientallig positiestelsel: vijftien minuten is 15 minuten.

We zullen nu de geschiedenis van deze twee positiestelsels kort bespreken aan de hand van oorspronkelijke bronnen. Dit is om diverse redenen mijn favoriete werkmethode. Het bronnenmateriaal vormt de ba-

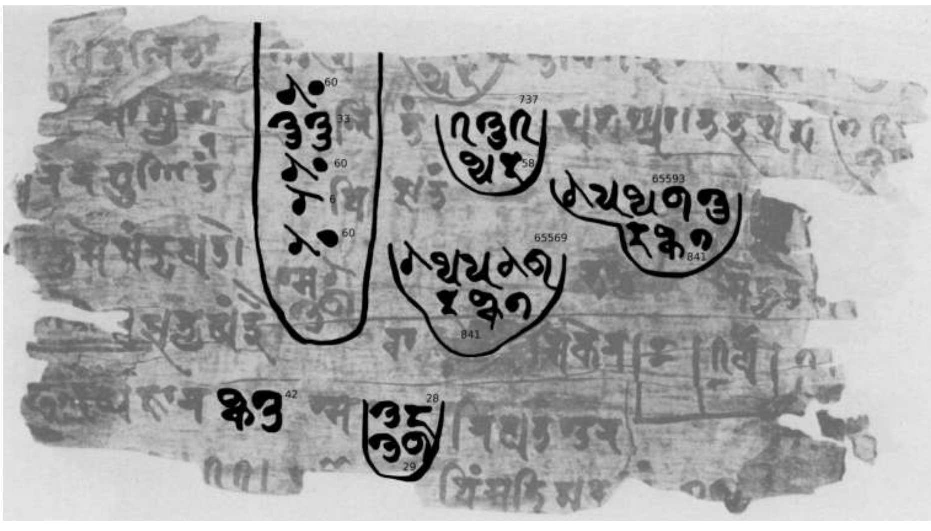
Jan Hogendijk

het oosten

sis van onze kennis, en studenten moeten het daarom met eigen ogen zien. De bronnen moeten steeds opnieuw worden bestudeerd en geïnterpreteerd, omdat iedere generatie nieuwe inzichten en onderzoeksmethoden meebrengt. Studie van authentiek bronnenmateriaal geeft 'gevoel' voor de oude wiskunde, en leidt direct naar vragen over de historische context en de motivatie van wiskunde. Tenslotte is het mijn ervaring dat werken met authentieke bronnen veel enthousiasme kan opwekken. Ik kom daar aan het eind van mijn verhaal nog op terug. Omdat bronnen uit drie verschillende culturen aan de orde zullen komen, kan ik niet zo veel aandacht aan elke bron en elke cultuur besteden als ik eigenlijk zou willen.

Een Indiaas stuk berkenbast

Mijn eerste bron is afkomstig uit een van de oudst bewaarde wiskundige documenten uit de geschiedenis van het tientallig positiestelsel. Figuur 1 is een blad uit een handschrift dat in 1881 is gevonden in de omgeving van het dorp Bakhshali in Noordwest Pakistan.[2] Het handschrift wordt tegenwoordig bewaard in de *Bodleian Library* in Oxford. Het bestaat uit ongeveer vijftig stukken berkenbast, die tussen de achtste en de twaalfde eeuw[3] na Christus aan beide kanten zijn beschreven met een wiskundige tekst in het Sanskriet. Dit is de heilige taal van het oude India, waarvan het moderne Pakistan een onderdeel was. Het handschrift bevat een collectie wiskundige problemen, die is samengesteld door iemand die zichzelf "de zoon van Chataka, een brahmaan, en een koning van de wiskundigen" noemt.[4] We weten verder niets over deze persoon. De tekst bevat Sanskrietwoorden, die van links naar rechts worden geschreven, en getallen in het tientallig positiestelsel, die bijna allemaal in boogjes staan. De cijfers staan in de volgorde die wij gewend zijn. Omdat de vorm van de cijfers is veranderd, zijn in figuur 1 de meeste getallen in het Sanskriet in zwart aangegeven met de moderne cijfers



Figuur 1 Een blad uit het Bakhshali handschrift[2]

bron: Gregorius Reisch, Margarita phylosophica, 1504

Figuur 2 Links een rekenaar met het nieuwe Hindu-Arabische systeem, rechts een rekenaar met penningen op een rekenbord.

ernaast. Niet alle getallen zijn zo aangegeven: de lezer kan zelf nog extra getallen 6, 29, 58 en 11 vinden. Het stuk berkenbast is beschadigd en op de missende gedeeltes moeten nog meer getallen gestaan hebben.

De oudste bronnen voor het tientallig positiestelsel zijn Indiase sterrenkundige teksten uit de vijfde en zesde eeuw na Christus. Deze teksten zijn alleen bewaard in kopieën van veel recenter datum dan het Bakhshali handschrift.[5] De ontdekker van het tientallig positiestelsel was waarschijnlijk een Indiase sterrenkundige uit de tweede of derde eeuw na Christus. Hij heeft als uitgangspunt een ouder stelsel gebruikt dat al vanaf de derde eeuw vóór Christus voorkwam.[6] In dit oudere stelsel bestonden symbolen voor één tot en met negen, maar nog geen nul, en het getal tien werd dus niet geschreven als één-nul. Er waren aparte symbolen voor alle tientallen tot en met honderd, voor alle honderdtallen tot en met duizend, en zo verder. Dit oudere stelsel was dus wel tientallig, maar geen positiestelsel. Voor het dagelijks leven in het oude India was dit voldoende, maar niet voor de berekeningen in de Indiase sterrenkunde, waarin enorm grote getallen werden gebruikt. Dat was waarschijnlijk de motivatie voor de ontwikkeling van het tientallig positiestelsel.

Dit nieuwe stelsel is vanuit India in de achtste eeuw in de Islamitische wereld ingevoerd, en daarna is het in de twaalfde en dertiende eeuw via Spanje en Italië in Europa terecht gekomen. Daar was men gewend aan Romeinse cijfers, maar de Italiaanse handelaars en bankiers zagen de voordelen van het nieuwe systeem in. Kort na het begin van de boekdrukkunst kregen de cijfers hun moderne vorm. In de periode daarvoor zijn ze wel iets van vorm veranderd, maar toch zijn er duidelijke verbanden te zien tussen de moderne cijfers en de cijfers in figuur 1. De 6 in het handschrift lijkt op een bakje dat in een skilift hangt. De kabel waaraan het bakje hangt is sindsdien verdwenen, en de zes is gespiegeld. Het rondje van de zes is tegenwoordig open, net als van de nul. De 3 in het handschrift heeft een kuif die er sindsdien is afgevallen. De 2 heeft ook zo'n extra kuif, maar nog geen horizontaal streepje aan de onderkant. De 4, 7 en 9 zijn ten opzichte van de huidige vormen gedraaid; ze zijn in het handschrift beter te herkennen door het papier een kwartslag naar rechts te draaien. Ook de 4 heeft een aanhangsel dat er tegenwoordig niet meer aanzit.

Nu we al deze getallen hebben gezien, willen we (althans de wiskundig geïnteresseerden) natuurlijk weten wat ze betekenen. Hiervoor moeten we (een vertaling van) de Sanskriettekst raadplegen.[7] In het nu volgende komt een Indiase lengtemaat voor die ik gemakshalve als kilometer zal weergeven. De tekst beschrijft een probleem van twee reizigers die elkaar achtervolgen. Het probleem wordt eerst algemeen behandeld en opgelost, daarna volgen getallenvoorbeelden. Figuur 1 gaat over het volgende getallenvoorbeeld: Een reiziger gaat op weg. Hij reist elke dag 7 kilometer in dezelfde richting. Na 5 dagen gaat een tweede reiziger hem achterna. Deze reist op de eerste dag 5 kilometer en elke dag daarna 3 kilometer extra, dus op de tweede dag 8 kilometer, op de derde dag 11 kilometer, enzovoort. Hoeveel dagen duurt het tot hij de eerste reiziger heeft ingehaald?

Op de voorafgaande bladen berkenbast is beredeneerd dat de tweede reiziger ongeveer 6 hele dagen en 4/29 dag nodig heeft om de eerste in te halen. In figuur 1 wordt deze oplossing gecontroleerd. Eerst wordt de gemiddelde snelheid per dag van de tweede reiziger uitgerekend. Het antwoord, 737 gedeeld door 58 kilometer, staat aangegeven in het boogje bovenaan in het midden (we moeten de twee getallen dus lezen als het bovenste getal gedeeld door het onderste). Deze gemiddelde snelheid maal de 6 + 4/29 reisdagen levert de afstand die de tweede reiziger heeft afgelegd, namelijk de 65593/841 kilometer in het boogje aan de rechterkant. De afstand die de eerste reiziger dan heeft afgelegd kan ook gemakkelijk worden uitgerekend als aantal reisdagen maal zeven kilometer per dag.[8] Het resultaat staat in het boogje in het midden van de pagina aangegeven als 65569/841 kilometer. De tweede reiziger is de eerste dus al gepasseerd!

De auteur geeft in zijn Sanskriettekst de volgende verklaring van dit vreemde resultaat. De 6 + 4/29 reisdagen zijn niet het exacte antwoord, maar een benadering. De auteur heeft het aantal reisdagen gevonden als oplossing van een kwadratische vergelijking,[9] en hierbij moest hij de wortel uit 889 trekken. Dit getal is geen kwadraat, en daarom heeft hij de wortel benaderd als 29 + 48/58. Hij kan nu de voorsprong van de tweede reiziger als volgt uitrekenen: neem het kwadraat van 29 + 48/58, trek hier 889 vanaf, en deel het verschil door 8 maal de drie kilometer die de tweede reiziger per dag sneller gaat lopen. De voorsprong blijkt 24/841 kilometer te zijn, en alles klopt precies.

We kunnen in moderne wiskundige notatie nagaan dat de auteur de voorsprong van de tweede op de eerste reiziger correct heeft uitgerekend. Wie dit zelf probeert zal vermoedelijk, net als ik, bewondering krijgen voor de auteur van de tekst in het Bakhshali-handschrift.[10] Ikzelf word altijd weer gefascineerd door de tijdloze en cultuuroverschrijdende aspecten van wiskunde. We moeten daarbij de verschillen niet uit het oog verliezen. Waar wij formules gebruiken, citeert de auteur van het Bakhshali-handschrift *verzen* in het Sanskriet. Hij geeft een vers met de oplossing van de kwadratische vergelijking, en een ander vers voor de benadering van de wortel uit een getal dat geen kwadraat is. Wiskundigen in het oude India moesten ook kunnen dichten!

De auteur zegt nergens waarom hij dit probleem van de twee reizigers eigenlijk behandelt. Van de tweede reiziger wordt aangenomen dat hij dag en nacht doorloopt en daarbij zijn snelheid continu verhoogt. Dit gedrag doet niet erg realistisch aan. Het Bakhshali handschrift staat vol met zulke onrealistische problemen. Deze problemen horen tot een gebied dat vaak de recreatieve wiskunde genoemd wordt. Ikzelf spreek liever over de sportieve wiskunde (en daarmee bedoel ik niet die hardlopende reizigers). In allerlei culturen en perioden losten mensen in Azië en Europa wiskundige problemen op voor hun plezier. De problemen kozen ze liefst zo moeilijk mogelijk, en de oplossingen zo slim mogelijk. Daarna werden andere mensen uitgedaagd om deze problemen ook op te lossen. Figuur 1 hoort bij het laatste getallenvoorbeeld voor het probleem van de twee reizigers. In dit voorbeeld zijn de snelheden van de reizigers (kennelijk met opzet) zo gekozen dat de oplossing niet mooi uitkomt. Zo kon de auteur laten zien dat hij ook tegen dit soort situaties opgewassen was.

Problemen uit de sportieve wiskunde reisden ook van de ene cultuur naar de andere. In de tiende eeuw werd het probleem van de twee reizigers ook behandeld door de Islamitische wiskundige al-Karkhī of al-Karajī, afkomstig uit Irak of Iran. Ook deze koos een getallenvoorbeeld dat niet mooi uitkomt.[11]

We gaan nog even terug naar figuur 1. In het langgerekte verticale boogje in het midden rekent de auteur de 4/29 reisdagen om in het zestigtallig stelsel. De getallen 33 en 6 behoren tot de staart van de breuk, ze komen namelijk overeen met de derde sexagesimaal $33/60^3$ en de vierde sexagesimaal $6/60^4$. Het eerste deel van de breuk is weggevallen doordat het handschrift is beschadigd. Door de breuk 4/29 zelf om te rekenen vinden we de eerste sexagesimaal 8 en de tweede sexagesimaal 16. Een klein stukje van de 16 is in figuur 1 met enige goede wil nog zichtbaar. Beschadigde wiskundige teksten kunnen soms uit de wiskundige inhoud voor een deel gereconstrueerd worden.

We zien dat de auteur gehele getallen in het tientallig positiestelsel schrijft, breuken in het zestigtallig positiestelsel, en dan de sexagesimalen (33 en 6) zelf weer in het tientallig positiestelsel. Dezelfde inconsequentie zijn we al eerder tegengekomen in in de aanvangstijd 16.15 uur van deze oratie. Alleen de Indiase verdeling van een etmaal in 60 delen verschilt van de moderne verdeling in 24 uren. In het moderne Europa en in middeleeuws India bestond blijkbaar een merkwaardige voorliefde voor zestigtallige breuken. Waar komt deze voorliefde vandaan?

Een Babylonisch kleitablet

Het zestigtallig positiestelsel kwam vierduizend jaar geleden in het tegenwoordige Irak al voor in oplossingen van wiskundige problemen. Het heeft latere culturen beïnvloed in de vorm waarin het vanaf circa 500 voor Christus in de Babylonische sterrenkunde werd gebruikt. In de vierde en derde eeuw voor Christus ontwikkelden de Babylonische sterrenkundigen doeltreffende numerieke methodes voor het voorspellen van planeetstanden, maansverduisteringen, en de eerste zichtbaarheid van de maansikkel. Zij bereikten hierin een hoger niveau dan hun beroemde Griekse tijdgenoten Eudoxos, Eratosthenes, Archimedes en Apollonius van Perga, die zich bezig hielden met meetkundige speculaties over de planeetbewegingen, maar niet in staat waren gedetailleerde voorspellingen te doen. Onder invloed van de Babyloniërs hebben latere Griekse sterrenkundigen zoals Ptolemaeus hun eigen methoden voor het doen van voorspellingen ontwikkeld.

Om Babylonische sterrenkunde te begrijpen, is het nodig veel tijd te besteden aan de studie van (transcripties en vertalingen van) kleitabletten, die maar een zeer gedeeltelijk inzicht geven in de denkwereld van de auteurs. Voor wie van getallen houdt, en het noodzakelijke doorzettingsvermogen bezit, is de Babylonische sterrenkunde een fascinerend onderzoeksterrein van groot historisch belang. De oudste wortels van de kwantitatieve natuurwetenschap liggen niet alleen in Griekenland maar ook in Babylon, en voor deze vergeten Oosterse oorsprong is in de moderne literatuur veel te weinig aandacht.[12]

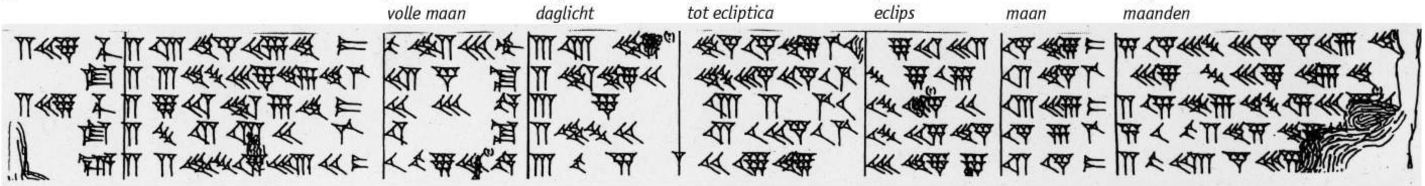
We zullen nu een tamelijk late maar redelijk onbeschadigde Babylonische bron bekijken. De bovenste helft van figuur 3 is een tekening[13] van vijf regels[14] uit een kleitablet, dat in de negentiende eeuw is opgegraven in Babylon, in de buurt van het moderne Bagdad. Het kleitablet is omstreeks 175 voor Christus door een anonieme Babylonische sterrenkundige geschreven in spijkerschrift. Het wordt nu in het British Museum in Londen bewaard en is diverse keren gepubliceerd.[15] Op dit tablet staan voornamelijk getallen, die u eenvoudig zelf kunt lezen, van links naar rechts. De getallen van 1 tot 59 worden geschreven met twee tekens: een verticale spijker[16] voor het getal 1, en een pijltje met de punt naar links voor het getal 10. Links bovenaan de eerste regel staat bijvoorbeeld een groepje van twee verticale spijkers, die samen 2 betekenen. Het groepje rechts daarvan bestaat uit twee pijltjes en zeven kleine spijkertjes, samen 27.

Voor getallen vanaf 60 en voor breuken gebruikten de Babyloniërs het zestigtallig positiestelsel. De twee groepjes 2 27 links bovenaan in figuur 3 betekenen samen $2\times 60+27=147$. Twee regels daaronder ziet u in dezelfde kolom het getal $2\times 60+28=148$. Deze getallen 147 en 148 zijn jaartallen in de Seleucidische jaartelling. Jaar 1 van deze jaartelling begon in het voorjaar van 311 voor Christus en de jaren zijn (ongeveer) zonnejaren. Het jaar 147 in de eerste regel loopt van het voorjaar van 165 voor Christus tot het voorjaar van 164 voor Christus.

In de onderste helft van figuur 3 is de inhoud van de vijf regels voor het gemak in moderne woorden en symbolen weergegeven. De groepjes in spijkerschrift zijn vervangen door getallen in het tientallig positiestelsel. De andere spijkerschrift-symbolen — woorden voor positief, negatief, stijgend en dalend, namen van sterrenbeelden in de dierenriem, en namen van de maanden van het jaar — zijn in de transcriptie door moderne equivalenten vervangen. Bij de maanden van het jaar kan dat niet precies, omdat de maanden in de Babylonische kalender echt van de maanstand afhingen. Een maand begon in principe op de eerste avond wanneer de wassende maansikkel op de Westelijke horizon zichtbaar was, net zo als in de tegenwoordige Joodse en Islamitische kalenders.

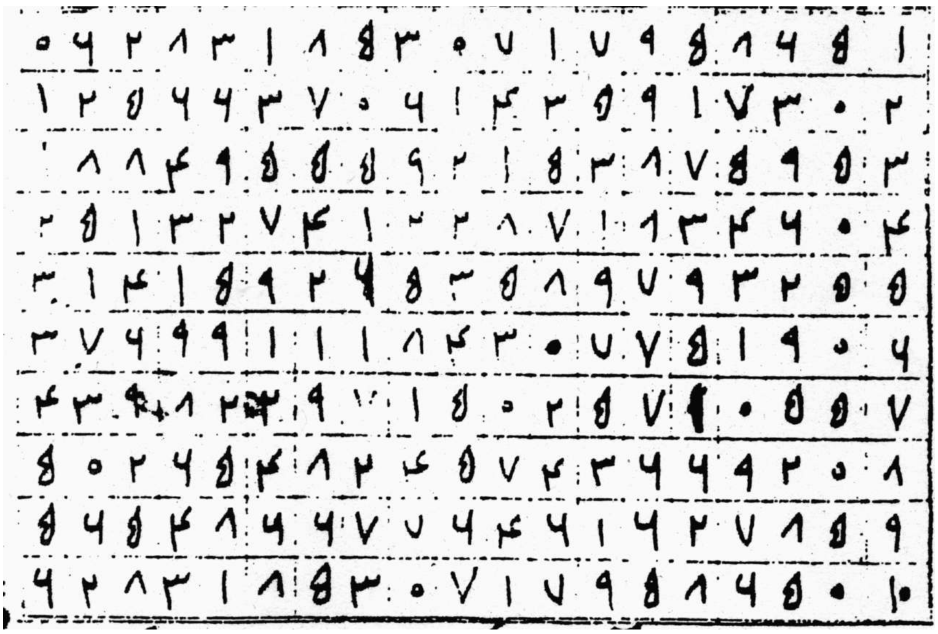
Een Babylonisch jaar bestond uit twaalf of dertien maanden; men voegde dertiende maanden op zodanige manier in dat het jaar altijd dichtbij het begin van de lente begon. Omdat de lente in de huidige Gregoriaanse kalender op 20, 21 of 22 maart begint, heb ik de eerste maand van het Babylonische jaar vertaald als 'april', enzovoort.[17]

jaar	*maand*	*Saros*		*positie volle maan*		*lengte daglicht*	*afstand maan tot ecliptica*		*grootte eclips*	*snelheid maan*		*lengte maanden*



2 27	apr	2 13 44 26 40	↑	**0** 52 30	schorp	3 13 55	54 14 48	-↑	8 21 32	14 58	↑	5 14 39 34 4 26 40
	okt	2 3 49 37 46 40	↓	22 4	ram	2 51 57 20	49 34 24	+↓	9 8 16	12 44	↓	37 9 37 46 40 . . .
2 28	apr	2 8 21 51 6 40	↑	20 30	weegsch	3 7	13 2	-↑	19 34 20	13 36	↑	2 15 56 49 15 33 . . .
	okt	2 9 12 13 20	↓	11	ram	2 59 20	12 10 24	+↓	19 25 44	14 6	↓	5 10 **0** 2 45 46 . . .
	mrt_2	2 2 59 15 33 20	↑	10 **0**7 30	weegsch	3 **0** 5	1 20 18 48		30 47 8	12 14	↑	2 **0** 23 4 35 . . . . . .

Figuur 3 Tekening en transcriptie van vijf regels uit een Babylonisch kleitablet, circa 175 voor Christus[13]



Figuur 4 De tabel met veelvouden van 2π van al-Kashī (circa 1420).[22] In de vijfde regel zijn de decimalen van π te herkennen.

Op het tablet staan berekeningen van maansverduisteringen voor een periode van ongeveer vijfentwintig jaar, tussen 175 en 150 voor Christus. Om astrologische redenen was het belangrijk van te voren te weten wanneer maansverduisteringen zouden plaatsvinden. Een maansverduistering komt hoogstens eens in de vijf of zes maanden voor, wanneer het volle maan is, en de aarde precies tussen de zon en de maan in staat, zodat (modern gezegd) de maan in de schaduwkegel van de aarde terecht komt. Als er een maansverduistering is, dan moet die in het midden van de maand plaatsvinden, omdat elke maand kort na nieuwe maan begint.

De Babylonische sterrenkundige heeft op het tablet alleen die maanden aangegeven waarin eventueel een maansverduistering zou kunnen plaatsvinden. Voor elke maand is er één regel met acht getallen, keurig gerangschikt in kolommen. Sommige kolommen zijn gemakkelijk herkenbaar. In de derde kolom staat een eerste benadering van de positie van volle maan: het punt in de ecliptica precies tegenover de zonnestand in het midden van de maand (de ecliptica is de cirkelvormige baan die de zon gedurende het jaar aflegt tegen de achtergrond van de vaste sterren). De Babyloniers verdeelden de ecliptica in twaalf even grote 'sterrenbeelden' van elk 30 graden lang, samen dus 360 graden. De graden werden volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden verdeeld, en de wiskundige 'sterrenbeelden' werden genoemd naar echte sterrenbeelden die in de buurt stonden. In de eerste regel van de derde kolom staat o 52 30 Schorpioen, dat betekent o graden, 52 minuten en 30 seconden vanaf het begin van het achtste 'sterrenbeeld' van de ecliptica, dat bij de Babyloniërs ook al Schorpioen heette. Merk op dat het symbool o de transcriptie is van twee kleine haakjes schuin boven elkaar die in de tekening te zien zijn. Dit is de oudst bekende vorm van de nul.

In de zevende kolom van links staat de dagelijkse beweging van de maan in het midden van de maand; in de bovenste rij staat 14 graden en 58 minuten. Tegenwoordig zouden we het precies zo kunnen zeggen. Uiteraard was zo'n nauwkeurig getal niet het resultaat van een meting maar van een berekening; op dit tablet staan berekeningen, geen waarnemingen. In de zesde kolom staat de zogenaamde 'grootte' van de maansverduistering. Dit getal geeft aan of er inderdaad een maansverduistering zal zijn, en of deze partieel of geheel zal zijn. Met moderne sterrenkundige methoden kan worden berekend wanneer maansverduisteringen in het oude Babylon plaatsvonden en hoe lang zij duurden. Neugebauer heeft de resultaten vergeleken met de getallen in de zesde kolom,[18] en het blijkt dat de Babylonische voorspellingen meestal goed uitkwamen.

Het is voor mijn verhaal niet nodig in detail uit te leggen wat de overige kolommen betekenen.[19] Ik wil alleen de aandacht vestigen op het feit, dat de lange getallen in de kolommen van figuur 3 bijna allemaal breuken in het zestigtallig stelsel zijn. De 58 minuten bovenaan de zevende kolom van links is eigenlijk een breuk, namelijk 58/60. In de Babylonische sterrenkunde werden alle breuken in het zestigtallig positiestelsel geschreven.

Omstreeks 150 voor Christus nam de Griekse sterrenkundige Hipparchus veel methoden van de Babyloniërs over. Hij werd hierdoor geïnspireerd elke cirkel in 360 graden te verdelen, en de graden natuurlijk weer volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden. De latere sterrenkundigen in de Griekse cultuur, India, de Islamitische wereld en middeleeuws Europa zijn hem in dit opzicht gevolgd. Astrologie en sterrenkunde waren in de late oudheid en de middeleeuwen de belangrijkste toepassingsgebieden van geavanceerde wiskunde. Zo is te verklaren dat de berekeningsmethoden uit de sterrenkunde ook in andere wiskundige problemen (bijvoorbeeld in het Bakhshali handschrift) opduiken.

Niet alle delen van de Griekse sterrenkunde zijn in het verre India overgenomen: een voorbeeld is de verdeling van het etmaal in 24 gelijke uren (weer onderverdeeld in minuten en seconden). Deze verdeling gaat vermoedelijk ook terug op Hipparchus. De gelijke uren, minuten en seconden werden wel gebruikt door de latere Griekse sterrrenkundige Ptolemaeus en de Islamitische en middeleeuws Europese sterrenkundigen.

Buiten de sterrenkunde kwamen de 24 gelijke uren en de minuten en seconden in de middeleeuwen niet voor. In het gewone leven verdeelde men de dag in 12 seizoensuren: het eerste uur begon bij zonsopgang, en het twaalfde uur eindigde bij zonsondergang. In de zomer zijn deze seizoensuren langer dan in de winter. Deze situatie veranderde pas in de veertiende eeuw door de ontwikkeling van de techniek. Toen werden in veel steden in Europa mechanische torenklokken gebouwd, die elk uur of elk kwartier met een bel de tijd aangaven.

De meeste van deze klokken wezen uren van steeds dezelfde lengte aan, omdat uurwerken voor gelijke uren veel gemakkelijker te construeren zijn dan voor seizoensuren. Hiermee deden de 24 gelijke uren hun intrede in het leven van de gewone man en vrouw. In de eerste tijd waren de klokken niet erg nauwkeurig, en het kwartier was de kleinste tijdseenheid die in de praktijk voorkwam. Een minutenwijzer was nog niet nodig. Ook de torenklok van het Leidse academiegebouw, waarin deze oratie is uitgesproken, heeft alleen een wijzer voor de uren. Kleinere onderverdelingen dan het kwart uur werden in het dagelijks leven pas belangrijk nadat onze landgenoot Christiaan Huygens in 1656 het slingeruurwerk had uitgevonden.[20] Voor de onderverdeling van het uur gebruikte men de traditionele methode uit de sterrenkunde met minuten en seconden.

Een Arabisch papieren handschrift

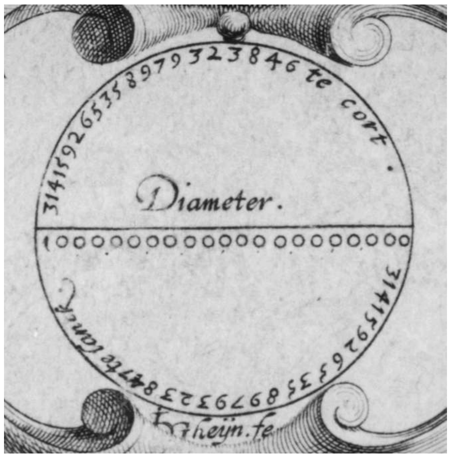
De grote invloed van de sterrenkunde verklaart dat decimale breuken pas betrekkelijk laat verschijnen. Ze komen nergens voor in middeleeuws India, de bakermat van het tientallig positiestelsel voor gehele getallen. Decimale breuken zijn diverse malen onafhankelijk van elkaar in de Islamitische wiskunde en in West-Europa uitgevonden.[21] De uitvinding ligt voor de hand als men uit het zestigtallig stelsel voor breuken en het tientallig stelsel voor gehele getallen één uniform geheel wil maken.

Figuur 4 is een tabel uit een 16e-eeuws handschrift met een tekst van één van de uitvinders van decimale breuken, Jamshīd al-Kāshī. Deze wis- en sterrenkundige leefde de eerste veertig jaar van zijn leven in armoedige omstandigheden in Iran. Omstreeks 1420 werd hij naar Samarkand uitgenodigd aan het hof van koning Oeloeg Beg, zelf een groot liefhebber van wiskunde. Het handschrift is geschreven op papier, dat in die tijd ruim voorhanden was, en het wordt bewaard in een bibliotheek bij het graf van Imam Reza in Meshed in Oost-Iran. Het is een tabel met veelvouden van het getal dat modern als 2π wordt aangeduid.[22] De notatie 2π is modern, al-Kāshī spreekt in plaats hiervan over de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de straal. In de rechterkolom van de tabel staan de getallen 1 tot en met 10 van boven naar beneden, en links van ieder van deze getallen staat de omtrek van een cirkel met die straal. De cijfers werden ook in middeleeuws Arabische teksten in de volgorde geschreven die wij gewend zijn. Ze lijken veel op de cijfers die in het tegenwoordige Midden Oosten worden gebruikt. Op de vijfde regel staat de waarde 10π, waarin de eerste 16 decimalen van π herkenbaar zijn: 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2.

Om π met deze nauwkeurigheid te bepalen heeft al-Kāshī een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk gedaan. In dit opzicht stond hij in zijn tijd op eenzame hoogte. Deze nauwkeurigheid was in de praktijk onnodig, en we kunnen ons afvragen wat al-Kāshī's motieven waren om al dit rekenwerk te doen. Hij zegt er niets expliciets over maar we kunnen wel iets vermoeden. Al-Kāshī zelf, en vele andere Islamitische wiskundigen, geloofden dat de wiskunde tijdloos was. In één van zijn werken zegt al-Kāshī dat hij een wiskundige ontdekking "heeft aangeboord, met de kracht van inspiratie, uit de Eeuwige Aanwezigheid."[23] Wiskunde grenst hier aan mystiek.

In 1596 publiceerde Ludolf van Ceulen, die in de Pieterskerk in Leiden begraven is, de eerste 19 decimalen van π. Deze decimalen staan aangegeven op de voorpagina van zijn boek *Vanden Circkel*, waarvan het relevante deel in figuur 5 is afgebeeld. Van Ceulen stelt de straal van de cirkel een 1 met een heleboel nullen, en hij gebruikt geen decimale breuken. Hij was niet bekend met het werk van al-Kāshī en toch zijn de eerste 16 decimalen van π bij het pijltje in figuur 4 ook in figuur 5 te zien. Zo levert ook het getal π een voorbeeld van het tijdloze en cultuur-overschrijdende karakter van de wiskunde.

Decimale breuken werden in de Islamitische wereld geen succes, net zo min als het tientallige positiestelsel voor gehele getallen.[24] In Europa braken decimale breuken pas door nadat Simon Stevin in 1585 *de Thiende* had gepubliceerd. Hij schreef dit boekje toen hij aan de Leidse universiteit studeerde, en hij richtte het aan kooplieden en landmeters die al gewend waren aan het rekenen met gehele getallen in het tientallig positiestelsel. Stevin's eigen notatie was onhandig, en het voorbeeld van Ludolf van Ceulen laat zien dat niet iedereen meteen met decimale breuken begon te werken. Vanaf 1620 werden decimale breuken en de decimaalkomma ingevoerd in de berekening van de logaritmen, die enkele jaren daarvoor waren ontdekt. Dit is het begin van de overwinning van de decimale breuken. Sindsdien zijn sexagesimale breuken een fossiel uit een voorbije tijd, maar wel een fossiel met een blijvend karakter.



Figuur 5 Ludolf van Ceulen, Vanden Circkel, Delft 1596, voorpagina (detail)

In de negentiende en twintigste eeuw is de wiskunde enorm uitgebreid, en zijn veel wiskundige begrippen en theorieën in een nieuw perspectief komen te staan. Deze ontwikkeling gaat steeds verder, en de wiskunde leeft zoals nooit tevoren. Dit betekent niet dat de oude wiskunde ongeldig is geworden, maar hoogstens, dat we er nu op een andere manier naar kijken. De groei houdt gelukkig ook niet in, dat de wiskunde iedere paar jaar weer een nieuwe 'modieuze' vorm moet krijgen.

Het tijdloze aspect van wiskunde is een van de redenen waarom het werken met oude bronnen zo enthousiasmerend kan zijn. Hoewel de bronnen zijn geschreven in een tijd en context die wij ons maar moeilijk kunnen voorstellen, kan het wiskundige gedachtengoed erin zeer herkenbaar zijn. Zo kan de moderne lezer met eigen ogen zien, dat sommige vanzelfsprekende concepten en symbolen een eeuwenlange geschiedenis hebben. Wat u op de lagere school over het tientallig positiestelsel heeft geleerd, had u ook kunnen leren in middeleeuws India. Wat een boog aan de hemel van 14 graden en 58 minuten is, had u ook in 300 voor Christus in een Babylonische tempel aan de weet kunnen komen. Ook Oosterse culturen hebben aan de ontwikkeling van de wiskunde bijgedragen. Wie er oog voor heeft, kan de sporen elke dag zien.

Noten en referenties

1 Zie voor de nul in middeleeuws Europa K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl,* tweede editie, Göttingen 1957, deel 2, p. 213–220.

2 Zie de foto in T. Hayashi, *The Bakhshālī Manuscript: An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen: Egbert Forsten, 1995, p. 546; deze is gebaseerd op de foto gebruikt door G.R. Kaye in, *The Bakhshālī Manuscript: A Study in Medieval Mathematics*, 1927, reprint: Delhi, Cosmo Publications, 1981, 2 delen, Plate VI, 7 recto. De afmeting van het afgebeelde stuk berkenbast is naar schatting 12 bij 7 centimeter, vergelijk Hayashi hoofdstuk I.2.

3 De datum zou kunnen worden gepreciseerd door een moderne koolstof 14-datering op het handschrift uit te voeren.

4 Zie Hayashi, p. 85–86.

5 Zie bijvoorbeeld *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa, ed. Kripa Shankar Shukla in collaboration with K.V. Sarma*, New Delhi: Indian National Academy of Science, 1976, p. lxviii–lxxi (handschriften), p. 26–33 (tientallig positiestel-

sel).Āryabhaṭa werd geboren in 476 na Christus.

6 Voor afbeeldingen van cijfers in dit zogenaamde Brahmi-stelsel zie B. Datta, A.N. Singh, *History of Hindu Mathematics*, reprint ed., Delhi 2001, vol. 1 p. 26.

7 Zie de edities van Hayashi, voetnoot 2, p. 294–296, 369–370, 430–434 en vergelijk Kaye, voetnoot 2, vol. 1 (Parts I-II), p. 44–46 example (ii), p. 110 [7r.], vol. 2 (Part III), p. 179, Plate VI, 7 recto.

8 Toen de tweede reiziger op weg ging had de eerste reiziger een voorsprong van 35 kilometer. In de 6 + 4/29 dagen daarna reisde hij 7 kilometer per dag, dit geeft de 42 + 28/29 in de onderste regel. Teller en noemer van de som vermenigvuldigen we met 29.

9 Na t dagen heeft de tweede reiziger $5 + 8 + \ldots + (5 + 3t - 3) = t(5 + \frac{3}{2}(t - 1))$ kilometer afgelegd en de eerste reiziger $35+7t$ kilometer. De voorsprong van de tweede reiziger op de eerste is $\frac{1}{2} \times (3t^2 - 7t - 70)$ en ze ontmoeten elkaar als deze uitdrukking nul is, dus als $t = \frac{7+\sqrt{889}}{6}$ dagen.

10 In moderne algebraïsche notatie benadert de auteur de wortel $\sqrt{K}$ uit een niet-kwadraat $K = p^2+E$, met p geheel, $0 < E < p$, als $p+\frac{E}{2p}$. Stel nu $t = \frac{1}{2a} \cdot (-b+\sqrt{K})$, $u = \frac{1}{2a} \cdot (-b+p+\frac{E}{2p})$. In de tekst is $K = 889$, $p = 29$, $E = 48$, $a = 3$, $b = -7$, t de exacte oplossing van het probleem, en $u = 6\frac{4}{29}$ de benadering. Dan zijn t en u wortels van de vergelijkingen $at^2 + bt + c = 0$ en $au^2 + bu + c' = 0$ met $c = -70$, $b^2 - 4ac = K = p^2 + E$, $b^2 - 4ac' = (p + \frac{E}{2p})^2$. De voorsprong van de tweede op de eerste reiziger op tijdstip u is $\frac{1}{2}(au^2 + bu + c) = \frac{1}{2}(c - c') = \frac{1}{8a}((b^2-4ac')-(b^2-4ac)) = \frac{1}{8a}(\frac{E}{2p})^2$. De auteur hoeft natuurlijk niet precies dezelfde stappen te hebben gevolgd.

11 Zie F. Woepcke, *Extrait du Fakhrī, traité de l'algèbre par Abou Bekr Mohammad Ben Alhaçan Alkarkhī*, Paris 1853, p. 82 no. (6). Al-Karkhī of al-Karajī (beide spellingen komen voor) liet de wortel staan.

12 Een afschrikwekkend voorbeeld is het recent verschenen boek *From Eudoxos to Einstein: A History of Mathematical Astronomy* van Christopher M. Linton (Cambridge: Cambridge University Press, 2004.). Deze auteur besteedt 4 bladzijden aan Babylon, en daarna 34 bladzijden aan de Griekse sterrenkunde in de periode voor Hipparchus. Linton geeft impliciet toe dat hij de Babylonische tabletten niet zelf heeft bestudeerd, zie zijn voetnoot 11 op p. 12.

13 Zie *Late Babylonian Astronomical and Related Texts, copied by T.G. Pinches and J.N. Strassmaier, prepared for publication by A. Sachs,* Providence: Brown University Press, 1955, p. [11] no. 50, Obverse. Voor een foto van het tablet zie F.X. Kugler, *Die Babylonische Mondrechnung*, Freiburg 1900, Plate 13.

14 Regels 22–26 in het tablet.

15 Meest recentelijk in O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts London 1955*, vol. 1, p. 106–109 (tablet no. 60).

16 Voor 9 was er een speciale combinatie van drie schuine spijkers, die de negen verticale spijkers vervingen.

17 De maart met index 2 is een dertiende maand in het Babylonische jaar.

18 ACT vol. 1, p. 106–109.

19 Hier is een korte samenvatting. De Babyloniërs verdeelden een etmaal in 360 graden. Deze graden worden sexagesimaal genoteerd, dus bijvoorbeeld 182 graden als 3 2 graden. We gebruiken hier het begrip synodische maand in de betekenis van periode tussen twee opeenvolgende volle manen. De tweede kolom is (een eerste benadering van) de lengte van 223 opvolgende synodische maanden, te beginnen met de volle maan in de volgende maand. Deze 223 maanden zijn altijd 6585 dagen plus een rest van ongeveer een derde dag. Alleen de rest staat aangegeven. In de vierde kolom staat het tijdsinterval tussen zonsopgang en zonsondergang in het midden van de maand aangegeven. De 3 13 55 in de eerste regel betekent $3 \times 60 + 13 + 55/60$ van de graden waarin een etmaal werd onderverdeeld, hetgeen overeenkomt met 12 uur 55 minuten en 40 seconden. Omdat dit tijdsinterval langer dan 12 uur is, kunnen we zien dat het midden van 'april' 147 inderdaad na het begin van de lente viel. In de vijfde kolom staat de afstand van het middelpunt van de maanschijf tot de ecliptica, gemeten in 'gerstekorrels' (1 gerstekorrel is 50 boogseconden). De zesde kolom geeft de grootte van de verduistering in 'vingers' (1 vinger is 5 boogminuten). In de achtste kolom staat een eerste benadering van de lengte van vijf of zes synodische maanden die volgen op deze maand, dat wil zeggen de periode tussen deze maansverduistering en de volgende. Deze lengte is een geheel aantal dagen plus een breukdeel, en alleen het breukdeel staat aangegeven. Deze kolom is problematisch. Zie O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts*, Princeton 1955, vol. 1, p. 44–61, 106–109. Voor een recent overzicht van de Babylonische sterrenkunde zie Hermann Hunger, David Pingree, *Astral Sciences in Mesopotamia*, Leiden: Brill, 1999. Gemakkelijker leesbaar is B.L. Van der Waerden, *Science Awakening Part II*, Groningen: Noordhoff, 1968.

20 Zie Gerhard Dohrn-Van Rossum, *History of the Hour*, Chicago 1996, p. 282–284.

21 Voor de Islamitische uitvindingen van decimale breuken zie voor al-Uqlīdisī: A.S. Saidan, *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*, Dordrecht: Reidel, 1978, p. 114, 481–485; voor al-Samaw'al al-Maghribī: R. Rashed, L'Extraction de la Racine n-ième et l'Invention des Fractions Decimales (XI^e-XII^e Siècles), *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1978), p. 142–145; voor al-Kāshī: Paul Luckey, *die Rechenkunst bei Ǧamsīd b. Mas^{c}ūd al-Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Kunst des Rechnens*, Wiesbaden 1951, p. 102–114. Zie voor Europa J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra, vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke,* Berlin: Walter de Gruyter, 1980, p. 116–117.

22 Handschrift Meshed, Āstān-e Qods Reżawī, no. 5389, f. 46, zie *Fehrest-e Ketābkhāne-ye Āstān-e Qods Reżawī, ta'līf Aqā-ye ^{c}Abd al-^{c}Alī Ektābī.* Meshed: A.H. (solar) 1305–1350/1926–1971 CE (vols. 7–8 zijn geschreven door A. Gulchīn Ma^{c}ānī), vol. 3, p. 52, no. 162, vol. 8, p. 42. Zie voor editie en Duitse vertaling van de tekst: Paul Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risāla al-Muḥīṭīya) von Ǧamšīd b. Mas^{c}ūd al-Kāšī*, Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften Jahrgang 1950 no. 6, Berlin 1953, p. 22, 86.

23 Boris Rosenfeld and Jan P. Hogendijk, A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* **15** (2002/03), p. 25–65, zie p. 46 regel 20–21, p. 61 regel 8. Het Arabisch is: bil-^{c}amal alladhī stanbaṭnāhu bi l-quwwati l-ilhāmiyya ^{c}ani l-ḥaḍrati l-ṣamadiyya.

24 De grote rekenaars in de Islamitische cultuur waren sterrenkundigen, gewend aan het rekenen in het zestigtallig stelsel. Zij gaven de sexagesimalen aan met met de letters van het Arabisch alfabet, volgens hetzelfde systeem dat hun Griekse voorgangers hadden gebruikt om in het Griekse alfabet te rekenen. Al-Kāshī was gewend met gehele getallen en breuken in het zestigtallig positiestelsel te rekenen, en het eindresultaat eventueel naar het tientallig positiestelsel om te zetten.