

## Jan Brandts

Korteweg-de Vries Instituut  
Universiteit van Amsterdam  
Plantage Muidergracht 24  
1018 TV Amsterdam  
brandts@science.uva.nl

### Onderwijs Numerieke Wiskunde in de 21ste eeuw

# Studio Courses in Studio Classrooms

Van docenten wordt tegenwoordig meer dan ooit verwacht dat ze goed en aansprekend onderwijs verzorgen. Daarom wordt er op verschillende universiteiten geëxperimenteerd met nieuwe lesmethoden naast de gangbare vormen van onderwijs. Jan Brandts, universitair docent aan de Universiteit van Amsterdam, beschrijft de toegevoegde waarde binnen het Numerieke Wiskundeonderwijs aan de hand van ervaringen opgedaan bij de ontwikkeling en implementatie van vier Studio Courses in het academisch jaar 2004–2005, waaronder twee vakken binnen de zojuist van start gegane Landelijke Master Wiskunde.<sup>1</sup>

Een *Studio Course* is een cursus gegeven in een *Studio Classroom*. Een Studio Classroom wijkt in een aantal opzichten af van een reguliere collegezaal. Zo heeft ieder tweetal studenten de beschikking over een online computer van bescheiden afmetingen met op het vak toegesneden software, en heeft de docent-machine behalve aansluiting op de beamer, software om indien gewenst de computers van de studenten aan of bij te sturen.

In combinatie met een goede cursuswebsite geeft een dergelijke onderwijsomgeving extra mogelijkheden naast (maar zeker niet in plaats van) de meer gangbare vormen van onderwijs. Deze mogelijkheden lijken vooral bij vakken in de toegepaste richtingen prima te kunnen worden benut. Er moet wel gerekend kunnen worden op goede ondersteuning door de ICT-groep, want niemand is gebaat bij een *Studio Course* in een *Studio Klusroom*.

#### Geïntegreerd ICT-gesteund onderwijs

Een als Studio Classroom ingerichte zaal leent zich bij uitstek voor het geven van geïntegreerd ICT-gesteund onderwijs. Meer dan in menige klassieke practicumzaal is er rekening gehouden met het feit dat zelfstandig werken en klassikale overdracht hand in hand moeten kunnen gaan. Het volgende voorbeeld illustreert de soepele afwisseling van werkvormen.

*Context:* Numerieke Wiskunde, bachelorfase, 6EC<sup>2</sup>, jaar 2, semester 1, week 10–11 van 14; het benaderen van oplossingen van randwaardeproblemen.

*Relevante reeds vergaarde voorkennis:* het projecteren van vectoren op deelruimten van  $\mathbf{R}^n$  en van functies op polynoomruimten, beide in het standaard inproduct. Foutgrenzen voor Hermitisch interpoleren (interpoleren van zowel functiewaarden als waarden van de afgeleide) met cubische polynomen.

*Te behandelen collegestof:* de bilineaire vorm  $\langle f, g \rangle = (f', g') = \int_I f'(x)g'(x)dx$  is een inproduct op de ruimte  $C_0^1(I)$  van continu differentieerbare functies die nul zijn op de rand van  $I = [0, 1]$ . Als  $u \in C_0^1(I)$  voldoet aan  $-u'' = f$ , kan de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -orthogonale projectie  $Pu$  van  $u$  op een deelruimte  $\mathcal{V}$  van  $C_0^1(I)$  met  $\dim(\mathcal{V}) = m < \infty$  middels partiële integratie worden berekend uit het feit dat

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, v \rangle = (f, v)$$

voor alle  $v \in \mathcal{V}$ . Bijna per definitie geldt bovendien dat

$$|u - Pu| = \min_{v \in \mathcal{V}} |u - v|, \quad \text{waarbij } |\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}. \quad (1)$$

Laat nu bijvoorbeeld

$$\mathcal{V} = \{v \in C_0^1(I) \mid v|_{I_j} \text{ is een cubisch polynoom voor alle } j\},$$

waarbij  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  en  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  een opdeling van  $I$  in sub-intervallen voorstelt.<sup>3</sup> Stug herhaald toepassen van Rolle's Lemma laat zien dat het minimum in (1) voor deze keuze van  $\mathcal{V}$  en voor  $u \in C^4(I)$  grootte  $\mathcal{O}(h^3)$  heeft, waarbij  $h = \max_j |x_j - x_{j-1}|$ .

*Gangbare overdracht:* wekelijks middels hoorcollege, werkcollege, en een programmeersessie. Beide laatste onderdelen onder begeleiding van een aio en student-assistent.

*Geïntegreerde aanpak:* de docent geeft 35 minuten hoorcollege, en zet in het kwartier pauze dat volgt twee foto's van de zojuist volgeschreven schoolborden op de cursuswebsite.<sup>4</sup>

De 25 minuten erna laat hij aan opgaven werken. Hij signaleert dat de uitleg over de bovengrens van de fout middels analyse van de interpolant van  $u$  in  $\mathcal{V}$  niet is overgekomen, en last vijf minuten in voor extra toelichting, waarbij hij het eerste volgeschreven schoolbord nogmaals toont via de beamer. Zodra de opgaven zijn afgerond, geeft hij na een korte pauze weer 25 minuten hoorcollege. Als bij de



Ruim opgezette Studio Classroom met compacte desktops

Group scores per question

There were 37 participants. This tabular shows their results for each of the questions.

Statement:	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Correct:	21	33	34	35	35	27	30	27	27	19
Incorrect:	12	1	1	2	2	9	4	5	4	8
No idea:	4	3	2	0	0	1	3	5	6	10

Update the statistics

To refresh the above results, click the button below.

Submit Query

Resultaten van online ingevulde ja-of-nee vragen kunnen direct worden getoond.

opgave erna blijkt dat niet goed is begrepen hoe de basis van  $\mathcal{V}$  eruit ziet, maakt hij een schets middels een tekenprogramma binnen het elektronisch schoolbord (een via de beamer geprojecteerde desktop van een computer met een speciale pen die als muis fungeert).

Na een derde pauze, waarin de docent de schets als basis.jpg op de website heeft gezet, wordt gedurende de resterende 55 minuten paarsgewijs en ter plekke aan de *Matlab*-implementatie gewerkt. Een verwarrende tikfout in de online beschrijving van de opdracht, opgemerkt door de snelste student, herstelt hij snel, en vraagt de anderen om even te reloaden nog voordat ze de fout hebben kunnen opmerken. In de laatste tien minuten projecteert hij via de beamer tien ja-of-nee vragen over de theorie die de studenten anoniem op een *fill-out form* op de webbrowser invullen en opsturen.<sup>5</sup>

De studenten zien direct hun eigen score op hun eigen scherm. De opgetelde antwoorden per vraag zijn direct via de beamer te zien, en de twee vragen die door opvallend veel mensen fout waren gemaakt worden extra toegelicht.

### Klassiek of geïntegreerd?

Bovenstaande beschrijving van de geïntegreerde aanpak heeft veel weg van de praktijk bij vier nieuwe Studio Courses in de Numerieke Wiskunde waarvan in tabel 1 enkele cijfers staan gepresenteerd. Deze vakken hebben de volgende kenmerken met elkaar gemeen:

- 14 bijeenkomsten van 3–4 maal 45 minuten intensief onderwijs
- een hoge (vrijwillige) opkomst en een hoog slagingspercentage
- continue afwisseling van uitleg, opgaven, en illustratief programmeerwerk
- website met lecture notes, programma's, opgaven, quizen

Voordelen van deze aanpak zijn dat iedereen een groot deel doet van het (programmeer)werk onder toezicht van de docent, die ook de stof heeft uitgelegd en de opgaven heeft uitgekozen. Hints en tips worden door alle studenten opgevangen. Opgemerkte fouten en gebreken in de uitleg kunnen direct worden hersteld. De online quiz is niet alleen een efficiënt maar ook een leuk en eenvoudig middel om feedback te krijgen over wat begrepen is. Een middel dat veel beter lijkt te werken dan te vragen of er nog vragen zijn.

De klassieke aanpak is minder schools. Veel wordt bepaald door de werkhouding en het lef van de student om te willen en durven studeren, ook als de docent niet in de buurt is. De onderwijsbelasting van de docent die een zaal kan boeien middels vakkennis, enthousiasme, een krijtje en een boek, is veel lager. We

kennen allemaal voorbeelden van dergelijke studenten en docenten. Maar hoeveel eigenlijk?

### Differentiatie naar niveau

Studio Courses lijken dus onder andere een middel om de zwakkere en gemiddelde student extra houvast en studiekader te bieden. Toch is de Studio Course meer dan een bezemwagen. Ook de sterke studenten geven aan dat ze gemotiveerd worden door activerende werkvormen, die bovendien meer mogelijkheden bieden tot differentiatie naar niveau. Het volgende voorbeeld illustreert dit. Binnen één cursus waarin de eerste zeven inleidende weken voor iedereen gelijk waren, konden negen groepen vervolgens aan de slag met projecten waarvan de moeilijkheidsgraad aansloot bij de cijfers van de drie toetsen binnen de eerste zeven weken.

*Context:* *Simuleren en Programmeren*, bachelorfase, 6EC, jaar 1, semester 2, week 8–14.

*Collegestof:* het leren programmeren in *Matlab*. Projecten in groepen van 3–4.

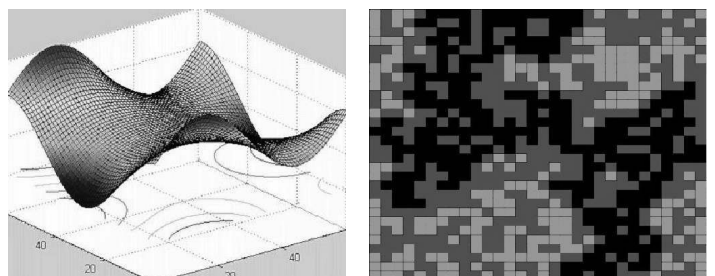
*Groep A:* programmeer, zonder van ingebouwde mogelijkheden van *Matlab* gebruik te maken, een numerieke benaderingsmethode voor de Laplacevergelijking  $-\Delta u = 0$  op  $[0, 1] \times [0, 1]$  met gegeven tijdsafhankelijke waarden van  $u$  op de rand, en los de hieruit resulterende matrixvergelijkingen (vernoemd naar Sylvester)  $AU + UA = G$  iteratief op.

*Groep B:* vul ieder van de hokjes van een  $n \times n$  rooster op met kans  $p$  en onderzoek of er een gevuld pad ontstaat van een zijde naar de overzijde. Onderzoek experimenteel de afhankelijkheid van  $n$  en  $p$ . Generaliseer naar drie dimensies.

*Geïntegreerde aanpak:* bij deze cursus waarin leren programmeren centraal staat, loopt het niveau vaak sterk uiteen. Sommige studenten zijn handiger dan de docent, anderen hebben geen enkele ervaring met programmeren. Toch is een heterogene groep van dertig tot veertig personen goed aanstuurbaar in een Studio Classroom door projectwerk aan te bieden op niveau, dat gemeent wordt middels korte individuele tests in de eerste helft van de cursus. Groep B in dit voorbeeld koos voor een eenvoudig percolatieproject met extra begeleiding van de docent, met als maximale eindcijfer een acht.<sup>6</sup> De sterkste groepen konden zich prima zelf redden, en kwamen onder slechts marginale begeleiding tot prachtige en verrassende resultaten die het doel van cursus ruim overstegen: het werk van groep A zou zeker niet hebben misstaan in de tweedejaarscursus uit het eerste voorbeeld.

### Afwisselende theoretische en praktische toetsing

Een ander kenmerk van de cursussen is het steeds weer toetsen van de studenten. Naast een ingangstest aan het begin van week 3 zijn er drie programmeeropdrachten die in paren gemaakt

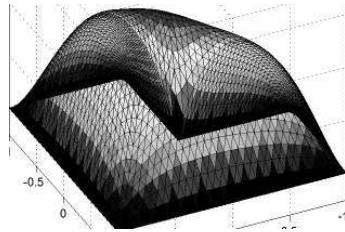


Een avi-filmpje van groep A, en een gevonden percolatiepad van groep B

```

01 function [A,M,uh] = My2DLinFEM(K,q,N,T,G)
02 E = find(G); I = find(G-1);
03 EM = (ones(3,3)*eye(3))/24;
04 A = sparse(length(G),length(G)); M = A;
05 for v = T
06   DF = inv(H(:,v(2:3))-H(:,v(1 1)));
07   dd = 1/abs(det(DF));
08   B = [-1 -1; 1 0; 0 1]*df;
09   A(v,v) = A(v,v) + 0.5*dd*B'*B*B';
10   H(v,v) = H(v,v) + dd*EM;
11 end
12 C = A+q*M;
13 uh(I) = C(I,I)\(H(I,:) * f(I));
14 uh(E) = 0;
15 function z = f(x)
16 z = ones(size(x));

```



Matlab-code voor bovenstaande PDE, toegepast op een winkelhaakvormig domein  $\Omega$

kunnen worden, en drie schriftelijke individuele toetsen over de theorie achter de programmeeropgaven van ongeveer een half uur.<sup>7</sup> Vier van de zeven cijfers zijn dus individueel. Alle zeven moeten tenminste een 5 zijn. Als voorbeeld van deze afwisseling tussen theorie en praktijk met bijbehorende toetsen het volgende. *Context: Numerical Methods for Partial Differential Equations (PDE), Masterfase, 8EC, jaar 4 of 5, semester 2, week 7–10. Collegestof: Sobolevruimtes, zwakke formulering van elliptische PDE-s, lemma's van Lax-Milgram en Céa voor foutgrenzen in  $H^1(\Omega)$ , Matlab-implementatie van de uit dit alles resulterende eindige elementen methode op willekeurige triangulaties van polygonale domeinen van*

$$-\operatorname{div} K \nabla u + qu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{op } \partial\Omega,$$

en het regelmatig verfijnen van de gegeven triangulatie, oftewel, het opdelen van iedere driehoek in vier kleinere door de middelpunten van de zijden te verbinden.

	S&P	NW2	NLA	NUMPDE
Semester	2	3	7	8
# cursusweken	14	14	20	20
# middagen	14	14	14	14
× 45 minuten	4	4	3	3
EC belasting <sup>2</sup>	6	6	8	8
# studenten	33	16	17	22
# geslaagd	28	12	13	19
% opkomst	95	85	90	95

**Tabel 1** De cijfers van de vier Studio Courses *Simuleren en Programmeren, Numerieke Wetkunde 2, Numerical Linear Algebra en Numerical Methods for PDE*. Het aantal studenten is steeds het aantal studenten dat de eerste schriftelijke individuele test, doorgaans aan het begin van week 3, heeft gehaald.

*Geïntegreerde aanpak:* in de vier bijeenkomsten van drie uur wordt (functionaal)analyse afgewisseld met opgaven en de paarsgewij-

ze Matlab-implementatie van de eindige elementen methode. Er wordt veel aandacht besteed aan het feit dat de theorie achter de methode zich weinig aantrekt van eventuele praktische problemen bij het daadwerkelijk implementeren.

Door studenten tijdens de bijeenkomsten meteen met deze problemen te confronteren, vormen zich onverwachte vragen die leiden tot discussies, met een beter begrip tot gevolg (of op zijn minst de realisatie dat er meer achter zit dan in eerste instantie bij oppervlakkig toehoren werd vermoed). Zo is het zeer eenvoudig om uit te leggen hoe je een triangulatie verfijnt, maar zeker niet eenvoudig hoe je dit in optimale complexiteit kunt administreren binnen een computerprogramma.

Doordat de theoretische test vrij snel plaatsvindt na het inleveren van de programmatuur, en beide meetellen, heerst er een plezierige nu-of-nooit-werkhouding. Aangezien een groot deel van het begrip op deze manier al tijdens de bijeenkomsten wordt gevormd, dient de theoretische test voornamelijk om meeliften onmogelijk te maken.

Een dag nadat hij op het college is genoemd wint Peter Lax de *Abel Prize*. Op de cursuswebsite wordt in een handomdraai een aantal links geplaatst en de studenten ontvangen meteen een e-mail hierover in de wekelijkse nieuwsbrief *NUMPDE Digest*.

### Enkele cijfers en opmerkingen

De cijfers in tabel 1 geven een indruk van de vier cursussen. Het aantal studenten is steeds het aantal studenten dat de eerste schriftelijke individuele test aan het begin van de derde week heeft gehaald. Deze eenvoudige ingangstest is bedoeld om studenten met een totaal ontoereikende voorkennis te kunnen weren bij de rest van het vak.

Vooraf de hoge opkomst is opvallend. De bijeenkomsten hebben geen opkomstplicht, los van de doorgaans vier schriftelijke individuele tests. Een student die niet komt wordt echter vriendelijk verzocht om, desnoods zonder opgaaf van redenen, even voorafgaand aan het te missen college via de e-mail te laten weten dat hij niet komt. Als hij twee keer achtereenvolgens zonder afmelding afwezig is geweest, wordt dat bij het onderwijsbureau gemeld. Maar in principe kan een student het vak halen met vier keer een half uur aanwezigheid en tien e-mails met afmelding. En een beetje student automatiseert het laatste in een oogwenk.

Vooralsnog lijkt het er echter op dat studenten zo nu en dan liever een half uur langer blijven om nog even door te werken, zelfs aan het eind van een middag van vier keer drie kwartier. Daarnaast staan ze ook vaak een half uur tevoren al voor de zaal te wachten. En de vele tientallen e-mails gaan op een enkele afmelding na gewoon over de cursus. ↵

### Noten

- Website auteur: <http://staff.science.uva.nl/~brandts>; website landelijke master wetkunde: <http://www.mastermath.nl>
- Per 1.9.2003 is een nieuw systeem van Europese studiepunten waardering ingevoerd: *European Credits (EC)*, voluit: studiepunten volgens het *European Credit Transfer System (ECTS)*.  $x$  oud studiepunt (40 studielasturen) =  $x * 1,43$  EC, afgerond naar dichtstbijzijnde hele EC. Dus: één EC = 28 studielasturen en één cursusjaar bestaat uit 60 EC = 1680 studielasturen.
- Het moeizame werken met differentieerbare stuksgewijs cubische functies motiveert de introductie van in hogere jaren door studenten vaak schouder-ophalend bekeken concepten als zwakke differentieerbaarheid en Sobolevruijmtes, die het relatief simpele gebruik van continue stuksgewijs lineaire functies rechtvaardigen.
- Digitaal fotograferen en publiceren op het web van schoolborden is een leuk idee dat ik voor het eerst zag bij Joost Hulshof (VU).
- Dit lijkt veel beter te werken dan te vragen of studenten de stof hebben begrepen, en of er nog vragen zijn. Voor de docent is enige bekendheid met html en php of cgi vereist.
- Bij turnen en schoonspringen heeft een oefening of een sprong ook vaak een uitgangswaarde die bij perfecte uitvoering lager kan zijn dan een tien.
- Dit alles speelt zich grotendeels af tijdens de bijeenkomsten.