Matthijs Coster
Postbus 20701
2500ES Den Haag
uwc@nieuwarchief.nl

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade

Eerste aflevering meteen pittig

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) begon in de jaren negentig als een jaarlijks terugkerend evenement, medio december werden ongeveer tien opgaven over de prikborden van de wiskundefaculteiten verspreid. Studenten die zich er door voelden aangesproken, mochten, gebruikmakend van bibliotheek en computer, proberen de opgaven op te lossen. Vanaf het jaar 2000 tot nu is deze wedstrijd voor studenten opgenomen als laddercompetitie in de problemenrubriek van dit blad, waardoor het aparte van de competitie voor een groot deel was verdwenen. Dit jaar is er een volledig nieuwe vorm bijgekomen: een landelijk evenement, waarbij studenten gedurende drie uren opgaven moeten oplossen, zonder hulpmiddelen. Matthijs Coster, redacteur van de UWC, vertelt.

Op 3 juni verzamelden zich 's morgens om half elf tientallen studenten in het Gorlaeus in Leiden om deel te nemen aan de eerste *Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade* (LIMO).

Omdat de LIMO voor het eerst werd georganiseerd was er beschuit met muisjes.

Om elf uur begon het programma. De studenten werden welkom geheten door Anne Keune namens de LIMO-commissie van de *Leidsche Flesch*. Vervolgens werd het woord gegeven aan Frans Keune die de studenten welkom heette namens het *Koninklijk Wiskundig Genootschap* (KWG). Hij maakte gebruik van moderne marketingmiddelen om KWG aan te prijzen bij de studenten.

Daarna was het woord aan Jan Hogendijk. Hem was gevraagd om zijn voordracht dusdanig in elkaar te zetten dat ook laatkomers moeiteloos konden inspringen. Zijn voordracht ging over de derdegraads vergelijking en hoe deze langzaam maar zeker werd opgelost in de zestiende eeuw. Hij bracht zijn verhaal in de vorm van een soap-opera in zeven afleveringen. Er zat ook een wedstrijdelement in, doordat de aanwezigen halverwege de voordracht werd gevraagd om voor een wortel van de vergelijking $x^3 + px = q$ een uitdrukking te vinden die naast de gebruikelijke operaties alleen tweede- en derdemachts wortels toelaat. Hij besteedde veel aandacht aan het feit dat de zestiende-eeuwse rekenmeesters in Italiëelkaar veel uitdaagden en onderling wedstrijden hielden. Al bij al was het een zéér toepasselijke voordracht.

Na de lunch konden de zestien teams van vier studenten aan de slag. Elk team werd in een lokaal gezet met tien opgaven die waren bedacht door wiskundigen van verschillende universiteiten. De teams bestonden uit drie bachelorstudenten en één ouderejaars student, alhoewel bij sommige teams deze vierde student ook bachelorstudent was. Er was drie uur uitgetrokken om de opgaven te maken, maar nadat de tijd verstreken was, was nog niemand klaar.

De oplossingen, voor zover deze waren gevonden, gingen naar de nakijkers. Dit waren veelal de wiskundigen die de opgaven hadden bedacht. Ondertussen hadden de studenten een borrel tot de prijsuitreiking. Velen gebruikten deze tijd om opgaven en de antwoorden te bespreken, anderen speelden een spelletje hartenjagen of klaverjassen.

Van integreren kwam niet zoveel terecht. Men zat of stond veelal bij studenten van eigen universiteit. Alleen de studenten die elkaar kenden (van bijvoorbeeld de Wiskunde Olympiade) maakten gebruik van de gelegenheid om ook buiten de eigen universiteit met anderen een praatje aan te gaan.

In de ruimte waar de opgaven werden nagekeken heerste een enorme drukte. Naast de tien inzenders van de opgaven (of hun plaatsvervangers) die de opgaven nakeken waren er ook nog twee organisatoren in de weer met een laptop om de resultaten in te voeren, en om uiteindelijk een presentatie van de resultaten in elkaar te draaien.

De prijsuitreiking was in een ander gebouw. Onderweg moest een forse hoosbui getrotseerd worden. Voor de uitreiking werd

Eerste rij, van links naar rechts: voor en na het introductiecollege vanJan Hogendijk; tweede rij: de deelnemers aan de slag; derde rij, eerste twee foto's: bezorgde blikken van de correctoren; derde rij, laatste foto: de organisatoren ontvangen een fles *Limo*; vierde rij, links: het winnende team *Squeak!* van de Radboud Universiteit Nijmegen; rechts, bovenste foto: de organisatoren ruimen op; onderste foto: Rein Nobel bedankt alle medewerkers.

Hoe is het ooit zover gekomen!

"Ah, leuk, een definitie van de reele getallen!" Dat is in ieder geval de eerste gedachte die bij mij opkwam bij het doorbladeren van de opgaven van de LIMO. Nou had een definitie van open en gesloten intervallen - die in de betreffende opgave veel voorkwamen - het nog leuker kunnen maken, maar dat kan de pret niet drukken.

Enige tijd later wordt die gedachte natuurlijk wel deels vervangen door: "Wat doe ik hier? Gelukkig weet ik bij tentamens over het algemeen het antwoord op meer vragen." Maar ook dat kan de pret niet drukken. En dan beweren mijn teamgenoten nog wel dat het mijn idee was om hier te komen. Hoe is het ooit zo ver gekomen?

Ik weet nog precies dat ik over de LIMO de woorden "Goh, dat lijkt best leuk" sprak. Waarmee ik bedoelde dat de mensen die wel aan zulk soort dingen meedoen vast een heel leuke dag zouden hebben. Als niet een van mijn studiegenoten zo iemand was geweest, was mijn uitspraak waarschijnlijk zonder ernstige gevolgen gebleven. Nu werd het opgevat als een vrijbrief net zo lang door te vragen tot ik beloofde mee te gaan. Dag, colleges! Hallo, veel te lange treinreis Groningen–Leiden!

Uiteindelijk viel het allemaal nog mee. In de trein werd het — mede dankzij een ander team uit Groningen waarvan wij het bestaan van tevoren niet vermoedden — toch nog best gezellig. We slaagden er zelfs in, door de stroom als wiskundige uitziende mensen te volgen, bij het juiste gebouw aan te komen, waar helaas net de thee op was. Dan maar zonder thee naar de lezing, en hopen dat het nog een beetje interessant wordt. Dat was gelukkig dan weer wel het geval, wat natuurlijk veel goed maakt.

Prof. dr. J.P. Hogendijk kon de geschiedenis van wiskunde heel levend neerleggen en met paar opgaven van toen heeft hij onze hersenen een beetje opgewarmd voor de Olympiade.

Dan, na een goede lunch het onderdeel waar het allemaal om was begonnen. De Olympiade zelf. Zoals al eerder vermeld een interessant, en niet bepaald eenvoudig onderdeel.

Tussen het maken van de opgaven en de bekendmaking van de uitslag vielen ons een aantal interessante zaken op. Zo gaf het aantal klaverjassende wiskundestudenten aanleiding tot de vraag of er misschien een verband bestaat tussen het beoefenen van deze edele sport en het bekend zijn met de wiskunde. Ook interessant is hoe veel vloeistof geconsumeerd wordt door een relatief kleine groep mensen als het drinken gratis is. (Hulde aan de organisatoren, overigens). En dan natuurlijk het moment waar iedereen op heeft zitten wachten, de bekendmaking van de uitslag.

Uiteindelijk blijkt gelukkig dat we het als team nog niet zo slecht gedaan hebben als we hadden gedacht. Blijkbaar vond iedereen de opgaven moeilijk. Wat natuurlijk niet wegneemt dat elfde van de zestien geen enorm goed resultaat is. De top tien was niet gehaald, en ook hebben we niet van het andere Groningse team werd niet gewonnen. Het eten was daarentegen wel goed, wat vele teleurstellingen doet verbleken.

Al met al was de LIMO een interessante dag, met interessante mensen, interessante opgaven, en een zeer goede organisatie. Afgezien van de thee bij het ontvangst natuurlijk. Aangezien alles verder uitstekend ging denk ik dat ik ze dat wel kan vergeven.

Bouke Kuijer, Andrea Velická en Philip Pruim,
studenten wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen

een fles *Limo* uitgereikt aan de leden van de organiserende commissie en verder was er een reclamepraatje voor de Universitaire Wiskunde Competitie.

Lodewijk Kallenberg verzorgde op een leuke wijze de uitreiking. Er waren prijzen voor de beste drie teams, en een prijsje voor het team dat geheel onderaan was geëindigd. De hoofdprijs ging naar *Squeak!* uit Nijmegen. De organisatie sprak tenslotte de hoop uit dat de universiteit waar het winnende team vandaan kwam (Nijmegen) volgend jaar de organisatie op zich zal nemen.

De dag werd afgesloten met een diner-barbecue. Terugkijkend kan ik niet anders, dan concluderen dat het voor iedereen een geslaagde dag was.

De opgaven

De opgaven werden alle ingeleid door een algemene introductie. De auteurs van de opgaven komen van alle universiteiten van Nederland, uit alle vakgebieden.

Verpleeghuis Avondrood *(R.D. Nobel, Vrije Universiteit)*

In verpleeghuis Avondrood heeft men te kampen met een nijpend tekort aan personeel. Er zijn N bewoners die elke 24 uur M soorten verzorging behoeven (wassen, aankleden, eten, etc.) die voor het personeel evenzovele taken omvatten. Voor bewoner j vereist taak i een tijd t_{ij} van een verzorger $(i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N)$. Er zijn in totaal Q verzorgers werkzaam in Avondrood, die elk uiteraard aan slechts één taak tegelijk kunnen werken. Voor elke taak geldt een tijdvenster $[a_i, b_i]$ waarbinnen taak i voor alle bewoners moet worden uitgevoerd. De tijdvensters voor de verschillende taken zijn paarsgewijs disjunct $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_M < b_M)$. Verschillende taken voor één bewoner kunnen eventueel door verschillende verzorgers worden uitgevoerd. Elk personeelslid werkt regulier 8 uur per etmaal. Uiteraard geldt voor elke taak i,

$$\max\{t_{ij} : 1 \leq j \leq N\} \leq b_i - a_i \quad \text{en} \quad \frac{\sum_{j=1}^{N} t_{ij}}{Q} \leq b_i - a_i,$$

omdat het anders fysiek al niet mogelijk is alle bewoners de volledige verzorging te geven. Het personeelstekort komt tot uiting door het gegeven dat

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} t_{ij} > 8Q,$$

in woorden, de totale tijd nodig voor het verzorgen van de bewoners is groter dan het totaal aantal uren reguliere (echte) werktijd dat met Q personeelsleden per etmaal beschikbaar is. Omdat het niet mogelijk blijkt meer personeel te vinden, en men 'pyjamadagen' wil voorkomen, zal elke verzorger een aantal uur per dag moeten overwerken om al het noodzakelijke werk gedaan te krijgen. De directie van Avondrood vraagt nu aan elke verzorger hoeveel uur hij maximaal bereid is per dag over te werken voor de goede zaak. Voor verzorger k blijkt dit u_k uur te zijn ($k = 1, \ldots, Q$).

De volgende vraag is òf en hoe een werkschema kan worden opgesteld waarin voor elke verzorger precies wordt voorgeschreven voor wie hij/zij welke taak moet uitvoeren. Men streeft er hierbij naar de totale tijd besteed aan overwerk te minimaliseren. Er zij nog opgemerkt dat in huize Avondrood de goede gewoonte bestaat dat na het voltooien van een taak de verzorger altijd nog enige tijd sociaal contact onderhoudt met de bewoner. Deze tijd ligt altijd buiten het tijdvenster van de voltooide taak, maar wordt in onze zakelijk ingestelde samenleving wel als werktijd beschouwd, en mag ook niet plaatsvinden binnen het tijdvenster voor een andere taak. Precies gezegd, sociaal contact na uitvoering taak i vindt plaats in het tijdsinterval $[b_i, a_{i+1}]$ ($a_{M+1} = a_1$ van de volgende dag!). De tijd voor sociaal contact na taak i tussen verzorger k en bewoner j bedraagt altijd c_{ijk} (hier wordt de persoonlijke relatie tussen bewoner en verzorger zichtbaar!). Merk op dat als een verzorger bijvoorbeeld drie bewoners geholpen heeft bij taak i hem dit drie na elkaar af te werken sociale contacten 'kost'. Tenslotte, (koffie)pauzes en dergelijke worden niet als werktijd beschouwd.

Formuleer het probleem van het vinden van een werkschema met minimale totale overwerktijd nu als een gemengd lineair/geheeltallig programmeringsprobleem.

Nadat men het optimale werkschema heeft berekend blijkt het personeel zeer ontevreden te zijn, terwijl toch aan de genoemde wensen voldaan is.

Verklaar waarom het personeel zeer ongelukkig zou kunnen zijn met het 'optimale' werkschema.

De vraag is vervolgens hoe we via extra bijvoorwaarden het personeel wel een acceptabel werkschema kunnen geven. De directie deelt daartoe een etmaal op in drie keer 8 uur (1=dagdienst, 2=avonddienst en 3=nachtdienst). Verder zoekt de directie uit welke taken in de diverse diensten kunnen worden uitgevoerd. Laat $T_d \subset \{1, 2, \ldots, M\}$ de collectie taken zijn die (inclusief sociaal contact na afloop) in een d-dienst (plus 'aansluitend' overwerk!) redelijkerwijs zijn uit te voeren ($d = 1, 2, 3$).

Voeg nu de bijvoorwaarden toe die tegemoet komen aan de bezwaren van de oplossing van het eerste onderdeel.

Periodieke functies *(R. Tijdeman, Universiteit Leiden)*
We beschouwen functies $f : \mathbf{Z} \to \{0, 1, 2\}$. We noemen de functie f periodiek als er een geheel getal $p > 0$ bestaat zódat $f(n + p) = f(n)$ voor alle n groter dan een zeker getal N. We definiëren $P(m, f)$ als het aantal verschillende vectoren

$$(f(n+1), f(n+2), f(n+3), \ldots, f(n+m))$$

dat je krijgt als n de gehele getallen doorloopt.

Bewijs: als het beeld van f zowel nullen, enen als tweeën bevat en er bestaat een positief geheel getal m zódat $P(m, f) = m + 1$, dan is f periodiek.

Bewijs: er bestaat een f waarvan het beeld zowel nullen, enen als tweeën bevat, zódat f niet periodiek is en voor elk positief geheel getal m geldt dat $P(m, f) = m + 2$.

Aanwijzing: Je kunt het volgende bewijzen en gebruiken: Schrijf $\{x\}$ voor het fractionele deel van x, dat is de rest bij deling door 1. Beschouw voor een irrationaal getal $a \in (0, 1)$ de functie $f : \mathbf{Z} \to \{0, 1\}$ gegeven door $f(n) = 0$ als $\{na\} \in [0, a)$, $f(n) = 1$ als $\{na\} \in [a, 1)$. Bewijs dat f niet periodiek is en voor elke m voldoet aan $P(m, f) = m + 1$.

Reële getallen *(N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen)*
In de negentiende eeuw zagen wiskundigen in dat zelfs intuïtief volkomen voor de hand liggende resultaten als de *tussenwaardestelling* (als een continue reëelwaardige functie f op het interval $[0, 1]$ voldoet aan $f(0) < 0$ en $f(1) > 0$, dan heeft f een nulpunt in $[0, 1]$) niet bewezen konden worden zonder een goed begrip van de reële getallen.

Dit leidde in de tweede helft van de negentiende eeuw tot een groot aantal pogingen de reële getallen te definiëren. Hiertoe bleek het verzamelingbegrip van Cantor noodzakelijk, en deze pogingen culmineerden in de definitie van Hilbert uit 1900, die nog steeds als basis van de analyse geldt.

Let op: een definitie is iets anders dan een constructie! Bij een constructie van de reële getallen $\mathbf{R}$ moet men denken aan verhalen over Cauchy-completering van $\mathbf{Q}$, of aan Dedekind-sneden van $\mathbf{Q}$. Dergelijke constructies stellen de natuurlijke getallen $\mathbf{N}$ voorop in de wiskunde, en construeren daaruit $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, en ten slotte dus $\mathbf{R}$. In de aanpak van Hilbert daarentegen begint de analyse met een definitie van $\mathbf{R}$, en zijn bijvoorbeeld de natuurlijke getallen een daaruit afgeleid begrip.

Hier is de definitie van Hilbert:

Definitie. *De reële getallen $\mathbf{R}$ vormen een lichaam dat totaal geordend is onder een ordening $\leq$, zodanig dat $x \leq y$ impliceert $x + z \leq y + z$ voor alle z alsmede $x \cdot z \leq y \cdot z$ voor alle z met $0 \leq z$. Dit totaal geordende lichaam voldoet aan de volgende eigenschap:*

Volledigheidsaxioma van Dedekind. *Als $X \subseteq \mathbf{R}$ en $Y \subset \mathbf{R}$ beide niet-lege deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn met de eigenschap dat $x \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$, dan is er een $c \in \mathbf{R}$ zodanig dat $x \leq c \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$.*

Er kan aangetoond worden dat $\mathbf{R}$ op isomorfie na uniek is: als $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}'$ twee totaal geordende lichamen zijn die voldoen aan het volledigheidsaxioma van Dedekind, dan is er een uniek lichaamsisomorfisme $\mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ dat de ordening bewaart.

Leid uit Hilberts definitie van $\mathbf{R}$ het lemma van Cauchy-Cantor af: de doorsnede $\cap_n I_n$ van een aftelbare verzameling niet-lege, gesloten intervallen $I_n \subseteq \mathbf{R}$ met de eigenschap $I_{n+1} \subseteq I_n$ voor alle $n \in \mathbf{N}$ is niet leeg.

Een *limietpunt* van een deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ is een punt $c \in \mathbf{R}$ met de eigenschap dat voor iedere $\epsilon > 0$ de doorsnede

$(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap X$ oneindig veel punten van X bevat. Een deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ heet *begrensd* als er $a, b \in \mathbf{R}$ bestaan zodat $a \geq x \geq b$ voor alle $x \in X$

Leid uit het lemma van Cauchy-Cantor de stelling van Bolzano-Weierstrass af: iedere oneindige begrensde deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ heeft een limietpunt.
Laat zien dat (gegeven het eerste deel van Hilberts definitie van $\mathbf{R}$) de stelling van Bolzano-Weierstrass equivalent is met het volledigheidsaxioma van Dedekind. Gegeven opgave b moet dus nog worden bewezen dat de stelling van Bolzano-Weierstrass het bewuste axioma impliceert.

Dammen *(R. Tijdeman, Universiteit Leiden)*
We beschouwen damborden met stukken erop. De situatie geven we aan met een functie $f : \{1, 2, ..., 10\} \times \{1, 2, ..., 10\} \to \{0, 1\}$, waarbij de functiewaarde 1 is als er wel een stuk op het veld staat en 0 anders. We noteren het aantal stukken op de i-de rij met r_i, dus $r_i := \sum_{j=1}^{10} f(i, j)$ voor $i = 1, 2, \ldots, 10$. Analoog noteren we de kolomsommen als $k_j := \sum_{i=1}^{10} f(i, j)$ voor $j = 1, 2, \ldots, 10$ en de diagonaalsommen als $d_h := \sum_{i+j=h} f(i, j)$ voor $h = 2, \ldots, 20$.

Geef twee verschillende opstellingen die dezelfde rijsommen, kolomsommen en diagonaalsommen hebben.

De sommen zijn niet onafhankelijk. Zo is evident dat

$$\sum_{j=1}^{10} r_j = \sum_{i=1}^{10} k_i = \sum_{h=2}^{20} d_h$$

Er is nog een hiervan onafhankelijke lineaire relatie tussen de rijsommen, kolomsommen en diagonaalsommen. Geef zo'n relatie.

Modulorekenen *(F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen)*

Bepaal de natuurlijke getallen m waarvoor er een natuurlijk getal $k > 1$ is met de eigenschap dat tot de macht k verheffen een permutatie van de restklassen van gehele getallen modulo m induceert.

Eigenwaarden *(M.A. Botchev, Universiteit Twente)*
Notatie:
- Alle vectoren zijn kolomvectoren.
- Voor $A \in \mathbf{R}^{n\times k}$ wordt met A^T de getransponeerde van de matrix $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ aangegeven. Dus als $A = (a_{ij})$, dan is $A^T = (a_{ji})$.

Beschouw een stelsel lineaire vergelijkingen

$$Ax = b, \quad A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad x, b \in \mathbf{R}^n,$$

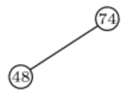
waar de vector x moet worden bepaald voor een gegeven matrix A en vector b. In aantal belangrijke fysische toepassingen komen we lineaire stelsels tegen met matrices A die antisymmetrisch zijn (dus $A = -A^T$).

Bij dergelijke toepassingen is het niet de bedoeling dat de matrix A singulier is, want we willen dat het stelsel oplosbaar is voor alle $b \in \mathbf{R}^n$.

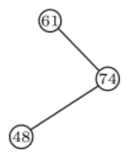
Voor welke $n \in \mathbf{N}$ kun je zeker zeggen dat een antisymmetrische matrix $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ minstens één eigenwaarde gelijk aan nul heeft?

Er groeien bomen in onze computers *(F.M. Dekking, TU Delft)*
Allerhande pakketjes van gegevens die bewaard worden op de harde schijf van een computer hebben een identificatie, die de *sleutel* heet. Een sleutel is gewoon een (geheel) getal. Wat vaak voorkomt is dat er een heleboel gegevenspakketjes zijn met elk hun eigen sleutel. Als je een gegevenspakketje wilt bekijken, dan zoek je het op met behulp van zijn sleutel. Om dat opzoeken snel te laten verlopen zitten de sleutels niet gewoon achter elkaar maar zijn ze in een boomvorm opgeslagen. Het probleem is om een rijtje van (verschillende) sleutels op een slimme manier op te slaan. Dit gebeurt met een vaste regel die voor elk mogelijk rijtje van sleutels vertelt hoe de vorm van de bijbehorende boom is. Wat is bijvoorbeeld de boom die hoort bij het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36? Dit gaat als volgt. De boom heeft takken die we als streepjes voorstellen, en vertakkingspunten die we als rondjes voorstellen. De sleutels worden in de vertakkingspunten gezet. Er is een bijzonder vertakkingspunt: *de wortel*. Hierin wordt de eerste sleutel gezet, de sleutel die vooraan staat in het rijtje. Dus voor het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36 begint de boom met:

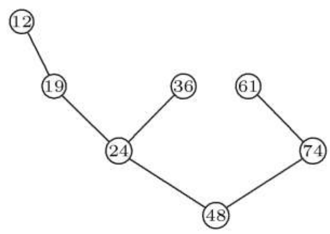
De eerste sleutel, 48, is in de wortel gezet. Nu pakken we de tweede sleutel, 74. Omdat 74 groter is dan 48 gaat de boom naar rechts omhoog: er komt een tak uit de wortel die naar rechts groeit, en sleutel 74 wordt in het nieuwe vertakkingspunt gezet:



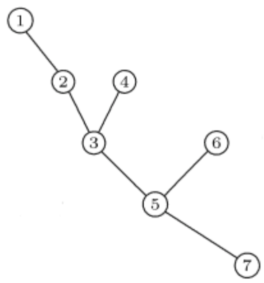
De derde sleutel is 61. Deze komt binnen bij de wortel, en gaat naar rechts omdat hij groter is dan de 48 die in de wortel staat. Vervolgens gaat hij naar links omhoog, omdat hij kleiner is dan de 74 die in het vertakkingspunt staat:



Als we zo doorgaan ontstaat de volgende boom met sleutels:



De vaste regel die gebruikt is luidt: "Als groter, dan naar rechts, als kleiner dan naar links, tot je een vrije plek vindt.” Merk op dat de precieze waarden van de sleutels er niet toe doen: in plaats van het rijtje $48, 74, 61, 24, 19, 12, 36$ hadden we ook het rijtje $5, 7, 6, 3, 2, 1, 4$ kunnen nemen – de boom had precies dezelfde vorm gekregen. Om te oefenen: maak de boom die bij het rijtje 7, 5, 6, 3, 2, 1, 4 hoort. Antwoord:



Bij de opgaven die hier onder volgen, speelt een interessante eigenschap van een boom de hoofdrol, namelijk zijn hoogte. Een boom die alleen uit een wortel bestaat heeft hoogte 0. De boom die hoort bij de oefening hierboven heeft hoogte 4.

Bedenk een rijtje met zeven sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 6 heeft, en een rijtje met zeven sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 2 heeft.

Merk op dat er verschillende rijtjes zijn die tot dezelfde boom leiden. We maken de bomen stochastisch door uniform te trekken uit de mogelijke permutaties van rijtjes van n sleutels. Dan wordt de hoogte H_n van de boom een stochastische variabele. Bijvoorbeeld: $P(H_3 = 1) = \frac{1}{3}$ en $P(H_3 = 2) = \frac{2}{3}$ (ga na!).

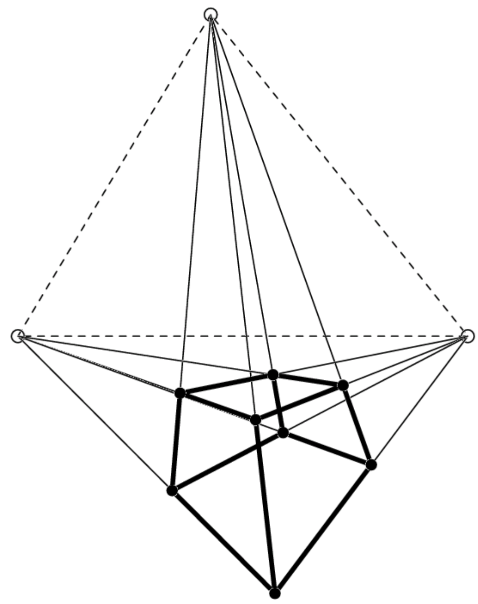
Bewijs, door afschatten zonder $P(H_n = n-1)$ uit te rekenen, dat $P(H_n = n-1) \to 0$ als $n \to \infty$.
Bereken $P(H_n = n-1)$.

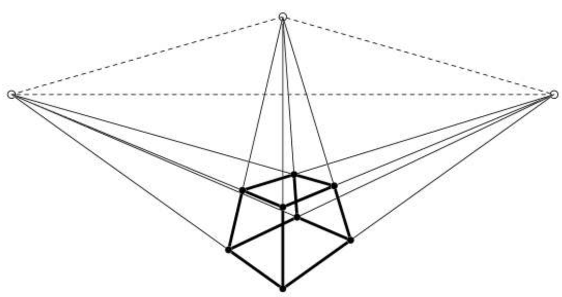
Nogal verrassend is het volgende. Met behulp van de moderne kansrekening kan aangetoond worden dat als $n \to \infty$, dan hebben bijna alle bomen die door die rijtjes gemaakt worden min of meer dezelfde vorm hebben.

Wat denk je: zal die vorm zijn ‘iel en nogal hoog’, of is die vorm ‘compact en nogal laag’? (Je kunt deze vraag nog goed gemotiveerd beantwoorden door een ‘hoger’ standpunt in te nemen).

Verdwijnpunten *(F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen)*
We beschouwen perspectivische afbeeldingen van rechthoekige blokken op een plat vlak V. Een rechthoekig blok is een begrensd deel van de driedimensionale ruimte dat begrensd wordt door zes zijden die twee aan twee evenwijdig zijn en verder loodrecht op elkaar staan; de lijnen waar de zijden elkaar ontmoeten noemen we de ribben. Deze zijn dus vier aan vier evenwijdig en verder loodrecht. Een perspectivische afbeelding van zo’n rechthoekig blok C op een vlak V is een projectie van de ribben van C, vanuit een punt P buiten V, op het vlak V. We nemen voor de eenvoud aan dat geen van de ribben van C evenwijdig is aan V. In V hebben we dan drie verdwijnpunten. Deze worden als volgt gedefinieerd: de ribben van C zijn vier aan vier evenwijdig. De projecties van zo’n viertal geeft lijnsegmenten in V die, bij verlenging, door één punt gaan. Dat punt noemt men het (bij de richting van die ribben horende) verdwijnpunt. Op die manier zijn er dus drie verdwijnpunten behorende bij de drie loodrechte richtingen van de ribben van C.

In Figuur 1 geven we zo’n perspectivische projectie met z’n verdwijnpunten. Figuur 2 is in principe op dezelfde manier geconstrueerd, maar nu kan het resultaat niet verkregen worden als de perspectivische projectie van een rechthoekig blok. In onderstaande figuren geldt:
– Verdwijnpunten zijn aangegeven met $\circ$.
– De projecties van de ribben zijn dik getekend
– De verlengingen tot de verdwijnpunten zijn dun getekend





Laat zien dat zo’n plaatje afkomstig is van de projectie van een rechthoekige balk dan en slechts dan als de driehoek gevormd door de verdwijnpunten alleen scherpe hoeken heeft.

Saaie afbeeldingen *(J.G.M. Donkers, TU Eindhoven)*
Laat S een eindige verzameling zijn met m elementen. Voor een afbeelding $f : S \to S$ bekijken we de samengestelde afbeeldingen $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f(f(x)))$, enz. Een afbeelding f heet saai als er een n is zodat $f^n = f^{n+1}$.

Bepaal het aantal saaie f’s (als functie van m).

Kansrekening en Stochastiek *(A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit)*
Om de genealogische relatie tussen verschillende individuen te simuleren, wordt vaak gebruik gemaakt van Hoppe's urn model. Deze opgave gaat over dit urn model. Op tijdstip 0 bevat een vaas 1 zwarte bal met massa $\theta > 0$. Op elk volgend tijdstip bevat de vaas 1 zwarte bal met massa θ en een aantal gekleurde ballen met massa 1. Op elk tijdstip trekken we een bal met kansen proportioneel met haar massa. Als we een gekleurde bal trekken, dan doen we die bal, plus een nieuwe bal van dezelfde kleur terug in de vaas. Als we de zwarte bal trekken, dan doen we die weer terug, plus een bal met een geheel nieuwe kleur. Op tijdstip n bevat de vaas dus n gekleurde ballen plus de zwarte bal. Laat nu K_n het aantal kleuren zijn op tijdstip n.

Laat zien dat

$$\frac{\mathrm{E}(K_n)}{\theta \ln(n)} \to 1,$$

als $n \to \infty$. Hierbij stelt $E(K_n)$ de verwachting van K_n voor en laat zien dat

$$\frac{\mathrm{Var}(K_n)}{\theta \ln(n)} \to 1,$$

als $n \to \infty$, waarbij $\mathrm{Var}(K_n)$ de variantie van K_n voorstelt.

Laat nu $A_{k,n}$ het aantal kleuren zijn dat k keer voorkomt, op tijdstip n. Als we op tijdstip 5 bijvoorbeeld drie rode en twee gele ballen hebben, dan is $A_{2,5} = 1$ en $A_{3,5} = 1$. Merk op dat $\sum_{k=1}^{n} kA_{k,n} = n$.

Bewijs met volledige inductie naar n dat

$$P(A_{1,n} = a_1, \ldots, A_{n,n} = a_n) = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\theta/j)^{a_j}}{a_j!},$$

waarbij $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)$.

We kunnen de beschrijving van Hoppe's model verbinden met permutaties. Elke realisatie koppelen we aan een permutatie van $1, 2, \ldots, n$, genoteerd in haar cyclische decompositie. Hiertoe nummeren we de gekleurde ballen in de volgorde waarin ze in de vaas terechtkomen. Wanneer we nu de zwarte bal trekken, dan beginnen we een nieuwe cykel. Wanneer de k-de kleur bepaald wordt door bal j te kiezen, dan voegen we nummer k in links van nummer j. Ter verduidelijking geven we een voorbeeld. Stel we maken 5 stappen waarbij op de tijdstippen 1, 2, en 4 de zwarte bal wordt gekozen, en waarbij op de tijdstippen 3 en 5 de bal met nummer 2 wordt gekozen. Dit leidt tot de volgende serie:

$$\begin{aligned}
(1)\\
(1)(2)\\
(1)(32)\\
(1)(32)(4)\\
(1)(352)(4)
\end{aligned}$$

Laat zien dat de kans op bovenstaande realisatie gelijk is aan $\theta^3/\theta_{(5)}$. Laat zien dat

$$P(K_n = k) = \frac{\theta^k}{\theta_{(n)} \cdot S_{k,n}},$$

waarbij $S_{k,n}$ het aantal permutaties van $\{1, 2, ..., n\}$ voorstelt met precies k cykels.

Stel nu dat θ onbekend is, en dat we deze willen schatten op basis van de observatie dat $K_n = k$. We kunnen dat doen door die θ te zoeken die $P(K_n = k)$ maximaliseert. (Dit is de 'methode van de meest aannemelijke schatter'.)

Laat zien dat dit voor $k < n$ leidt tot de waarde van die voldoet aan

$$k = \frac{\theta}{\theta} + \frac{\theta}{\theta+1} + \cdots + \frac{\theta}{\theta+n-1}$$

Veronderstel nu dat we behalve K_n ook $(A_{1,n}, \ldots, A_{n,n})$ observeren. We willen deze informatie gebruiken voor het schatten van θ. We kunnen dezelfde methode van de meest aannemelijke schatter gebruiken.

Laat zien dat dit tot dezelfde schatting als in het vorige onderdeel leidt.