illustratie: Rye Tajiri

Hans Finkelnberg
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
hfinkelberg@math.leidenuniv.nl

Promotionele activiteiten op de Universiteit Leiden

Te moeilijk? Welnee!

Ook in Leiden worden allerlei promotionele activiteiten ontplooid om vwo-ers te betrekken bij universitaire wiskunde. Het belangrijkste jaarlijkse project van de Universiteit aan Leiden is de zogenaamde Masterclass-Praktische-Opdracht waar leerlingen van de bovenbouw van het vwo drie dagen naar het Mathematisch Instituut komen om diep in te gaan op een stuk wiskundetheorie. De colleges worden gegeven door Hans Finkelnberg. Naast zijn werk als docent aan de universiteit werkt hij bij een bedrijf dat roosters maakt voor grote scholen en instellingen. Eerder deed hij ruime ervaring op als docent wiskunde aan een middelbare school.

Sinds 1998 wordt ieder voorjaar op het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden een masterclass georganiseerd (later Masterclass-Praktische-Opdracht genoemd) voor scholieren uit de bovenbouw van het vwo. Doel hiervan is zoals gebruikelijk met dit soort activiteiten: de contacten met het voortgezet onderwijs verbeteren in deze tijd waarin de belangstelling voor bètastudies steeds meer afneemt.

Nu is het de ervaring van de auteur (die zelf ook jarenlang voor de klas heeft gestaan) dat hoe gemakkelijker je het maakt voor de leerling, hoe lager je het niveau instelt, hoe luier en ongeïnteresseerder de leerling wordt. Om dit wegzak-effect tegen te gaan, wordt de lat op de Master-PO inhoudelijk op een hoog niveau gelegd. Zo zijn in het verleden onderwerpen aan bod gekomen als complexe analyse, projectieve meetkunde, coderingstheorie en algebraïsche topologie. Het onderwerp van het seizoen 2004–2005 was *verzamelingenleer*.

Verzamelingenleer

Het onderwerp *verzamelingenleer* is een geschikt onderwerp omdat het aan drie voorwaarden voldoet:

1. Er is weinig of geen voorkennis voor nodig.
2. Bij de behandeling van dit onderwerp komen de deelnemers in aanraking met wezenlijke concepten van de wiskunde, zowel vakinhoudelijk als ook de manier waarop wiskunde op de universiteit wordt bedreven.
3. Het onderwerp is in verschillende etappes/deelonderwerpen te behandelen.

Dit laatste punt maakt het mogelijk tijdens de Master-PO regelmatig een nieuw onderwerp aan te snijden. Heel belangrijk om deelnemers die een bepaald stuk even niet meer begrijpen de gelegenheid te geven opnieuw in te stappen.

Er is gekozen voor intuïtieve verzamelingenleer, omdat dit heel toegankelijk is voor scholieren. Bovendien kan je ze direct confronteren met de beroemde paradox van Russell:

Paradox van Russell. Zij de verzameling A gedefinieerd door:

$$A = \{V | V \notin V\}$$

Is nu A een element van A of is A geen element van A? Er geldt:

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$, immers: als A wel voldoet aan de voorwaarde om in A te zitten, zit A er niet in.
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$, immers: als A niet voldoet aan de voorwaarde om in A te zitten, zit A er wel in.

En we hebben een paradox.

Enkele begrippen uit de verzamelingenleer

Definitie 1. *Zij X een niet lege verzameling. Een* relatie *R* op *X is een deelverzameling van het cartesisch produkt van X met zichzelf:*

$$R \subset X \times X$$

Notatie: als $(a, b) \in R$*, dan noteren we dit als:* aRb.

Definitie 2. *Een relatie R op X heet een* partiële ordening op *X als geldt:*
- $\forall a \in X : aRa$
- $\{aRb \wedge bRa\} \Leftrightarrow a = b$
- $\{aRb \wedge bRc\} \Rightarrow aRc$

Veelgebruikte notaties voor aRb (ingeval van een partiële ordening) zijn:
- $a \leq b$
- $a \preceq b$
- $a \sqsubseteq b$

Een belangrijk voorbeeld van partiele ordening is die van de inclusierelatie op de machtsverzameling van een (niet lege) verzameling X:

Voorbeeld 1. Zij X een niet lege verzameling met machtsverzameling $\wp(X)$. De relatie $\subseteq$ op $\wp(X)$ gedefinieerd door:

$$U \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq_{inclusie} V$$

is een partiële ordening op $\wp(X)$.

Definitie 3. *Een partiële ordening* $\preceq$ *op X heet een* lineaire ordening *als geldt:*

$$\forall a \in X : \forall b \in X : a = b \vee a \preceq b \vee b \preceq a$$

Definitie 4. *Een lineaire ordening* $\preceq$ *op X heet een* welordening *als iedere niet lege deelverzameling van X een kleinste element heeft:*

$$\forall U_{\neq \emptyset} \subset X : \exists a \in U : \forall b \in U : a \preceq b$$

Merk op dat dit kleinste element automatisch uniek is.

Definitie 5. *Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening* $\preceq$*. Een deelverzameling* $K \subset X$ *heet een* keten *als de restrictie van* $\preceq$ *tot K een lineaire ordening op K oplevert.*

Definitie 6. *Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening* $\preceq$ *en zij* $U \subset X$ *een deelverzameling. Een element* $b \in X$ *heet een* bovengrens van *U als geldt:*

$$\forall x \in U : x \preceq b$$

Definitie 7. *Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening* $\preceq$*. Een element* $M \in X$ *heet een* maximaal element *van X, als geldt:*

$$\forall x \in X : x \preceq M$$

Merk op dat een maximaal element altijd uniek is.

Definitie 8. *Zij X een verzameling voorzien van een lineaire ordening* $\preceq$*. Een deelverzameling* $U \in X$ *heet een* beginstuk van *X, als het volgende geldt:*

$$\forall b \notin U : \forall a \in U : a \preceq b$$

Definitie 9. *Zij X een verzameling voorzien van een welordening* $\preceq$ *en zij* $U_{\neq X} \subset X$ *een beginstuk van X. De* direkte opvolger van *U is dan het kleinste element van het complement van U in X. Notatie:* U^+.

De manier om aan deze paradox te ontsnappen is natuurlijk de axiomatische opbouw van de verzamelingenleer en in het bijzonder het regulariteits-axioma van Zermelo en Fraenkel. Dit is op de Master-PO niet gedaan. De Russellparadox is behandeld om de deelnemers alert te maken en ze het gevoel te geven dat er meer aan de hand is. Zodra ze de paradox doorzien, zijn ze klaar voor het *echte* werk.

De beoogde onderwerpen van de Master-PO en dit artikel

Het beoogde doel van de Master-PO was het begrijpen en bewijzen van de gelijkwaardigheid tussen de volgende drie fundamentele uitspraken:
- Het Keuzeaxioma,
- Het Lemma van Zorn,
- De Welordeningsstelling van Zermelo.

Op een bijna Japans-filosofische manier gaat het hierbij nog niet eens zozeer om deze eindresultaten als wel om de weg er naar toe. Om deze drie onderwerpen überhaupt te kunnen bespreken is er namelijk een heel bouwwerk van definities en stellingen nodig. Het is juist het opbouwen van deze theorie dat zo leerzaam en vooral leuk is voor de deelnemers (en de docent!).

In dit artikel zal ik een deel van de behandelde wiskunde uiteenzetten dat representatief is voor het niveau en de sfeer van de Master-PO. Ik heb hierbij gekozen voor feit dat volledige inductie met verzamelingen van *willekeurige kardinalteit* mogelijk is bij acceptatie van het keuzeaxioma.

Om bovenstaande te kunnen uitvoeren worden de definities in het kader geïntroduceerd en aan de hand van voorbeelden uitgebreid besproken. Met deze definities kunnen we de belangrijke uitspraken van de Master-PO formuleren:

Het Keuzeaxioma, Zorn en Zermelo

Voor het formuleren van het keuzeaxioma is in principe een gering begrippenkader nodig. Het axioma kent een aantal verschillende equivalente formuleringen. Op de Master-PO is de volgende formulering gegeven:

Keuzeaxioma 1. *Zij A een niet lege verzameling en zij* $\wp(A)$ *de machtsverzameling van A (dat is: de verzameling van alle deelverzamelingen van A). Dan bestaat er een afbeelding, de zogenaamde keuzefunctie, k:*

$$k : \wp(A)^* \to A$$

met de eigenschap:

$$\forall U \in \wp(A)^* : k(U) \in U.$$

Hierin is $\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Hier wordt natuurlijk een en ander onder tafel geveegd: wat is eigenlijk een *verzameling* of een *afbeelding*? Doordat ik gekozen had voor intuïtieve verzamelingenleer kon ik me de luxe veroorloven hier een beetje overheen te stappen. We hadden immers maar drie dagen om alles te doen!

Een andere formulering van het keuzeaxioma die we ook gebruikt hebben, is de volgende:

Keuzeaxioma 2. *Zij A en B twee niet lege veramelingen en zij $f : A \to B$ een surjectie, dan:*

$$\exists g : B \to A$$

met de eigenschap:

$$f \circ g = id_B.$$

Merk op dat g automatisch injectief is!

De deelnemers hadden bij het keuzeaxioma eigenlijk wel een beetje het gevoel van "Waarom doen we zo moeilijk? Het is toch duidelijk dat we bij iedere niet-lege deelverzameling dús een punt kunnen kiezen?". Een begrijpelijke reactie. Het antwoord op deze reactie werd eigenlijk gevormd door de totale Master-PO. Na afloop was het de deelnemers volkomen duidelijk geworden dat hier veel meer aan de hand is, dan ze aan het begin hadden kunnen (laat staan durven) vermoeden en dat het wel degelijk noodzakelijk is zo moeilijk te doen over het keuzeaxioma.

Lemma van Zorn. *Zij X een verzameling (niet leeg) voorzien van een partiële ordening $\preceq$. Als geldt dat iedere keten in X een bovengrens heeft, dan heeft X een maximaal element.*

Stelling 1. Welordeningsstelling van Zermelo. *Zij X een niet lege verzameling. Dan bestaat er op X een welordening.*

Volledige inductie

Bijzonder aan de equivalentie tussen deze drie uitspraken is het feit dat de reacties er op zo verschillend zijn:

- Keuzeaxioma: wordt door velen als vanzelfsprekend geaccepteerd.
- Zorn: wordt door velen ervaren als een handige technische tool.
- Zermelo: ik weet niet hoe anderen er op reageren, maar mijn reactie bestond alleen maar uit ongeloof! Eén van de gevolgen hiervan is namelijk het kunnen toepassen van volledige inductie op $\mathbf{R}$, $\wp(\mathbf{R})$ of welke kardinaliteit dan ook en niet alleen die van $\mathbf{N}$!

De wiskunde van de Master-PO die hier in dit artikel wordt behandeld is het bewijs van de volgende stelling:

Stelling 2. (Onder aanname van het keuzeaxioma!) *Zij X en Y twee verzamelingen. Dan bestaat er een injectieve afbeelding van X naar Y of omgekeerd (of allebei natuurlijk, dan zijn de verzamelingen gelijkmachtig).*

De gevallen waarbij X of Y leeg is, zijn triviaal. Het bijzondere aan het bewijs is het feit dat het gebruik maakt van volledige inductie met willekeurige kardinaliteit.

Bewijs. In dit bewijs wordt het keuzeaxioma geaccepteerd, waarmee in het bijzonder de welordeningsstelling van Zermelo geldt. Zij X en Y twee verzamelingen, beide niet leeg. Te bewijzen: in minstens één richting bestaat er een injectieve afbeelding. Dit tonen we aan door aan te tonen dat er altijd van X naar Y een injectie of een surjectie bestaat. Als er een injectie bestaat, zijn we klaar. Als er een surjectie bestaat, bestaat er volgens het keuzeaxioma (tweede variant) een injectie van Y naar X.

We voorzien X van een welordening $\preceq$ die volgens Zermelo bestaat daar we het keuzeaxioma accepteren. We voorzien Y van een keuzefunctie $k : \wp(Y)^* \to Y$.

We definiëren een afbeelding $f : \tilde{X} \to Y$ voor zekere $\tilde{X} \subset X$ met inductie:

- Zij $a \in X$ het kleinste element van X. Dan is $f(a) = k(Y) \in Y$
- Zij $U \subset X$ een beginstuk van X zodanig dat f op U gedefinieerd is. Als $U \neq X$ en $f(U) \neq Y$, dan is $f(U^+) = k(Y \setminus f(U))$

Laten we, vóórdat we het bewijs netjes afmaken, kort in woorden omschrijven wat hier gebeurt, net zoals op de Master-PO. Aan de éne kant kregen de deelnemers de nette en strakke formuleringen van definities en stellingen op hun bord, aan de andere kant werd veel aandacht besteed aan wat nu eigenlijk de ideeën achter deze zaken waren. Wat gebeurt er nu eigenlijk?

Allereerst definiëren we f voor een startwaarde: het kleinste element van X. In de tweede stap breiden we f uit, zodra we f kennen op een beginstuk. In het bijzonder is $\{a\}$ een beginstuk! Maar dat betekent dat we met de tweede stap f definiëren voor het kleinste element dat groter is dan a, tenzij er geen grotere bestaat. In dat geval hebben we een injectie van X naar Y en zijn we klaar. Deze *direkte opvolger* (als die dus bestaat) wordt aangeduid met a^+. Nu is f dus gedefinieerd op $\{a, a^+\}$. Echter, $\{a, a^+\}$ is óók weer een beginstuk, dus f is welgedefinieerd op $\{a, a^+, a^{++}\}$ (onder voorwaarde dat a^{++} bestaat; zo niet, zijn we weer klaar) en wel als volgt:

- $f(a) = k(Y)$
- $f(a^+) = k(Y \setminus \{f(a)\})$ Merk op dat $f(a) \neq f(a^+)$. Dus f is op dit beginstuk injectief!
- $f(a^{++}) = k(Y \setminus \{f(a), f(a^+)\})$ Merk op dat f op dit beginstuk weer injectief is!

Hiermee zien we dus f gedefinieerd zijn op een eindige of aftelbaar aantal opvolgers ($\{a, a^+, a^{++}, \ldots\}$) van a. Echter, deze verzameling van opvolgers is op zijn beurt weer een beginstuk die, als het nog niet de hele X is, een direkte opvolger heeft ...waarmee f weer verder gedefinieerd kan worden ..., enzovoorts. De verzameling $\tilde{X} \subset X$ is niets anders dan het domein D_f van f.

Bewering 1. De afbeelding f is injectief.

Het is een aardige opgave dit na te gaan.

Bewering 2. Als f niet surjectief is, is $\tilde{X} = X$.

Stel namelijk dat f niet surjectief is en het domein $D_f = \tilde{X}$ van f is niet de hele X. Beschouw:

$$V = \{x \in X : x \notin D_f\}.$$

Zij nu m het kleinste element van V. Deze bestaat, omdat we een welordening hebben! Beschouw nu P_m:

$$P_m = \{x \in X : x \preceq m \wedge x \neq m\}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat P_m een beginstuk is van X waar bovendien f op gedefinieerd is (m was immers het kleinste element waar f niet voor gedefinieerd was!). Bovendien is $f(P_m) \neq$

Y, omdat f op D_f al niet surjectief was. Maar dan is $f(m)$ wél gedefinieerd: $f(m) = k(Y \setminus f(P_m))$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $m \notin D_f$. Conclusie: f is gedefinieerd op heel X.
We weten nu echter het volgende:
– f is injectief op zijn domein $D_f = \tilde{X}$,
– $D_f = X \vee f(X) = Y$.
Waarmee de stelling is bewezen. Immers, als $D_f = X$, hebben we een injectie van X naar Y en anders hebben we een surjectie van X naar Y hetgeen ons middels het keuzeaxioma een injectie van Y naar X oplevert.
Q.E.D. (door velen abusievelijk gezien als de afkorting van een Latijnse spreuk, maar kenners weten dat dit staat voor Quite Easily Done!)

Te moeilijk?
Als ik aan collega's vertel wat voor soort wiskunde ik behandel op de Master-PO, krijg ik vaak de vraag of dat niet veel te moeilijk is. Mijn antwoord hierop is een volmondig *nee*.

Waarom zou bijvoorbeeld de wiskunde die ik hierboven behandeld heb, te moeilijk zijn voor scholieren? Omdat het 'nog maar scholieren' zijn? Onzin! Natuurlijk is deze wiskunde veel en veel te moeilijk voor de meeste leerlingen (en tegenwoordig helaas ook voor sommige docenten), maar die komen niet naar een Master-PO. Ik stel dat deelnemers aan een Master-PO, die pretendeert universitaire wiskunde te behandelen, er *recht* op hebben wiskunde te krijgen die moeilijk is, erg moeilijk en soms voor sommige deelnemers *te* moeilijk! Eindelijk krijgen ze iets waar ze écht voor en over moeten nadenken. Het is mijn ervaring dat ze verbijsterend veel aan kunnen. Ze zijn gemotiveerd, hebben er plezier in en hebben een heel behoorlijke aanleg voor wiskunde. Wat wil je nog meer? OK, het is niet zo, dat ze de volgende dag het verhaal na kunnen vertellen. Daar is een langdurig proces voor nodig dat *studeren* heet. Maar tijdens de behandeling van de stof hebben álle deelnemers bovenstaand bewijs kunnen volgen! Na afloop van de Master-PO gaan de deelnemers dan ook altijd zeer goed gehumeurd terug naar huis.

Of ze dan naar aanleiding van de Master-PO besluiten om wel of geen wiskunde te gaan studeren, vind ik op zich wel interessant, maar het is niet mijn doelstelling 'zieltjes te winnen'. Ik wil met de Master-PO bereiken dat ze in ieder geval een goéde beslissing kunnen nemen op inhoudelijke gronden. Daar kunnen ze dan over nadenken bij de eerstvolgende wiskundeles, als de docent voor de $\aleph_0$-ste keer de abc-formule uitlegt. Hebben ze eindelijk iets te doen tijdens de wiskundeles.