



Foto: Andrew Dunn; copyright: Creative Commons

Klaas Landsman

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1

6525 ED Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Inaugurele rede

Op het kruispunt

Volgens Klaas Landsman zijn een aantal belangrijke doorbraken in de wiskundige analyse ontstaan uit de kruisbestuiving tussen wiskunde en natuurkunde. De centrale rol is natuurlijk vervuld door Isaac Newton, Lucasian professor in Cambridge van 1669 tot 1687. Newton heeft voor Landman ook een grote persoonlijke betekenis, zoals blijkt uit deze oratie. Hij sprak deze uit op 7 januari 2005 bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar Analyse aan de Radboud Universiteit Nijmegen.

“In het intellectuele en politieke debat waren cultuurverschillen lange tijd verboden terrein. Vooral linkse denkers hadden er moeite mee. [...] Een individu [werd] voorzien van een sticker op zijn voorhoofd die hem reduceer[de] tot een aantal onveranderlijke eigenschappen. Dat laatste [...] werd gezien als determinisme. De Nederlanders [hadden] net afgerekend met de calvinistische voorbestemming. Ze wil[d]en daarom geen culturele voorbestemming.”

Dit was een citaat uit een recent krantenartikel over de multiculturele samenleving¹, en u zult zich nu afvragen of u wel bij de juiste oratie terecht bent gekomen. Dat is het geval, want ik ga u straks onder meer uitleggen wat wiskundige analyse met determinisme te maken heeft. Maar ik zal u eerst aan de hand van haar historische ontwikkeling vertellen wat het vak analyse zelf eigenlijk inhoudt. Ook daarin zullen opmerkelijke cultuurverschillen naar voren treden, zelfs binnen de wiskunde. De ontwikkeling van de analyse begon 4500 jaar geleden, maar omdat ik slechts 45 minu-

ten de tijd heb, zal ik me beperken tot drie momenten uit de geschiedenis.² Dit zijn: de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening door Isaac Newton (1642–1727) rond 1670; vervolgens bijna tweehonderd jaar later het idee van Bernhard Riemann (1826–1866) om niet naar één functie op zichzelf te kijken, zoals analytici voor hem hadden gedaan, maar naar een heleboel functies tegelijk en in samenhang met elkaar; en tenslotte de ultieme realisatie van dit idee rond 1930 in de vorm van een zogenaamde Hilbertruimte. Ondanks deze naam was dit niet het werk van Hilbert, maar van diens toenmalige assistent Johann von Neumann (1903–1957).

Het is geen toeval dat ik juist déze doorbraken in de analyse heb genomen, want ze vonden alle drie plaats op een historisch kruispunt van de wiskunde en de natuurkunde, de twee vakken waar ik alsmaar niet tussen kan kiezen. Het eerste kruispunt is het vrijwel gelijktijdige ontstaan van de klassieke mechanica en de klassieke analyse, waarvan de differentiaal- en integraalrekening het begin vormt. Het tweede is de kruisbestuiving tussen de opkomende veldentheorie in de natuurkunde en de generalisatie van het begrip

ruimte in de wiskunde. Ten derde kruisten de kwantummechanica en de moderne analyse elkaar voor het eerst tussen 1925 en 1932.

Isaac Newton

Ik begin bij het eerste kruispunt, dat in één persoon was geconcentreerd. Newton was volgens velen de grootste wiskundige uit de geschiedenis, een eer die ook Archimedes (287–212 v.Chr.) en Gauss (1777–1855) soms wordt toebedeeld. Daarnaast was Newton niet alleen de vader van de theoretische natuurkunde, maar tot op heden ook haar briljantste beoefenaar, hoogstens geëvenaard door Einstein. Voor sommigen onder u is dat misschien één pot nat, maar ik kan u zeggen dat zelfs theoretische natuurkunde een duidelijk ander metier is dan wiskunde. Einstein hield daar bijvoorbeeld zijn leven lang moeite mee, om nog maar te zwijgen van iemand als Bohr, die zelfs de eenvoudigste integralen niet kon uitrekenen. Aan de andere kant kunnen de paar wiskundigen van Newtons kaliber zich als fysicus weer bij lange na niet met hem meten. In deze combinatie van absolute genialiteit in zowel de wiskunde als de natuurkunde is Newton uniek in de menselijke geschiedenis. Bovendien had hij geen twee linkerhanden: Newton was ook een groot experimentator en uitvinder, met name op het gebied van de optica. Hij ontdekte bijvoorbeeld de spectrale decompositie van wit licht, dat, tot ieders verrassing destijds, alle kleuren van de regenboog bleek te bevatten.

Figuur 1 Standbeeld van Isaac Newton in de Trinity College kapel te Cambridge

Tevens bouwde Newton de eerste spiegeltelescoop, en vond hij het sextant uit.

U begrijpt dat ik hoog inzet; ik ben zonder meer het slachtoffer van de mentaliteit die Van Kooten en De Bie bespotten in hun prachtige lied: *Onze God is de beste* (hij is wereldkampioen). En met het loven van Newton prijs ik uiteraard ook mijn vakgebied de hemel in, want daarvan was hij de grondlegger. Maar het is moeilijk aan deze heiligenverering te ontkomen. Zelfs de nuchtere Nederlandse wetenschapshistoricus Dijksterhuis schreef in zijn *Mechanisering van het Wereldbeeld* dat Newtons natuurkundige werk "eerst ten koste van een ontzaglijke geestesinspanning heeft kunnen worden gedaan, en één van de hoogtepunten in de geschiedenis van het menselijk denken beduidt." Ook de auteur van een marxistisch boekje over de geschiedenis van de wiskunde uit de toenmalige DDR kon, na er fijntjes op te hebben gewezen dat Newton zoon was van een grondbezitter, niet om de vaststelling heen dat Newtons wiskundige werk "eine der bewundernswertesten geistigen Leistungen in der Menschheitsgeschichte" is. Met dergelijke lofuitingen, zowel van mensen die het wel als die het niet konden weten, zijn pagina's te vullen.

Wie mijn boek *Requiem voor Newton* leest, zal zien dat Newton een van de belangrijkste personen in mijn leven is: in verstrooide buien spreek ik bijvoorbeeld mijn zoontje Julius vaak met Isaac aan. De reden daarvoor is niet zozeer van wetenschappelijke, maar van emotionele aard. Toen ik namelijk op zondag 1 oktober 1989 als pas gepromoveerd postdoc aankwam in Cambridge, kende ik daar geen hond, en werd ik ook door niemand ontvangen, laat staan welkom geheten. Tot overmaat van ramp bleek ook de stekker van mijn geluidsinstallatie niet in het Engelse stopcontact te passen, zodat ik mij niet door de muziek van Beethoven of *The Beach Boys* kon laten opvrolijken. Op dat moment overviel mij een existentiële crisis van een intensiteit die ik niet eerder had meegemaakt.

Daaruit heeft Newton mij gered. Ik wist dat in de kapel van Trinity College, het instituut waaraan Newton vijfendertig jaar lang verbonden was, een standbeeld van hem stond. Ik liep daar naartoe, en bleek ook in deze kapel alleen te zijn. Dat wil zeggen, ik bevond mij in gezelschap van de op ware grootte in marmer afgebeelde, maar op een fors voetstuk geplaatste Newton. Het opschrift van dit voetstuk, namelijk "Newton: Qui genus humanum ingenio superavit" (wat zo iets betekent als: "Newton, die de mensheid met zijn genie heeft overtroffen") droeg bij tot mijn

gevoel van algehele nietigheid. Maar toch is Newton toen, in de uren die ik zwijgend met hem in de kapel doorbracht, voor mij een levende realiteit geworden, in plaats van een dode figuur uit de encyclopedie. Ik kon in ieder geval weer verder.

Het begin van de klassieke analyse

Deze overweging moest mij even van het hart, maar ik zal verder een nuchtere toon aanslaan. Zo wordt het hoog tijd om te vertellen wat nu precies Newtons bijdrage aan de analyse was.³ Ik zal die eerst in één zin samenvatten: Newton zag in dat een groot aantal alledaagse wiskundige problemen die al sinds de oudheid werden bestudeerd, zoals de bepaling van lengtes, oppervlakten, volumes, minima en maxima, en snelheden, konden worden opgelost met behulp van twee technieken die hij zelf uitvond, namelijk integratie en differentiatie, compleet met het verbluffende inzicht dat deze operaties de inverse van elkaar zijn.⁴ Dat was een lange zin, maar die beschrijft dan ook een wiskundige synthese zonder weerga. Newton verbond die bovendien met een groot arsenaal aan praktische methoden om de integralen en afgeleiden die hij tegenkwam ook daadwerkelijk uit te rekenen. De belangrijkste voorbeelden daarvan zijn oneindige reeksen, zoals het terecht naar hem genoemde binomium, maar ook de ten onrechte niet naar Newton genoemde Taylorreeks,⁵ en verder allerlei approximatie- en interpolatiemethoden. Wat de laatste betreft ging hij zonder hulp van zelfs maar een rekenliniaal met een precisie te werk waar de hedendaagse wiskundige nog niet met een supercomputer aankomt: Newton controleerde zijn formules soms tot zestig decimalen.

Moderne analytici hebben het niet vaak over Newton, gedeeltelijk wellicht uit een gebrek aan historisch besef, maar vooral omdat het al sinds de achttiende eeuw in zwang is om te denken dat het wiskundige werk van Newton niet rigoureuus zou zijn, en daarmee in feite geen wiskunde is. De aanval op Newton werd in 1734 gelanceerd door de Ierse Bisschop George Berkeley (1685–1753),⁶ die daarmee wilde aantonen dat de grondslagen van de wiskunde niet solider waren dan die van het geloof. Zijn kritiek richtte zich met name op het gebruik van infinitesimalen ofwel oneindig kleine grootheden, waarmee Newton zijn resultaten inderdaad in eerste instantie rechtvaardigde.⁷

Het is waar dat Newton veel van zijn wiskundige werk niet in de ook toen gebruikelijke vorm van definities, axioma's, stellingen, en bewijzen presenteerde, maar de voorkeur

gaf aan de behandeling van talloze voorbeelden. Die pakte hij dan met behulp van differentiatie of integratie aan, zonder deze methode zelf duidelijk te beschrijven (zoals Leibniz, die ten onrechte wordt beschouwd als de mede-uitvinder van de differentiaal- en integraalrekening,⁸ dat later wel zou doen). Newton wijdde hoogstens af en toe een stukje proza aan zijn algemene methodiek, en ontleende zijn vertrouwen daarin oorspronkelijk niet aan een wiskundige bewijsvoering, maar aan haar interne consistentie en aan numerieke verificaties, die hij zoals gezegd met manische precisie uitvoerde.

Uit alles blijkt dat Newton inderdaad heel intuïtief over de wiskunde dacht, en daarbij vooral het oog van een fysicus had. Dat was ook de sleutel tot zijn succes. Wat wij nu al op de middelbare school als het eenvoudigste type functie bestuderen, van \mathbf{R} naar \mathbf{R} dus, was voor Newton een deeltje dat zich in het platte vlak bewoog. Een functie van twee variabelen beschouwde Newton als een lijn die door de drie-dimensionale ruimte bewoog, waarmee hij zich zowaar als de eerste stringtheoreticus manifesteerde. In vrijwel al zijn beschouwingen speelt de tijd een rol, en juist dat perspectief leidde hem tot zijn belangrijkste inzichten. Waar Leibniz een integraal bijvoorbeeld als een statische grootheid zag, vroeg Newton zich af hoe het oppervlak onder de baan van het deeltje van het eindpunt afhing. Zo kwam hij via een dynamisch argument tot de hoofdstelling van de calculus, die in moderne terminologie stelt dat de afgeleide van de onbepaalde integraal van een functie precies die functie zelf is.

Ondanks dit intuïtieve karakter van Newtons wiskundige werk is de kritiek van Berkeley en anderen volledig misplaatst.⁹ Newton ging er net als wij vanuit dat een wiskundig bewijs moest worden geleverd in de vorm van een waterdicht deductief argument, zoals Euclides dat in zijn *Elementen* had voorgedaan. Newton zou de eerste zijn geweest om te erkennen dat zijn vroege werk niet aan dit criterium voldeed. Maar zoals vrijwel al zijn tijdgenoten maakte hij de merkwaardige denkfout dat, omdat Euclides over meetkunde schreef, een bewijs ook noodzakelijk meetkundig van aard moest zijn.¹⁰ Newton zag het daarom als zijn taak een meetkundig bewijs van zijn rekenmethode te geven, en daarin slaagde hij ook met glans. Hij verving infinitesimalen en andere dubieuze grootheden uit zijn eerdere formulering door begrippen als continuïteit, convergentie, en limiet. Daarmee was hij niet alleen de vader van de analyse, namelijk als ontdekker van de integraal- en differentiaal-

rekening, maar ook haar moeder, want deze begrippen vormen nog steeds de kern van het vak.

Helaas ontging deze kant van Newtons analytische werk destijds ook zijn meest fervente aanhangers. Om de indruk te wekken dat zijn argumenten meetkundig van aard waren, verpakte hij ze in plaatjes in plaats van in formules, wat alom verwarring zaaide, en eigenlijk nu pas op waarde wordt geschat. Maar nog schadelijker was dat Newton de beslissende wiskundige bewijzen verstopte in zijn *Principia* uit 1687, waar ze totaal werden overschaduwd door de natuurkundige inhoud van het boek. Dit werk, voluit genoemd *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, geldt niet zonder reden als het belangrijkste boek uit de geschiedenis van de wetenschap.¹¹ Het is gebaseerd op de drie later naar Newton genoemde bewegingswetten, die bepaald niet voor de hand liggen, en zelfs in strijd lijken met alledaagse waarnemingen. Die geven namelijk eerder aanleiding tot de natuurkunde van Aristoteles, want die man was ook niet gek. En toch wist Newton een groot deel van de toen bekende natuurverschijnselen uit zijn wetten af te leiden. *Principia* beschrijft bijvoorbeeld in groot detail het zonnestelsel, uitgaande van Newtons eigen universele gravitatiewet. Daaruit verklaarde hij niet alleen de empirisch gevonden wetten van Kepler, maar ook alledaagse verschijnselen als eb en vloed.

Slechts de beweging van de maan ging Newtons krachten te boven. Zijn onvermogen dit probleem met de door hem gewenste precisie op te lossen, deed hem na meer dan dertig jaar van onafgebroken intellectuele inspanning besluiten naar een ander beroep dan dat van kamergeleerde uit te zien. Het zij hem gegund. Een held van onze tijd is Arnon Grunberg, die in zijn veelgeprezen debuutroman *Blauwe Maandagen* beschrijft hoe hij al zijn schoolboeken verkocht om al spijbelend op terrasjes in Amsterdam-Zuid samen met zijn vriendinnetje een aperitief genaamd *Dubonnet* te consumeren.

Bernhard Riemann

Ik sluit hiermee de behandeling van het eerste kruispunt tussen wiskunde en natuurkunde af. De eerste grote analyticus na Newton was Leonhard Euler (1707–1783), die als de meest productieve wiskundige aller tijden geldt. Naast ontelbare praktische bijdragen aan de analyse, gaf hij een nieuwe basis aan dit vak door uit te gaan van het begrip functie, in de zin van een variabele die van een andere variabele afhangt.¹² De ontwikkeling van

de analyse na Euler wordt vaak gezien als een uiteindelijk geslaagde zoektocht naar een rigoureuze grondslag van het vak, waarbij in de negentiende eeuw wiskundigen als Cauchy (1789–1857), Dirichlet (1805–1859), en Weierstrass (1815–1897) een hoofdrol zouden hebben gespeeld. Dit streven naar een solide basis speelde inderdaad een rol,¹³ maar hun motivatie lag nog meer in de vraag hoe de analyse, die zijn nut intussen dankzij Newton en Euler wel aangetoond had, het beste onderwezen kon worden.

Zelfs de meest fervente aanhanger van Newton moet namelijk erkennen dat de meester op dat vlak volledig gefaald had; zijn colleges als *Lucasian Professor of Mathematics* in Cambridge waren veel te moeilijk, en werden dan ook niet of nauwelijks bezocht. Dat weerhield Newton er overigens niet van ze altijd te geven; ook als niemand op kwam dagen hield hij zijn verhaal *to the walls*, zoals hij dat zelf uitdrukte.¹⁴ Het genoemde drietal vulde dit vacuüm, en ook het analyse-onderwijs van nu is nog steeds op hun inzichten gebaseerd. Dat is mogelijk de reden dat ik dit onderwijs zelf als buitengewoon saai heb ervaren, omdat precisie wordt ingevoerd op een moment dat de student niet begrijpt welke ideeën er eigenlijk precies worden gemaakt, en waarom dit nodig is. Dat vonden mijn jaargenoten aan de UvA ook, en daarom bleek ik al na een paar weken van het eerste jaar van mijn studie de enige te zijn uit een groep van tachtig die de analyse-colleges nog bezocht.

Dat brengt mij op de persoon die naar mijn mening in de negentiende eeuw de belangrijkste impuls aan de analyse heeft gegeven, want ook deze man zat meestal in zijn eenje in de collegebanken. Ik denk daarom óók vaak aan hem als ik, inmiddels aangeland aan de andere kant van de kathedra, zélf aan een hele klein groep college geef, zoals hier in Nijmegen tot nu toe het geval is geweest. Ik beschouw dat nog steeds als een eer, en het minimum aantal studenten waarbij mijn colleges doorgang vinden is één. (Dus niet nul, zoals bij Newton.) Je kunt namelijk nooit weten of die ene student niet toevallig de nieuwe Riemann is. Dat voor u helaas niet de nieuwe Gauss staat — want dat was de docent die plichtsbewust aan Riemann college bleef geven — heeft te maken met het feit dat de Radboud Universiteit haar ambities nog best wat zou kunnen opschroeven. Bij de top-vier van Nederland horen, wat is dat nou.

Ik zie Riemann als de brug tussen de klassieke en de moderne analyse, en stel daarbij vast dat hij net als Newton bijzonder intuïtief en vanuit de fysica over wiskunde dacht.¹⁵

Naast wiskunde bij Gauss studeerde Riemann in Göttingen ook natuurkunde bij de grote Duitse fysicus Wilhelm Weber (1804–1891), die hij zowel met experimenteel als met theoretisch werk bijstond. Ook Gauss was daar nauw bij betrokken.¹⁶ Op dat moment, rond 1850, zette de natuurkunde haar eerste grote stap voorwaarts sinds Newton dankzij de invoering van het veldbegrip. Dit wordt terecht toegeschreven aan de Britse fysici Faraday, Thomson alias Kelvin en Maxwell, maar de invloed van de Duitse school, die behalve het genoemde drietal uit Göttingen ook Helmholtz en Hertz in Berlijn omvatte, moet niet onderschat worden.¹⁷ Ik zal u hier niet vermoeien met de geschiedenis van de elektrodynamica, die in 1905 door Einstein met zijn speciale relativiteitstheorie tot voltooiing werd gebracht — de belangrijkste reden dat we nu, precies een eeuw later, een *World Year of Physics* hebben.

Kort gezegd bleek dat alle elektrische, magnetische, en optische verschijnselen verklaard konden worden door de aanname dat zich op ieder punt van de ruimte een nieuwe grootte bevond, de elektromagnetische veldsterkte, die krachten op geladen deeltjes uitoefende, en in trilling kon worden gebracht met licht als resultaat. Riemann zag eerder dan Maxwell in, dat de trillingen van het elektromagnetische veld zich met de lichtsnelheid voortplantten, en ontwikkelde bovendien reeds als student de ambitie om ook de zwaartekracht door middel van een veldentheorie te beschrijven, met het uiteindelijke doel een geünificeerde theorie van alle fundamentele natuurverschijnselen op te stellen.¹⁸

Met dit programma was hij zijn tijd ver vooruit, want pas Einstein zou in 1915 met zijn algemene relativiteitstheorie inderdaad een veldentheoretische beschrijving van de zwaartekracht geven, en naar een alomvattende theorie van de natuurkrachten is men nu nog steeds op zoek. Riemann had dan ook zelf geen succes met zijn natuurkundige agenda, maar het is zonneklaar dat de veldentheorie hem er als wiskundige toe bracht op een veel diepere en abstractere manier over het begrip ruimte na te denken dan zijn voorgangers en tijdgenoten. In een veldentheorie is een punt in de ruimte namelijk veel meer dan dat: het is de drager van een bepaalde structuur. Bovendien was Riemann één van de eerste wiskundigen die het ruimtebegrip rigoreus loskoppelde van de driedimensionale ruimte om ons heen.¹⁹ Voor hij op zijn veertigste jaar aan een combinatie van pleuritis en tuberculose stierf, bepaalde Riemann mede daardoor

de agenda voor de moderne wiskunde.

Het bekendste voorbeeld van Riemanns algemenere en abstractere ruimtebegrip is zijn concept van een gekromde ruimte van willekeurige dimensie, dat zestig jaar later de wiskundige basis bleek te vormen van Einsteins algemene relativiteitstheorie.²⁰ Maar voor de analyse telt vooral Riemanns geniale inzicht om functies op te vatten als punten in een abstracte ruimte, waarbij naburige punten staan voor functies die op een bepaalde manier niet veel van elkaar verschillen.²¹ Een functie als een punt in een ruimte: u kunt hierbij denken aan het ministerie van OCW, waarvan ieder steenkorreltje een voorschrift is waar scholen of universiteiten zich aan moeten houden.

Ook met dit inzicht was Riemann zijn tijd ver vooruit, want om er verder mee te komen moest het worden gecombineerd met een groot aantal andere wiskundige ontwikkelingen, die ik slechts kort zal aanduiden. Wie er meer van wil weten moet maar wiskunde gaan studeren, bij voorkeur aan de Radboud Universiteit, waar we nog volop plaats hebben. “We houden de groepen bewust klein”, schreef een vriend van mij eens in advertenties voor zijn cursussen Engels voor tolken en vertalers. Zijn instituut ging het jaar daarop overigens failliet. Ik noem begrippen als vectorruimte (Grassmann, 1844), matrix (Cayley, 1844), reëel getal (Dedekind, 1872), verzameling (Cantor, 1872–1897), topologie (F. Riesz, 1907; Hausdorff, 1914), en maat (Borel, 1894; Lebesgue, 1904), waarvan de laatste drie ook nog eens direct door het werk van Riemann waren geïnspireerd.²² Uit deze combinatie ontstond uiteindelijk de moderne abstracte analyse, die gebaseerd is op het idee dat een functie niet op zichzelf moet worden beschouwd, maar als een punt in een oneindigdimensionale vector-ruimte van functies met soortgelijke eigenschappen.²³

Het is opmerkelijk dat Engeland geen enkele rol van betekenis speelde in het ontstaan van de moderne analyse. Door een combinatie van heiligenverering, respect voor traditie, en *jingoism*, ging men veel te lang door op het pad van Newton, zodat de vernieuwingen die al vanaf de achttiende eeuw op het continent ontstonden niet of nauwelijks werden geabsorbeerd. Hierdoor kwam de klassieke analyse rond de eeuwwisseling in Cambridge juist tot een hoogtepunt, met name in het werk van Hardy (1877–1947) en Littlewood (1885–1977), maar werd de opkomst van de functionaalanalyse volledig gemist. Ter illustratie hiervan moge een opmerking dienen die Hardy zelfs in 1935 nog maakte na het aanhoren van een voordracht van Von Neumann over

de nieuwe analyse en haar verband met de kwantumtheorie: “Obviously a very intelligent man. But was that mathematics?”,²⁴ Tot het laatst hield Hardy ook vol dat er een stricte scheiding zou bestaan tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde. Vol trots verklaarde hij over zijn werk als wiskundige: “I have never done anything useful.” Mijn oude maatjes Richard Borchers en Richard Taylor, die het een stuk verder hebben geschopt dan ik, werden inderdaad niet moe van de opmerking dat ze het werk van Hardy als *Tripos questions* ofwel veredelde tentamenvragen zagen.

John von Neumann

Ik ben als vanzelf bij Von Neumann aangeland. Omdat ik mijn vorige oratie al aan hem heb opgehangen, zal ik vandaag slechts het minimum over hem vertellen.²⁵ Als voormalig wonderkind toog hij in 1926 naar Göttingen om assistent te worden van David Hilbert (1862–1943), de grootste wiskundige van zijn tijd. Von Neumann was zijn loopbaan begonnen in de verzamelingenleer, en dacht in Göttingen aan Hilberts *Beweistheorie* te gaan werken, een mislukte poging om de wiskunde op de logica te grondvesten en zo haar absolute geldigheid aan te tonen. Toen Von Neumann aankwam, bleek Hilbert echter alweer in iets heel anders geïnteresseerd te zijn, namelijk de kwantummechanica.²⁶

Sinds 1900 waren fysici geleidelijk aan tot de ontdekking gekomen dat de klassieke mechanica van Newton, aangevuld met de veldentheorie van Maxwell en de electrodynamic van Lorentz, op microscopische schaal geen juiste beschrijving van de natuur meer vormde. Deze ontwikkeling, waarin in eerste instantie Planck, Einstein, en Bohr toonaangevend waren, culmineerde in 1925 in de ontdekking van een nieuwe mechanica van de microscopische wereld door Werner Heisenberg (1901–1976). Die was op dat moment assistent van Max Born (1882–1970), ook alweer in Göttingen. Deze Born was zelf assistent van Hilbert geweest, en was wiskundig aanzienlijk beter onderlegd dan de gemiddelde theoretisch fysicus. Hij zag daarom in dat de wiskundige grootheden die Heisenberg had opgeschreven matrices waren. Een half jaar later publiceerde Erwin Schrödinger (1887–1961) zijn golfmechanica, die een alternatieve poging was de microscopische wereld wiskundig te beschrijven. Zelfs mensen die niets van wiskunde wisten waren daarvan onder de indruk, met name vanwege het mysterieuze symbool dat Schrödinger gebruikte. Hilberts leerling Weyl, die toen net als Schrödinger in Zürich werkte, hielp Schrödinger bij de wis-

kundige uitwerking van diens theorie, en begon tegelijkertijd een verhouding met diens echtgenote. Dat was haar antwoord op de vele buitenechtelijke verhoudingen die haar man, Schrödinger dus, had.²⁷

Dit terzijde. De matrixmechanica van Heisenberg zag er totaal anders uit dan de golfmechanica van Schrödinger, en toch leek het erop dat deze theorieën beide dezelfde microscopische werkelijkheid correct beschreven. Dit fascineerde Hilbert, die al in het zesde probleem van zijn beroemde lijst van wiskundige problemen uit 1900 had opgeroepen tot de wiskundige axiomatisering van de natuurkunde. Hij zag het verband tussen de kwantumtheorie en de opkomende functionaalanalyse, waarin hij ook zelf een grote rol had gespeeld, maar bleek te oud en te ziek om veel verder te komen dan die observatie. Gelukkig betrof Hilbert zijn assistent Von Neumann bij dit project, die precies de juiste man op de juiste plaats bleek te zijn. Von Neumann absorbeerde alle relevante wiskundige en fysieke ideeën van dat moment, en integreerde deze door een begrip in te voeren dat aan de basis ligt van de moderne analyse.

Dit is de zogenaamde Hilbertruimte. Van alle mogelijke ruimtes van functies, en dat zijn er heel wat, lijkt deze ondanks haar oneindige dimensie nog het meest op de ruimte om ons heen, omdat men in een Hilbertruimte lengtes en hoeken kan bepalen. Von Neumann zag in dat de golf functies van Schrödinger abstract gezien vectoren van lengte één in een Hilbertruimte waren, en dat de kansen die processen als radioactiviteit beschrijven, bepaald worden door de hoeken tussen dergelijke vectoren. De matrices van Heisenberg bleken juist zogenaamde operatoren op een Hilbertruimte te zijn. Zo kon Von Neumann aantonen dat de kwantumtheorie van Heisenberg inderdaad equivalent was aan die van Schrödinger.

Als klap op de vuurpijl begon én voltooid Von Neumann een virtueuze studie van zogenaamde onbegrensde operatoren, uiterst singuliere objecten waaraan zeker geen wiskundige zijn vingers had durven te branden als de kwantumfysica niet van de daken had geschreeuwd dat ze noodzakelijk waren om de natuur te beschrijven. Von Neumann schreef zijn ideeën in 1932 op in een boek genaamd *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, dat naast briljante wiskunde ook diepe natuurkundige beschouwingen bevat. Tot op zekere hoogte is dit boek daarmee een kwantummechanische versie van Newtons *Principia*.

Met de invoering van Hilbertruimten door Von Neumann kwam de moderne analyse

rond 1930 tot volwassenheid. Het wezenlijke verschil met de klassieke analyse is zoals gezegd dat nu niet naar één functie wordt gekeken, maar naar oneindig veel functies tegelijk. In de beperkte wereld van de wiskunde kan deze verandering van perspectief met recht een revolutie worden genoemd. De wiskundigen Birkhoff en Kreyszig slaan de spijker op de kop met hun oordeel dat “This revolution was made possible by combining a concern for rigorous foundations with an interest in physical applications.”²⁸ Deze opmerking is net zo goed van toepassing op het werk van Newton en van Riemann, en daarmee sluit ik de bespreking van mijn drie kruispunten tussen wiskunde en natuurkunde af. Het eerste gaf ons de klassieke analyse, het derde de moderne analyse, en het tweede vormde de brug daartussen.

Plannen en dromen

Je kunt je leven wijden aan de klassieke analyse, en ook aan de moderne analyse. Mijn fascinatie gaat echter uit naar het verband tussen die twee. Dit hangt nauw samen met het verband tussen de klassieke natuurkun-

de en de kwantumfysica, die wiskundig ten slotte door respectievelijk de klassieke en de moderne analyse worden beschreven. Ik zal u kort twee van mijn onderzoeksprojecten beschrijven die direct met dit verband te maken hebben.

Het eerste betreft het probleem van determinisme, ofwel voorbestemming. Dit is de vraag of er, gegeven de toestand van de wereld vandaag, slechts één mogelijke toekomst is. Deze kwestie speelt in de filosofie en de theologie een hoofdrol, maar heeft ook sociologische en juridische implicaties. Op de gevolgen voor de multiculturele samenleving heb ik al in het begin van deze oratie gewezen, maar al veel eerder werd de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden verscheurd door de strijd tussen de remonstranten, die Calvijns leer van de predestinatie afwezen, en de contra-remonstranten, die aan de kant van de Gereformeerde Kerk en daarmee de staat stonden. Raadspensionaris Johan van Oldenbarneveld kwam de remonstranten naar de smaak van prins Maurits te veel tegemoet, en werd om die reden in 1619 wegens hoogverraad onthoofd.²⁹ De prins had achteraf ge-

zien groot gelijk met deze actie, want modern neurobiologisch onderzoek laat geen spaan heel van de vrije wil,³⁰ maar ik probeer zelf iets nuchterder tegen dit probleem aan te kijken, en wel als wiskundige. Ik houd daarbij wél in gedachten dat Nijmegen een belangrijk bolwerk van de remonstranten was.

Newton wordt vaak opgevoerd als de vader van het deterministische wereldbeeld, waarin het heelal als een mechanisch uurwerk afloopt. Dit is een ernstig misverstand. Newton geloofde in het primaat van een almachtige schepper, die de natuurwetten niet alleen uit vrije keuze had bedacht, maar ook door middel van wat Newton *active powers* noemde voortdurend in de natuur ingreep. Als voorbeelden van dergelijke krachten noemde hij de opvallend hoge temperatuur van urine, processen als gisting en transmutaties van elementen zoals die in de alchemie werden voorzien — het is inmiddels een cliché dat Newton een fervent alchemist was. Maar ook wees hij op elektriciteit en zwaartekracht, waar hij geen mechanische verklaring voor had.³¹ Newton dacht bovendien dat de



Trinity College, Cambridge

schepper af en toe kometen op het zonnestelsel afvuurde om het stabiel te houden.

Als één denker uit de zeventiende eeuw als kampioen van het determinisme moet worden opgevoerd zou ik Spinoza (1632–1677) nemen, maar binnen de exacte wetenschappen moet met name markies de Laplace (1749–1827) worden genoemd, die zichzelf als het Franse antwoord op Newton beschouwde. Hij introduceerde zijn beroemde demon, die gegeven de plaatsen en snelheden van alle deeltjes in het universum, met behulp van de wetten van Newton de toekomst met absolute zekerheid zou kunnen voorspellen. Het is alwéér een cliché dat de demon van Laplace zijn opgave in de praktijk vanwege het verschijnsel van chaos niet kan vervullen, maar deze opmerking schiet aan de kern van de zaak voorbij. De werkelijke oorzaak van het feit dat de klassieke natuurkunde lang niet zo deterministisch is als Spinoza en Laplace dachten, ligt in het verschijnsel van zogenaamde incomplete beweging.³²

Het eenvoudigste voorbeeld daarvan is een knikker die van een tafel afrolt. Als het universum uitsluitend uit de tafel zou bestaan, is het eenvoudig zo, dat de bewegingsvergelijkingen van Newton na een bepaalde tijd geen oplossing meer hebben. Een iets ingewikkelder voorbeeld is een zuiver wiskundige die in een zwart gat valt, en het ultieme paradigma van een incomplete beweging is het heelal als geheel, dat ooit in de oerknal ontstond. Wat is het lot van de wiskundige als die eenmaal in het zwarte gat is aangeland? Bestond het heelal vóór de oerknal? Dat zijn vragen waarop de klassieke natuurkunde geen antwoord heeft. Augustinus trof eens een skepticus, die hem vroeg wat God eigenlijk deed vóór hij de wereld schiep. Woedend beet de kerkvader hem toe dat God toen de hel schiep, om later mensen te kunnen straffen die het waagden dergelijke vragen te stellen.

Daar laat ik me niet door tegenhouden; alleen NWO heeft de macht mijn onderzoek stop te zetten. Voorlopig waag ik het dus er maar op. De kwantummechanica heeft de reputatie juist mínder deterministisch te zijn dan de klassieke mechanica, zoals bijvoorbeeld blijkt uit een verschijnsel als radioactiviteit. Maar in werkelijkheid is het omgekeerde het geval. De kwantummechanica per se is juist een deterministische theorie, waarin incomplete beweging vanwege het speciale wiskundige formalisme van Von Neumann onmogelijk is. Het toevalskarakter van de kwantumtheorie komt uitsluitend bovendrijven wanneer we door een klassieke bril

naar de kwantumwereld kijken, of technisch gezegd de klassieke limiet nemen. Deze limiet is hoogst singulier, en daarmee een waar genoegen voor de echte analyticus. Het onderzoeksproject is nu om te begrijpen hoe een indeterministische klassieke beweging kan ontstaan als klassieke limiet van een noodzakelijk deterministisch kwantumsysteem. Zo hoop ik aan te kunnen tonen dat het begin van de tijd een door onze klassiek-natuurkundige bril veroorzaakte illusie is.

Dit laatste idee is oorspronkelijk afkomstig van Stephen Hawking, die als de huidige *Lucasian Professor of Mathematics* in Cambridge een verre opvolger van Newton is. Over hem en zijn coterie van verpleegsters en studentes kunt u desgewenst verder lezen in de pikantere passages van mijn Requiem voor Newton, want mijn zoektocht naar Newton en de bronnen van de moderne natuurkunde kende vele onvermoede zijpaden.

Een tweede project, dat al loopt, betreft het verband tussen klassieke en kwantummechanica in omgekeerde richting, van klassiek naar kwantum dus. Net als de vraag hoe de moderne kunst uit de klassieke heeft kunnen ontstaan, kan men zich afvragen hoe een kwantumsysteem eruit ziet als we weten dat de klassieke versie ervan is. Je kunt dit per systeem bekijken, en dat is sinds het ontstaan van de kwantumtheorie in 1925 ook veelvuldig gedaan. Mijn opzet is echter om dit in één klap voor alle mogelijke fysische systemen tegelijk te doen:

Groots en meeslepend wil ik leven!

Hoort ge dat, vader, moeder, wereld,

*knekelhuis!*³³

De truc daarbij is om de stap die heeft geleid van de klassieke analyse tot de moderne analyse opnieuw te zetten, maar nu één stap verder. Ik breng u in herinnering dat deze stap eruit bestond om niet naar één functie te kijken, maar naar een heleboel functies tegelijk, oneindig veel zelfs, samengebracht in een Hilbertruimte. Voor hetzelfde geld kun je alle Hilbertruimten samenvoegen tot één enkel wiskundig object, dat technische gesproken geen ruimte blijkt te zijn maar een zogenaamde categorie, waarin alle mogelijke kwantumtheorieën bevat zijn.

Om alle klassieke theorieën op een dergelijke wijze samen te rapen is het essentieel om het perspectief van Newton op de klassieke analyse te hebben, en niet dat van Euler en alle latere analytici. De klassieke analyse gaat dan dus over trajecten in meetkundige ruimten, en niet over functies daarop. Op die manier verkrijgt men opnieuw een categorie, waarin deze keer alle klassieke theorieën be-

vat zijn. Het verband tussen de klassieke en de kwantumwereld wordt dan naar mijn huidige verwachting gegeven door wat wiskundigen stoer een functor noemen. Dit is de laatste wiskundige term waarmee ik u vandaag lastig zal vallen, hoewel mijn zeer gewaardeerde promovendi er nog vele jaren door gekweld zullen worden.

De Humboldt-universiteit

Ter afsluiting wil ik opnieuw met u teruggaan in de tijd — als kwantisatie geen functor blijkt te zijn kan ik nog altijd de wetenschapsgeschiedenis in vluchten — en daarbij het beroep van hoogleraar in de tijd van Newton vergelijken met de tijd van Riemann, en met de situatie nu.

Toen Newton in Cambridge studeerde, was retoriek het enige vak dat systematisch werd gedoceerd. Er was maar één hoogleraar in de wiskunde, genaamd Isaac Barrow, die zijn leerstoel in 1669 aan zijn toen zevenentwintig jaar oude leerling ter beschikking stelde. Dat waren tijden. De wiskundigen konden in Cambridge doen wat ze maar wilden, want hun vak werd als volkomen onbelangrijk beschouwd. Newton maakte volop gebruik van deze vrijheid. Van de vijfendertig jaar dat hij in Cambridge werkte, besteedde hij slechts een fractie van zijn tijd aan de wiskunde, waarin hij dus hoogleraar was, en al net zo weinig aan de natuurkunde. De jaren 1665–1666, waarin hij de differentiaal- en integraalrekening ontdekte, en 1684–1686, waarin hij *Principia* schreef, waren dus niet typerend, maar uitzonderlijk. Ik noemde net al Newtons activiteiten in de alchemie, maar ook die vormden niet zijn belangrijkste tijdsverdrif.

Waar Newton zich voornamelijk mee bezighield, was theologie en kerkgeschiedenis: je zou zelfs kunnen spreken van een obsessie.³⁴ Hij was een diep gelovig christen, die echter meende dat de wereldse kerk aan een voortdurend corruptieproces onderhevig was. Dit gold ook voor de bijbel, waarvan Newton om onnavolgbare redenen alleen Daniël en de Openbaring van Johannes als authentiek beschouwde. In zijn nagelaten manuscripten treft men eindeloze tirades aan tegen de katholieke kerk, en in die zin was Newton een echte protestant. Maar ook de anglicaanse kerk beschouwde hij als verdorven, omdat deze het dogma van de drie-eenheid met de katholieke kerk deelde. Newton was namelijk bij zijn eenzame studie tot de conclusie gekomen dat Gods almacht gecompromitteerd zou zijn als Jezus Christus niet ondergeschikt aan hem was. Wat deze opvatting extra delicaat maakte, was dat Newton ver-

bonden was aan *Trinity College*, waarvan de volledige naam luidt: *College of the Holy and Undivided Trinity*. Hij hield zijn ketterse opvattingen daarom wijselijk voor zich. Dat kón hij ook doen, omdat niemand hem ooit vroeg onderzoeksvoorstellen in te dienen of achteraf rekenschap af te leggen over zijn werk.

We springen nu van Newton naar Riemann, en belanden daarbij in de negentiende eeuw. De beste Duitstalige universiteiten waren toen ingericht volgens het model van Wilhelm von Humboldt (1767–1835), de oudere broer van de beroemde ontdekkingsreiziger Alexander von Humboldt. Naar deze Alexander is een stipendium genoemd dat mij tien jaar geleden in staat stelde een tijd in Hamburg te werken, en daar viel het me op dat iedereen het nog steeds over Humboldt had, maar dan Wilhelm. Ik ben toen een fervent aanhanger geworden van diens visie op de universiteit, en zal daarom kort samenvatten waar die uit bestond en hoe Humboldt daar toe kwam.³⁵

In de achttiende eeuw ontstond het Duitse humanisme, waarin verlichte geesten als Goethe, Kant en Humboldts vriend Schiller erop wezen dat iedereen het recht had zijn persoonlijkheid te ontplooiën en in waardigheid te leven. In Pruisen vond de heersende klasse van vorsten en landjonkers haar ontplooiing reeds in het berijden en fokken van paarden, zodat dit humanisme vooral aansloeg bij de middenklasse. Om deze groep in staat te stellen kennis en cultuur te vergaren, richtte Humboldt in 1810 de universiteit van Berlijn op. Het doel van Humboldts universiteit bestond uit *Bildung und Aufklärung*, ofwel vorming en verlichting. *Bildung* is iets heel anders is dan *Ausbildung*, oftewel opleiding. Humboldt vond de gedachte dat een universiteit een beroepsopleiding zou bieden zelfs ondraaglijk. Hij zag de wetenschap als een abstracte spirituele activiteit, die uitsluitend de verrijking van de persoonlijkheid tot doel had.

Niettemin was Humboldt een sluw politicus. Hij vroeg zich af waarom de koning van Pruisen, Friedrich Wilhelm III, een dergelijke universiteit, tenslotte een potentiële bron van

rebellie, zou willen financieren. Om te beginnen noemde hij de universiteit naar de koning. We hadden hier natuurlijk ook een of andere miljardair moeten zoeken, in plaats van Radboud die geen cent heeft nagelaten. Waarom geen *John de Mol Universiteit Nijmegen*. Maar bovendien hield Humboldt zijn koning voor dat de Duitse cultuur een bindend element zou zijn in het opkomend nationalisme, dat door Friedrich Wilhelm werd ondersteund omdat het tegen Napoleon was gericht, en na diens gehoopte ondergang tot een groot-Duitse staat zou kunnen leiden. Uiteindelijk gebeurde dat ook.

Ten slotte, en nu komt het, verzekerde Humboldt absolute loyaliteit van de universiteit aan de regering, als omgekeerd ook de academici op geen enkele manier door de staat werden lastiggevallen. Dit pact, dat de essentie vormt van zijn universiteit, vatte Humboldt samen met de woorden *Einsamkeit und Freiheit*. Dit betekent dat de studenten en hoogleraren zich ongestoord en vrij van iedere inmenging kunnen wijden aan de verrijking van hun persoonlijkheid door middel van onderwijs en onderzoek. Het zou ook betekenen dat de meeste niet-joodse Duitse academici zich later kritiekloos achter Hitler schaarde, zolang ze hun werk maar konden blijven doen.³⁶

Hoe staat het er nu voor? Ik ben blij hier in Nijmegen te werken, want in Nederland is de Radboud Universiteit degene die nog het dichtst in de buurt komt van het model van Humboldt. Dat blijkt bijvoorbeeld uit het bestaan van het *Honours Programma*, en uit het niet bestaan van fusieplannen met een hogeschool. Maar het blijkt ook uit de veelvuldige mogelijkheden die worden geboden om met collega's uit andere disciplines in contact te komen; ik heb niet eerder in zo korte tijd zoveel interessante nieuwe mensen leren kennen.

Wat de wiskunde betreft wil ik nog een ander aspect noemen, namelijk Humboldts idee dat hoogleraren en studenten samen door middel van een dialoog de waarheid moeten zoeken. De hoogleraar levert de kennis, maar de student brengt zijn of haar onbe-

vangen aandacht en kritiek in. Kennis heeft daarom altijd een voorlopig en onaf karakter. Ik heb nog nooit zo'n leuke en enthousiaste groep wiskundestudenten gezien als hier, en heb op dat vlak dus hoge verwachtingen. Aan de andere kant dreigt de Humboldtse eenheid tussen onderwijs en onderzoek te worden getorpedeerd door de vorming van aparte onderwijs- en onderzoeksinstituten. Gelukkig zal de volgende minister of staatssecretaris deze wel weer samen willen voegen tot subfaculteiten, waarna de daarop volgende ze weer uiteen zal laten vallen, enzovoort, net als in de klassieke Chinese roman *De Drie Koninkrijken*. Ik maak me op dit vlak dus niet al te veel zorgen.

Ook met de *Freiheit* van Humboldt is het goed gesteld, want zowel NWO als deze universiteit hebben met een tweesporenbeleid, bestaande uit thematisering en clustering aan de ene kant, en persoonsgerichte steun aan de andere kant, de spanning tussen de maatschappelijk gewenste sturing en de door de wetenschapsbeoefenaar gewenste vrijheid van onderzoek naar mijn mening bevredigend opgelost.

De werkelijke bedreiging van de Humboldtse universiteit is dat de moderne hoogleraar noodgedwongen ondernemer is geworden. Hij of zij is vrijwel dagelijks bezig met de financiering van onderzoek, overdag dat van zichzelf, en 's avonds, als de kinderen in bed zijn, dat van iemand anders. Het Humboldtse ideaal van *Einsamkeit* is daarmee in het huidige academische bestel onbereikbaar gemaakt. Ooit wist Newton, één keer als student en één keer als hoogleraar, het concentratievermogen op te brengen om in een paar jaar tijd respectievelijk de klassieke analyse en de klassieke mechanica te ontwikkelen. Ook voor de mindere goden is het in iedere fase van de loopbaan essentieel om gedurende langere perioden met een totale overgave over wetenschappelijke problemen te kunnen nadenken. Ik doe daarom een beroep op zowel universitaire bestuurders als NWO om onderzoekers hun eenzaamheid weer terug te geven.



Noten en referenties

- 1 'Wie is er bang voor cultuur?' door Marcia Luyten (*de Volkskrant*, 4 december 2004, Reflex, p. 14).
- 2 Voor een algemeen overzicht van de geschiedenis van de analyse zie H.N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis* (American Mathematical Society, Providence, 2003).
- 3 De ultieme referentie voor Newtons wiskundige werk is D.T. Whiteside (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 Vols. (Cambridge

University Press, Cambridge, 1967–1981). Voor korte samenvattingen zie bijvoorbeeld C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus* (Springer-Verlag, New York, 1979) of Jahnke, op.cit.

- 4 Newton was zich de algemeenheid van zijn methode al vroeg bewust. Reeds in 1666, toen zijn calculus nog volop in ontwikkeling was, schreef Newton "Could this [n.l. het berekenen

van primitieven en afgeleiden] ever bee done all problems whatever might be resolved."

- 5 Newton beschreef de Taylor-expansie in een vroege versie van zijn artikel 'De Quadratura Curvarum', dat hij al in 1676 begon, maar pas in 1704 zou publiceren (en wel als appendix van zijn *Opticks*). Hij vond deze expansie kennelijk niet belangrijk genoeg om in de gepubliceerde versie op te nemen.

- 6 *The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. De ongelovige wiskundige was Edmund Halley, een van de meest zichtbare bewonderaars en volgelingen van Newton.
- 7 In het bijzonder in zijn wiskundige *Opus Magnum De Methodis Serierum et Fluxionum* uit 1671 (postuum gepubliceerd in 1736), en in de werken die daaraan vooraf gingen, zoals *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* uit 1669 (gepubliceerd in 1711).
- 8 Leibniz beschreef zijn versie van de calculus later dan Newton, en had daarvoor ook inzicht gehad in Newtons ongepubliceerde werk op dit gebied. Historici die beweren dat het werk van Leibniz onafhankelijk was van dat van Newton, begrijpen niet dat de zekerheid dat een bepaald resultaat behaald kan worden dikwijls al het halve werk is, ook als dit resultaat vervolgens op een nieuwe manier verkregen wordt. Zie bijvoorbeeld A.R. Hall, *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- 9 Zie P. Kitcheer, 'Fluxions, limits, and infinite littenesse: A study of Newton's presentation of the calculus', *Isis* 64, p. 33–49 (1973).
- 10 Ook Spinoza trapte bijvoorbeeld in deze val: zijn hoofdwerk *Ethica*, waarin geen enkel wiskundig argument voorkomt, laat staan een meetkundige constructie, heeft de ondertitel *Ordine Geometrico Demonstrata*, ofwel 'volgens de meetkundige ordening uiteengezet'.
- 11 Een goede moderne editie is I. Newton, *The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy)*, Transl. I.B. Cohen & A. Whitman, *Preceded by A Guide to Newton's Principia* by I.B. Cohen (University of California Press, Berkeley, 1999).
- 12 Om die reden geldt Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748) voor historici die zich niet bewust zijn van de draagwijdte van Newtons werk als het begin van de analyse als zelfstandige wiskundige discipline. In zijn vroege werk eiste Euler nog dat een functie werd gegeven doot een expliciete analytische uitdrukking, maar in zijn tweede hoofdwerk over de analyse, *Institutiones calculi differentialis* (1755), neigt hij al naar het moderne, abstracte functiebegrip. De definitie van een functie als een afbeelding die aan een (reëel) getal een ander (reëel) getal toevoegt wordt veelal aan Dirichlet (1837) toegeschreven, ofschoon die nog niet over een behoorlijke definitie van de reële getallen beschikte en tevens uitsluitend continue functies beschreef,
- 13 "Dirichlet allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauss, weiss, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. Wenn Gauss sagt, er habe etwas bewiesen, so ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist ebensoviele pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiss." (Jacobi aan A. von Humboldt, 21 december 1846).
- 14 Wel verkortte Newton de duur van het college van dertig tot vijftien minuten.
- 15 Zie bijvoorbeeld D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik* (Birkhäuser, Basel, 1996) en M. Monastyrski, *Riemann, Topology, and Physics* (Birkhäuser, Basel, 1987).
- 16 Zie O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 2000) voor de bijdragen van Gauss, Weber en Riemann. Zo voerden zij als eersten hoge-precisie metingen uit aan elektrische en magnetische verschijnselen.
- 17 Zie Darrigol, op.cit.
- 18 Onafhankelijk van Riemann dacht ook Faraday in die richting.
- 19 Ook Lagrange (1736–1813) moet hier worden genoemd, vanwege zijn concept van de configuratieruimte in de klassieke mechanica.
- 20 Het is verbazingwekkend dat Riemann expliciet zocht naar een veldentheorie van de zwaartekracht én zijn metrische tensor als een door de fysica bepaalde veldgrootte zag, maar het verband tussen deze twee inzichten over het hoofd zag.
- 21 Een nog grotere abstractie is Riemanns idee van een ruimte van oplossingen van een stelsel vergelijkingen, dat onder de naam moduli-ruimte de basis vormt van de moderne algebraïsche meetkunde.
- 22 Cantor kwam tot zijn verzamelingenleer door zijn studie van Riemanns werk aan Fourierreeksen. Riemanns werk aan de complexe analyse stond aan de wieg van de topologie, en zijn definitie van de integraal was van grote invloed op het latere werk van Borel en Lebesgue.
- 23 Zie J. Dieudonné, *History of Functional Analysis* (North-Holland, Amsterdam, 1981), G. Birkhoff & E. Kreyszig, 'The establishment of functional analysis', *Historia Mathematica* 11, p. 258–321 (1984), J. Pier, *Mathematical Analysis During the 20th Century* (Oxford University Press, New York, 2001), and Jahnke, op.cit., voor de geschiedenis van de functionaalanalyse. Rond 1900, vijftig jaar na Riemann dus, ontstonden twee concurrerende scholen rond dit opbloeiende vak. De een was in Parijs rond Jacques Hadamard (1865–1963), met Maurice Fréchet (1878–1973) als belangrijkste representant (in zijn proefschrift uit 1906 voerde Fréchet bijvoorbeeld het begrip metrische ruimte in, en ook daarna leverde hij nog vele bijdragen aan de functionaalanalyse en de topologie). De andere school in Göttingen stond onder leiding van Hilbert. Vermeldenswaardige leerlingen van Hilbert waren in deze context bijvoorbeeld Erhard Schmidt (1876–1959) en Hermann Weyl (1885–1955). Schmidt dacht als eerste op een meetkundige manier over wat wij nu Hilbertruimten noemen, en voerde begrippen als inproduct, projectie, en orthonormale basis in. Hij was de eerste die functies als vectoren in een oneindigdimensionale lineaire ruimte zag, en leverde in navolging van Hilbert ook belangrijke bijdragen aan de spectraaltheorie van compacte operatoren. Het proefschrift van Weyl uit 1908 bevatte vanuit modern perspectief de eerste behandeling van onbegrensde operatoren. Maar juist iemand die tot geen van deze scholen behoorde, en daardoor openstond voor de invloed van beide, zou de belangrijkste rol spelen in het rijpingsproces van de functionaalanalyse, namelijk de Hongaarse wiskundige Frigyes Riesz (1880–1956). Zijn belangrijkste bijdrage was misschien wel het begrip operator uit 1913, dat een cruciale abstractie was van de lineaire vergelijkingen en kwadratische vormen waar Hilbert en zijn leerlingen het over hadden, en een complementaire rol speelde ten opzichte van het begrip functionaal waar de Franse school vanuit ging. Verder noem ik hier de stellingen van Riesz-Fischer en Riesz-Fréchet, beide uit 1907, het begrip norm uit 1916, en de studie van abstracte compacte operatoren in 1918. Het schitterende boek *Functional Analysis* van Riesz en Sz. Nagy bevat het grootste deel van zijn bijdragen aan het gebied.
- 24 Zie I.E. Segal, 'Review of Noncommutative Geometry', *Bull. Amer. Math. Soc.* 33, P. 459–465 (1996). Segal schrijft de anecdote toe aan Norman Levinson. Uit diens biografie kan worden opgemaakt dat het hier om het academisch jaar 1934–35 gaat.
- 25 Twee geheel verschillende biografieën van Von Neumann zijn S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1980) en N. Macrae, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More* (Pantheon Books, 1992).
- 26 Voor de geschiedenis van de kwantummechanica zie J. Mehra & H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vols. 1-6 (Springer-Verlag, New York, 1982–2001). Voor een kortere introductie zie K. Landsman, *Requiem voor Newton* (Contact, Amsterdam, 2005).
- 27 W. Moore, *Schrödinger: Life and Thought* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- 28 Birkhoff & Kreyszig, op.cit., p. 306–307.
- 29 Zie bijvoorbeeld F. van Deursen, *Maurits van Nassau: De Winnaar die Faalde* (Prometheus, Amsterdam, 2002) of J. Israel, *The Dutch Republic: Its Rise, Greatness and Fall 1477–1806* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- 30 Zie bijvoorbeeld J.A. den Boer, *Neurofilosofie: Hersenen – Bewustzijn – Vrije Wil* (Boom, Meppele, 2003).
- 31 Zie de definitieve biografie van Newton: R.S. Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- 32 De eerste die hier m.i. duidelijk op wees in verband met het probleem van determinisme is J. Earman, *A Primer on Determinism* (Reidel, Dordrecht, 1986).
- 33 H. Marsman, 'De Grijsaard en de Jongeling', 1929.
- 34 Naast Westfall, op.cit., zie J.E. Force & R.H. Popkin, *Essays on the Context, Nature, and Influence of Isaac Newton's Theology* (Kluwer, Dordrecht, 1990) en J.E. Force & R.H. Popkin (eds.), *Newton and Religion: Context, Nature and Influence* (Kluwer, Dordrecht, 1999). Een groot deel van Newtons theologische manuscripten wacht nog op ontsluiting en bestudering.
- 35 Klassiekers op dit gebied zijn o.a. F.K. Ringer, *The Decline of the German Mandarins: The German Academic Community, 1890–1933* (Wesleyan University Press, New England, 1969), en, kort maar krachtig, H. Schelsky, *Einsamkeit und Freiheit: zur Sozialen Idee der deutschen Universität* (Verlag Achendorf, Münster, 1960). Modernere literatuur over de Humboldt universiteit is bijvoorbeeld *Wissenschaft als kulturelle Praxis, 1750–1900*, eds. H.E. Bödecker et al (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1999), *Romanticism and the Sciences*, eds. A. Cunningham & N. Jardine (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), en A. Labrie, "Bildung" en Politiek, 1770–1830: De "Bildungsphilosophie" van Wilhelm von Humboldt Bezien in Haar Politieke en Sociale Context (Historisch Seminarium van de Universiteit van Amsterdam, 1986).
- 36 Een schrijnend voorbeeld is de fysicus Werner Heisenberg. Zie N.P. Landsman, 'Getting even with Heisenberg', *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* B33, p. 297–325 (2002).