

Boekbesprekingen

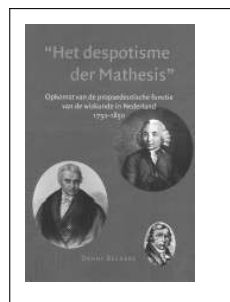
Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl



D. Beckers
Het Despotisme der Mathesis
Hilversum : Uitgeverij Verloren, 2003
246 p., prijs €22,-
ISBN 90-6550-762-0

Je zou zeggen dat als het om de geschiedenis van de wiskunde gaat een bezoek in de periode 1750-1850 aan Nederland een typisch voorbeeld is van 'being at the wrong time at the wrong place'. De nieuwe wiskunde werd immers in die periode elders in Europa ontwikkeld. Toch is Danny Beckers erin geslaagd om over de wiskunde in Nederland in die periode een zeer onderhoudend en ook voor niet-wiskundigen goed leesbaar proefschrift te schrijven. Op basis van uitvoerig onderzoek laat Beckers zien dat er binnen de wiskundebeoefening in de ruime zin van het woord in de periode in kwestie in Nederland veel veranderde. Zo laat hij zien dat het Wiskundig Genootschap verschillende typen wiskundigen, die in de achttiende eeuw nog gescheiden opereerden, verenigde en er zich binnen het Genootschap een gemeenschappelijke ideologie ontwikkelde die met succes werd uitgedragen. Centraal stond daarbij de zuivere wiskunde als onmisbaar element in elke goede opleiding. Wiskunde werd verplicht voor iedereen en dus ook op de Latijnse scholen, waar voortaan ook de elite aan wiskundeles werd onderworpen. Het ging allemaal niet bij iedereen van harte, zoals de titel van het boek van Beckers aangeeft. Het is heel goed dat Beckers ons laat zien dat de geschiedenis van de wiskunde in Nederland meer omvat dan alleen de eerste en tweede gouden eeuw. Ook de periode daartussen is fascinerend. Een Nederlandse Bolyai of Abel in de periode in kwestie zou leuk geweest zijn, maar ook de mindere goden zijn belangrijk voor de wiskunde. De Gelder, Lobatto en anderen hielden het vuur brandend en hun leven, werk en maatschappelijke context zijn alleszins het beschrijven waard. De lezer die het boek nog niet in zijn bezit heeft dient daar op korte termijn wat aan te doen. Uw recensent is het geheel eens met Arnold Heertje die in zijn open briefwisseling in het Parool met Arnon Grunberg het boek van harte aan de bekende schrijver heeft aanbevolen.

T. Koetsier



D. Dieks, V. Icke, G.Y. Nieuwland, J. Ritzerveld, F. Takens
Commentaar op 'Waanwetenschap': de Tachtigjarige Oorlog van N.G. van Kampen
Utrecht: Epsilon, 2003
60 p., prijs €7,-
ISBN 90-5041-083-9

Waanwetenschap werd in deze kolommen in maart 2003 nogal negatief gerecenseerd. Ook elders werd niet diep op de inhoud ingegaan. De redactie van de Epsilonreeks verzocht enkele fysici en wiskundigen om inhoudelijk commentaar, en dit deeltje (met nummer 52a een soort compagnon van 52, namelijk *Waanwetenschap* zelf) is op te vatten als een bundeling van een vijftal (lange)

recensies die wat meer op de inhoud van *Waanwetenschap* ingaan, en waarvoor nog eens acht anderen om commentaar is gevraagd. De astronoom Jelle Ritzerveld voelt zich voornamelijk gesterkt in Van Kampen een medestander te hebben in zijn strijd tegen de bierkaai. Voor hem is het smullen geblazen in de hapklare onzin die Van Kampen opdist. Ook Vincent Icke kan zich goed verplaatsen in de woede van de emeritus. Hij heeft ook kritiek, zowel op de stijl ("hobbelig") als op de inhoud. Hij mist teveel echt gevaarlijke pseudo-wetenschap.

Van Kampens boutade lijkt zich echter vooral te richten op verkeerd begrip van statistiek, waarschijnlijkheidsrekening, statistische mechanica en kwantummechanica. De inleidende opsomming van onzinnigheden wil slechts "de lezer in de stemming brengen" voor de gedachte dat ook knappe koppen het spoor bijster kunnen raken.

Dennis Dieks besteedt onder meer aandacht aan het kansbegrip (relatieve frequentie) van Van Kampen en hij gaat ook in discussie met Van Kampen over de interpretatie van de kwantummechanica. De wiskundige G.Y. Nieuwland bespreekt de filosofische stellingnamen van Van Kampen. Hij vindt dat die te zeer het monopolie claimen op de correcte interpretatie van 'de werkelijkheid'.

F. Takens bespreekt onder meer de bekende paradox van Zeno over Achilles en de schildpad. Van Kampen begrijpt niet waarom daar nog zo over gepraat wordt, de theorie van oneindige reeksen is toch overbekend? Takens gaat er dieper op in, maar mist volgens mij waar het om draait, namelijk om onze gevoelsmatige voorstellingen van begrippen als tijd, ruimte, snelheid, positie en dergelijke. Door de introductie van allerlei wiskunde lijkt de paradox te verdwijnen, maar zij is niet echt weg, maar veranderd in een onverenigbaarheid van ons gevoel met de fysica en met de wiskunde van getallen en functies. Takens gaat ook in op Van Kampens kansbegrip.

Een laatste woord over beide boekjes. Extra aandacht van een redacteur had geen kwaad gekund. Nu wordt de lezer geconfronteerd met volstrekt onnodige tik- en spelfouten. Dat de ene auteur af en toe de spelling van voor 1954 aanhoudt en de ander bij herhaling over Bertrand Russel (met één l) spreekt, had niet gehoeven.

J.W. Nienhuys

I. Dolgachev

Lectures on Invariant Theory

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

220 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-52548-9

Invariantentheorie is een gebied dat teruggaat tot halverwege de 19e eeuw, maar nog altijd in ontwikkeling is. Het bestudeert groepswerkingen op variëteiten—zo algemeen mogelijk—aan de hand van *invarianten*, veeltermen die door de werking van de groep onveranderd blijven. De oorsprong van de ideeën ligt al bij Cayley en Silverstone, die invarianten gebruikten bij hun studies naar moduli van krommen en oppervlakken.

Hoe dit in zijn werk gaat, en welke problemen daarbij komen kijken, is goed in te zien aan de hand van een voorbeeld. Stel dat we elk punt (x, y) in het complexe vlak C^2 willen identificeren met zijn gespiegelde in de oorsprong $(-x, -y)$. Deze spiegeling geeft een werking van Z_2 op het vlak. De invarianten onder de

ze actie zijn de polynomen in $C[X, Y]$ die dezelfde waarden hebben op elk paar punten. Het is snel in te zien dat deze invarianten voortgebracht worden door X^2, Y^2 en XY en dat de invariantenalgebra gegeven wordt door $C[X^2, XY, Y^2]$. Deze is op zijn beurt de functiering van een kegel $C[u, v, w]/(uw - v^2)$. We vinden dus dat de meetkundige banenruimte van deze actie de gedaante heeft van een kegel, singulier in de oorsprong.

Dit voorbeeld laat zien dat een mooie groepsactie nog steeds aanleiding kan geven tot minder mooie banenruimten, die zeker niet altijd de structuur van een variëteit hebben. Hoe en wanneer een banenruimte de structuur van een variëteit te geven is, is de hoofdvraag van invariantentheorie. Dit is vooral van belang bij het zoeken naar meetkundige moduli-ruimten, waar vaak uitgedeeld moet worden naar een lineaire groep symmetrieën.

Op dit gebied is een nieuw boek verschenen, gebaseerd op een serie colleges gegeven door Igor Dolgachev aan de universiteiten van Michigan en Harvard. Aan de opzet en de indeling is te merken dat de oorsprong in de collegezaal ligt, met veel voorbeelden en een didactische stijl. Helaas zijn er bij de redactie wat typen en zetfouten overgebleven, en heeft de lezer soms het gevoel dat hij iets mist omdat hij niet zelf in de collegezaal aanwezig is. De auteur begint met de behandeling van de klassieke gevallen van Hilbert, bouwt op naar de moderne theorie van Mumford, en besluit met een gedetailleerde beschouwing van voorbeelden waar de invariantentheorie in de praktijk voorkomt.

Hoewel dit boek zeker niet gericht is op de beginnende student, is het door zijn dynamische stijl en veelheid aan voorbeelden en opgaven een belangrijke aanvulling op standaardwerken zoals Mumfords *Geometric invariant theory* of Viehwegs recentere *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*.

R. Swierstra

C. Voisin

Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I & II

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

351 p., prijs £65,-

ISBN 0-521-80283-0

De twee boeken onder beschouwing gaan over de meetkunde van Kähler-manifolds. De twee belangrijkste onderwerpen in deze boeken zijn de variatie van Hodge-structuren en de theorie van algebraïsche cykels op Kähler-manifolds.

Met de variatie van Hodge-structuren wordt grofweg het volgende bedoeld: neem een familie van complexe compacte variëteiten, (bijvoorbeeld krommen of oppervlakken) met de extra eigenschap dat voor ieder willekeurig paar (A, B) van verschillende variëteiten in deze familie er een diffeomorfisme $\varphi : A \rightarrow B$ bestaat. Nu kun je cohomologiegroepen $H^i(A, Z)$ en $H^i(B, Z)$ definiëren. Deze cohomologiegroepen hangen alleen af van de topologie van A en B . Stel nu dat we ook nog eisen dat φ niet door analytische functies kan worden gegeven. We kunnen op een canonieke manier $H^i(A, Z) \otimes C$ en $H^i(B, Z) \otimes C$ schrijven als een directe som van vectorruimten $H^{p,q}$ van (p, q) -differentiaalvormen met $p + q = i$. Deze Hodge-decompositie hangt af van de analytische structuur en kan je informatie geven over hoe verschillend A en B zijn als analytische variëteiten, terwijl zij topologisch hetzelfde zijn. De Hodge-decompositie geeft je bijvoorbeeld informatie over deelvariëteiten van A en B (cykels genaamd).

De twee te recenseren boeken bevatten het materiaal van twee

cursussen gegeven aan eerste- en tweedejaars promovendi aan Parijs 6/7.

Het eerste deel begint met een opsomming van resultaten die bekend worden verondersteld. Deze resultaten komen voornamelijk uit de analyse. In het eerste deel worden verder nog de Hodge-decompositie, variatie van Hodge-structuren en cykels op Kähler-manifolds behandeld. Het tweede deel diept de laatste twee onderwerpen uit, en behandelt enige resultaten uit de topologie van algebraïsche variëteiten. De meeste resultaten die in het eerste deel worden behandeld kunnen als klassiek worden beschouwd.

Het tweede deel bevat een aantal belangrijke resultaten van Bloch, Griffiths, Mumford en Nori en verder veel resultaten van de auteur. Deze resultaten zijn tamelijk geavanceerd en een aantal is tamelijk recent. Als toepassing wordt het werk van de auteur en Mark Green met betrekking tot de Noether-Lefschetz-locus behandeld.

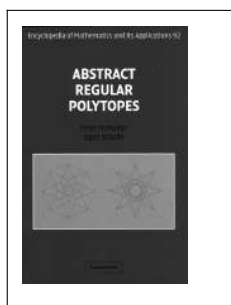
Over het algemeen is het eerste deel helder geschreven, het tweede deel is wat slordiger geschreven. De auteur kiest vaak voor een analytisch oogpunt, waar ook voor een iets algebraïsch oogpunt had kunnen worden gekozen.

Ieder van de 23 hoofdstukken bevat een aantal oefeningen variërend van redelijk eenvoudig tot zeer pittig. Een opmerkelijke oefening is II.3.1, waar de lezer wordt geacht te bewijzen dat een generiek kubisch oppervlak 27 lijnen heeft.

Het gedeelte dat over (de variatie van) Hodge-structuren gaat, behandelt voornamelijk gladde variëteiten. Wel wordt er getipt aan de theorie voor singuliere variëteiten en een gedeelte van de daarvoor noodzakelijke theorie opgebouwd. Het is jammer dat de auteur de theorie van gemengde Hodge-structuren niet verder heeft uitgewerkt.

De opmaak van de tekst is tamelijk slordig. Zo zijn bijvoorbeeld voorbeelden en opmerkingen cursief gedrukt, met als consequentie dat enkele pagina's vrijwel geheel cursief gedrukt zijn.

Voor de Franstalige versie zijn beide delen samengevoegd. Deze versie kost ongeveer de helft (voor niet-SMF-leden) of een derde (voor SMF-leden) van de Engelstalige versie. R. Kloosterman



P. McMullen, E. Schulte

Abstract Regular Polytopes

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 92

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

551 p., prijs £75,-

ISBN 0-521-81496-0

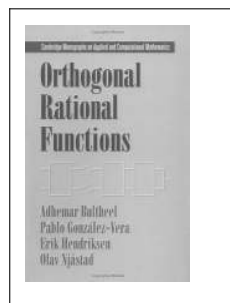
There are several equivalent ways to define an abstract regular polytope. The most efficient one is to see it as a pair consisting of a group together with a finite ordered generating set of involutions satisfying certain axioms. Roughly speaking, an abstract polytope is a quotient of a Coxeter system over a linear diagram such that the images of the fundamental generators provide a 'nice' coset geometry. Starting with a finite Coxeter system over a linear diagram, the corresponding coset geometry is just the incidence structure of a regular polytope. In general, the coset geometry of an abstract regular polytope is a thin chamber transitive geometry in the sense of Buekenhout and Tits. Therefore the theory

of abstract regular polytopes is a special instance in the general framework of groups and incidence geometries. There are indeed numerous connections to other areas like buildings and diagram geometries. However, the theory of abstract regular polytopes has its own special features as becomes clear from the book under review.

The principal objective of the book is to give an up-to-date account of the theory of regular polytopes. The focus is on a description of the present state of the classification of locally toroidal polytopes. This classification is now almost complete due to numerous contributions of the authors over the last 15 years. Chapters 7-12, which cover about two thirds of the book, provide a uniform treatment of their main techniques and results. Although the initial problem can be stated in a purely group-theoretical language, its solution is based on geometrical and combinatorial ideas. There are two main sources. On the one hand there are the techniques of mixing and twisting described in Chapters 7 and 8. The content of these chapters is especially interesting for diagram geometers. On the other hand the theory of complex reflection groups comes into play. The results needed from this area are prepared in Chapter 9. The classification itself is based on a case distinction of the possible Schläfli diagrams. In most cases a combination of the ideas developed in the previous chapters provides examples of groups, which ensure that certain amalgams do not collapse. It is usually very difficult to establish this kind of results and therefore not surprising that the details are sometimes involved.

The book provides a very readable introduction to the theory of abstract polytopes and an overview of several topics of current research with an emphasis on the classification of locally toroidal regular polytopes. Only basic knowledge in algebra and geometry is needed for reading this book. However, a certain experience in these areas will be helpful for the more advanced chapters. This book is required for anyone working on groups and incidence geometries. I recommend it to anyone who likes beautiful mathematics. Regular polytopes have fascinated people for more than 2000 years and they have been a source of inspiration for many mathematical theories. That they still maintain their outstanding role is underlined by this excellent book of McMullen and Schulte.

B. Muhlherr



A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad

Orthogonal Rational Functions

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

422 p., prijs £45,-

ISBN 0-521-65006-2

Orthogonale polynomen werden in de vorige eeuw met redelijk succes bestudeerd. Een standaardwerk is het boek van Szegő, *Orthogonal Polynomials* (AMS, 1939/1975). Er werd vooruitgang geboekt met de theorie van deze polynomen op allerlei verschillende verzamelingen. Deze ontwikkelingen zijn terug te vinden in boeken en overzichten van onder anderen Akhiezer, Askey, Chihara, Deift, Levin en Lubinsky, Nevai, Saff en Totik, Shohat en

Tamarkin, en Stahl en Totik.

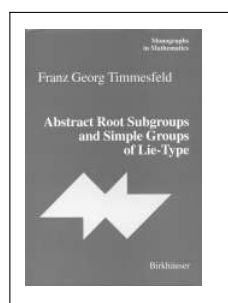
Een interessante uitbreiding van deze theorie wordt verkregen als men de polynomen vervangt door rationale functies. Deze uitbreiding wordt beschreven in het boek dat hier ter bespreking ligt.

De orthogonale rationale functies voldoen aan een recursievergelijking en een Christoffel-Darboux type relatie (hoofdstuk 3) die essentieel is in de theorie die wordt ontwikkeld. Oplossingen van de recursievergelijking geven de tellers en noemers van de approximanten van kettingbreuken, die convergeren naar de Riesz-Herglotz-Nevanlinna transformatie van de orthogonaliteitsmaat μ (hoofdstuk 4). Deze approximanten hebben nuttige interpolatie-eigenschappen (Nevanlinna-Pick interpolatie) die grondig worden beschreven in hoofdstuk 6. Kwadratuur met behulp van nulpunten van quasi-orthogonale of para-orthogonale rationale functies blijkt opnieuw optimaal of bijna optimaal te zijn, zoals Gausskwadratuur bij orthogonale polynomen (hoofdstuk 5). Deze kwadratuurformules blijken een belangrijk hulpmiddel te zijn bij de constructie van oplossingen van het momentenprobleem. Het sterke Stieltjes momentenprobleem vraagt of er voor een gegeven (dubbeloneindige) rij μ_k ($k \in \mathbb{Z}$) een maat μ op $[0, \infty)$ bestaat zodat $\mu_k = \int x^k d\mu(x)$ en indien dit zo is, of deze maat uniek is. Voor het sterke Hamburger momentenprobleem mag de maat op $(-\infty, \infty)$ zijn gedefinieerd. Deze momentenproblemen horen bij Laurent orthogonale polynomen (de orthogonale rationale functies met alle polen in de oorsprong). De rationale veralgemening voor het Hamburger momentenprobleem is om momenten van de vorm $\int d\mu(t)/\omega_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) te beschouwen, met ω_k een polynoom die de polen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ als nulpunten heeft. Deze momentenproblemen worden bestudeerd in hoofdstuk 10. Asymptotische resultaten, met onder andere een rationale veralgemening van het Szegőprobleem, worden uitgewerkt in hoofdstuk 9. Hier vinden we sterke asymptotiek (als gevolg van de rationale uitbreiding van de Szegőtheorie), maar ook asymptotiek van de verhouding van twee orthogonale rationale functies en asymptotiek van de n -de wortel van de n -de rationale functie. De theorie van orthogonale polynomen met variërende gewichten is van belang bij deze analyse: de polen, die vooraf gekend zijn, kunnen in de orthogonaliteitsrelatie immers worden afgezonderd en als variërende gewichten worden beschouwd, zodat de tellers van de orthogonale rationale functies dan orthogonale polynomen worden voor variërende gewichtsfuncties. Hiervoor werden eerder door Guillermo López Lagomasino allerlei asymptotische resultaten gevonden, die hier erg nuttig blijken te zijn. Tot dusver werden de polen steeds zodanig gekozen dat ze niet op de reële rechte of op de eenheidscirkel liggen. Het randgeval waarbij alle polen op de reële rechte liggen (bij reële orthogonaliteit) of op de eenheidscirkel (bij orthogonaliteit op de eenheidscirkel) zorgt voor extra complicaties. Deze bijzondere gevallen worden apart behandeld in hoofdstuk 11. Tenslotte worden enkele toepassingen beschreven in hoofdstuk 12: lineaire predictie, het Pisarenko modeleringsprobleem, lossless inverse scattering, network synthesis en H_∞ problemen. Deze toepassingen zijn gekend voor orthogonale polynomen maar vindt men niet terug in de basiswerken die reeds eerder werden genoemd. Bovendien geven de extra vrijheidsgraden die nu beschikbaar zijn (de polen van de rationale functies) heel wat meer flexibiliteit bij het zoeken naar geschikte oplossingen voor de gestelde problemen.

De vier auteurs zijn werkelijk specialisten in dit onderzoeksgebied en hebben een unieke samenwerking met een indrukwekkende

kende lijst van gezamenlijke publicaties. Zij hebben de theorie in belangrijke mate ontwikkeld. Het boek is een inleiding tot deze theorie en zal wellicht een standaardwerk worden in dezelfde klasse als de boeken van Szegő: *Orthogonal Polynomials* (AMS, 1939/1975), Akhiezer *The Classical Moment Problem* (Oliver and Boyd, 1969), Chihara *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, (Gordon and Breach, 1978), en Stahl en Totik *General Orthogonal Polynomials*, (Cambridge University Press, 1992). De opbouw is goed overdacht en het geheel leest vlot. Stellingen en bewijzen zijn goed te volgen zonder hulp van bijkomende literatuur. Het is alleen jammer dat geen concrete voorbeelden, zoals rationale uitbreidingen van de klassieke orthogonale polynomen, werden uitgewerkt. Toch een aanrader voor onderzoekers in wiskundige analyse.

W. Van Assch



F.G. Timmesfeld
Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type

Monographs in Mathematics, 95

Basel: Birkhäuser, 2001

389 p., prijs €111,28

ISBN 3-7643-6532-3

The main goal of this book is a revision of the major work carried out by the author over thirty years. It concerns a generalization of the notion of root subgroup as it occurs in Chevalley groups. His axioms are phrased in what he calls a system of abstract root subgroups. Generally speaking, by taking the centers of the radicals of certain parabolic subgroups of a (twisted) algebraic group G , a system of abstract root subgroups of G emerges.

The author has managed to provide a full classification of abstract groups generated by abstract root subgroups under a few mild non-degeneracy conditions. If the groups in question were assumed to be linear or algebraic, the work would have been considerably easier (although not trivial). It is a great achievement that Timmesfeld carried the classification through on the basis of merely group-theoretic assumptions.

The starting point of Timmesfeld's major work is difficult in that there is no obvious geometry at hand. Still, from his group-theoretic axioms, involving a detailed study of groups generated by three abstract root subgroups, axioms for a geometry on points (the abstract root subgroups) and lines arise. The construction of lines needs to be split into two cases. The favorite lines are products of commuting abstract root subgroups all of whose nontrivial elements lie in an abstract root subgroup. If these lines exist, the abstract root system is called non-degenerate. In the degenerate case, Timmesfeld resorts to the notion of a hyperbolic line, that is, the set of abstract roots subgroups belonging to a so-called 'rank 1 group' (a generalization of $SL(2, \mathbb{F})$). Geometric recognition theorems are used to characterize these point, line geometries as 'shadow spaces of buildings', the geometric constructs built and used by Tits to classify groups of Lie type. Results of Cuypers for the degenerate case and of Cooperstein and the reviewer for the non-degenerate case have been useful here. The final step in Timmesfeld's program is to recognize the abstract root subgroup systems coming from buildings.

The book makes Timmesfeld's theory more accessible than ever before. It starts with an elegant chapter on rank 1 groups, showing that there are still open research questions and classifying the groups $SL(2, F)$ among them.

The second chapter gives the basic definitions and facts on abstract root subgroups, including the three generator case, and a study of radicals. A remarkable result is that—under mild conditions—the radical of any group generated by a system of abstract root subgroups is nilpotent of index at most 2.

The classification is carried out in Chapter 3. In order to arrive to the buildings, only mild additional conditions, existence of sufficiently many hyperbolic pairs, are needed.

In the beginning of his mathematical career, Timmesfeld classified groups generated by a system of root involutions. In fact, these are root subgroups of Chevalley groups over finite fields of characteristic 2.

In Chapter 4, the author comes back to this early research and shows how the abstract root subgroups theory can be used to simplify the old proofs of characterizations of certain finite simple groups. In Chapter 5, the final chapter, some applications are discussed. Most notably, it is shown how a group acting quadratically on a module (which roughly means that the group is generated by elements of the form $1 + a$ with a^2 vanishing on the module) leads to a system of abstract root subgroups, and how this helps in determining such modules.

For someone interested in the link between group theory and geometry (of Tits buildings), this book is a great help. It is a source of inspiration for further research problems.

A.M. Cohen

R. Kane

Reflection Groups and Invariant Theory

CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC,

Springer-Verlag, 2001

379 p., prijs €39,54

ISBN 0-387-98979-X

This book by the Canadian mathematician Richard Kane is an elementary exposition of the theory of finite pseudo-reflection groups and their invariant theory as developed up to the beginning of the 1980's. It does not contain new results. It can be read by a beginning graduate student, it requires almost no prerequisites and never becomes hard to read. Basically all arguments are of an easily digestible algebraic nature. There are no exercises and no historical comments, but it has a good list of references to the not too recent literature.

This is certainly not the first text-book discussing these topics. Coxeter and Weyl groups appear in any book on groups of Lie type or quantum groups or on semisimple Lie algebras or Kac-Moody algebras. Reflections and reflection groups appear in any book on Euclidean geometry, on hyperplane arrangements or on invariant theory of finite groups. Rings of covariants of Weyl groups appear as cohomology algebras of flag manifolds and are discussed in books on Schubert calculus and algebraic combinatorics. The topics are centrally important in many different and attractive fields.

The basic nature and coherence of these topics became clear in 1968 when Nicholas Bourbaki published a volume of his *Éléments de mathématique* containing Chapters IV, V, VI of his treatise on

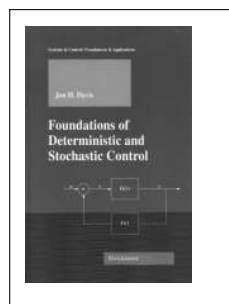
Lie groups and Lie algebras. Although it is embedded in a treatise on Lie theory, it is completely independent of it. In fact, Lie theory is only mentioned in the introduction and in the historical notes. It has a large number of non-trivial exercises and an appendix with explicit information on root systems. Borel calls it 'one of the most successful books by Bourbaki' (p. 379, A. Borel, *Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973*, Notices of the Amer. Math. Soc. **45** (1998), 373–380).

Nevertheless, the reading (and solving of the exercises) was considered as demanding and expositions presenting part of the material on a more elementary level kept appearing. Two of the more popular examples are Grove and Benson's *Finite reflection groups*, 1971 and 1985 ('We have tried to reach a middle ground between Coxeter and Bourbaki.'), and Humphreys' *Reflection groups and Coxeter groups*, 1990 ('The present book attempts to be both an introduction to Bourbaki and an updating of the coverage (. . .)').

The book under review is of the same kind. It incorporates improvements published since the first appearance of Bourbaki's book, for example Springer's theory of regular elements and the notion of generalized invariant of Kac-Peterson. On the other hand some topics that did appear in Bourbaki, like Tits systems and Hecke algebras, are completely left out in the book under review. Indeed, these topics may be too far removed from invariant theory. Also, advanced topics like Springer's representations are necessarily left out, since elementary algebraic accounts are not yet available. Similarly there is no place for the more recent invariant theory of two copies of the reflection representation. This has been studied in recent years in relation with Haiman's sensational results in algebraic combinatorics based on the symmetric group.

All in all it is a carefully written book that can be recommended to a graduate student for independent study, containing a good amount of interesting material.

A. Broer



J.H. Davis

Foundations of Deterministic and Stochastic Control

Systems & Control: Foundations & Applications,

Basel: Birkhäuser, 2002

421 p., prijs €107,-

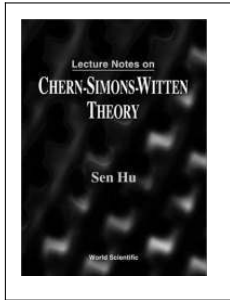
ISBN 0-8176-4257-9

Dit is een boek in de Birkhäuser serie Systems & control: Foundations and Applications. Volgens Birkhäuser is het doel van deze serie het publiceren van topkwaliteit state-of-the-art boeken. Dit boek is geen van beide. Het boek is gebaseerd op werk uit de jaren zestig en zeventig, dus het is zeker niet state-of-the-art. Topkwaliteit is het boek ook niet. Wat vooral opvalt is dat het enorm slordig is. Ik zal hiervan voorbeelden geven.

Het is niet duidelijk wat de voorkennis is die van de lezer verlangd wordt. De auteur noemt alleen twee 'contemporary texts' (uit 1969 en 1975!) die van hetzelfde niveau zijn, dus dat schiet niet op. Bij sommige hoofdstukken is de introductie sectie 1 en bij andere hoofdstukken komt hij voor sectie 1. Bijna geen enkele referentie is correct, er staan soms meerdere spelfouten in (zoals

Gaussian, Mathematics). Dit zijn natuurlijk kleine dingen, maar het geeft de slordigheid aan waarmee dit boek gemaakt is. Het lijkt alsof dit boek in één ruk geschreven is en er verder voor publicatie niemand meer naar omgekeken heeft. Als het boek wel goed geschreven was, had het interessant kunnen zijn. Het besteedt aandacht aan zowel discrete als continue tijd, zowel deterministische als stochastische systemen, zowel tijdvariante als tijdinvariante systemen, zowel eindig-dimensionale als oneindig-dimensionale systemen in hetzelfde raamwerk. Al met al: zeker geen aanrader.

M. Opmeer



Sen Hu
Lecture Notes on Chern-Simons-Witten Theory

Singapore: World Scientific, 2001
200 p., prijs \$ 26.60
ISBN 981-023909-2

Natuurkunde en wiskunde hebben elkaar altijd beïnvloed. Bekende voorbeelden waarbij aspecten van de wiskunde werden overgenomen in natuurkundige theorieën zijn de algemene relativiteitstheorie, gebaseerd op de differentiaalmeetkunde, en de quantummechanica, waarbij de functionaalanalyse een belangrijke rol speelt. Wigner beschreef dit verschijnsel onder de titel *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Maar de relatie is zeker niet eenzijdig: ontwikkelingen in de natuurkunde hebben ook geleid tot vooruitgang in de wiskunde. Een aantal voorbeelden hiervan werd door Dijkgraaf beschreven onder de titel *De Onredelijke Effektiviteit van de Fysica in de Moderne Wiskunde*, in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde 62/11 (1996) 255-257.

Het boek van Sen Hu gaat over één van deze voorbeelden. De Chern-Simons-Witten theorie uit de titel is de naam van een model uit de natuurkunde, de wiskunde die ermee verband houdt is de knopentheorie. Het boek bevat uitgebreide aantekeningen van de hand van Sen Hu van een aantal colleges die in 1989 gegeven werden door Edward Witten, de bekende Amerikaanse mathematisch fysicus (Fields Medal in 1990).

De natuurkundige beschrijving van de dynamica van elementaire deeltjes is gebaseerd op zogenaamde ijktheorieën. Maxwell's theorie van het electromagnetisme is daar een voorbeeld van, maar ook de zwakke en sterke interacties worden door ijktheorieën beschreven. De quantumveldentheorie, waar ijktheorieën een onderdeel van zijn, is al ruim vijftig jaar het werkterrein van fysici, maar is wiskundig nog altijd slecht onderbouwd. De Chern-Simons-Witten theorie is ook een voorbeeld van een ijktheorie, maar is niet zonder meer toepasbaar in de fysica. Deze theorie is in zekere zin een speelgoedmodel, en wordt vaak gebruikt om ideeën over de wiskundige structuur van de deeltjesfysica uit te proberen. Dit onderzoek heeft geleid tot een aantal interessante resultaten in de theorie van knopen.

Het doel van de colleges van Witten was de natuurkundige aanpak begrijpelijk te maken voor wiskundigen. Het boek begint daarom de klassieke en de quantummechanica in een wiskundig kader te plaatsen. Een belangrijk deel van het boek gaat over de

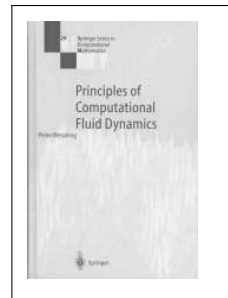
Chern-Simons-Witten theorie zelf, en in dat deel wordt een aantal technieken toegepast die in de wiskunde minder bekend zijn dan in de theoretische natuurkunde, zoals de Feynman padintegraal en Feynman diagrammen. Deze technieken worden in het boek in wiskundige termen beschreven en uitgelegd.

Dit boek is zeker niet het laatste woord over dit onderwerp. Daarvoor is het niet voldoende gestructureerd, en ontbreken er teveel voor de hand liggende zaken, zoals een duidelijke, motiveerende inleiding. Verder zou het nuttig zijn geweest als iemand de moeite had genomen het Engels van de auteur te corrigeren. Het boek bestaat voor ongeveer de helft uit reprints van researchartikelen en stukjes uit boeken. Het is nogal ongelukkig dat sommige artikelen niet volledig zijn opgenomen. Van een artikel van Axelrod, Della Pietra en Witten (overigens al bijna een boek op zich!) is ongeveer een kwart, zonder referentielijst, in het boek van Sen Hu terug te vinden. Daardoor verschaft dit deel van het boek niet de gewenste toegang tot eerder werk.

Overigens is dit boek ook niet het eerste woord over dit onderwerp: in 1990 verscheen bij Cambridge University Press een klein boekje van M. Atiyah, met als titel *The Geometry of Physics and Knots*. Het bespreekt hetzelfde onderwerp op een veel toegankelijker manier, en is, wat mij betreft, als inleiding over knopentheorie en de relatie daarvan met de natuurkunde een stuk leesbaarder en helderder dan het boek van Sen Hu.

Het boek van Sen Hu is duidelijk bedoeld voor wiskundigen, met als doel om duidelijk te maken waarom en hoe een natuurkundig probleem kan leiden tot interessante nieuwe inzichten in de wiskunde. Naar mijn mening is de schrijver daarin niet voldoende geslaagd. We zullen daarom onze toevlucht moeten nemen tot het boekje van Atiyah, of moeten wachten tot het moment dat Witten zelf zijn colleges in boekvorm uitbrengt.

M. de Roo



P. Wesseling
Principles of Computational Fluid Dynamics

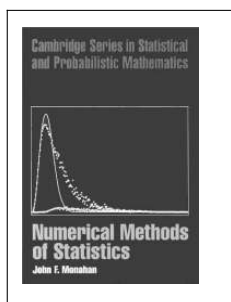
Berlin: Springer-Verlag, 2001
Springer Series in Computational Mathematics, 29
644 p., prijs € 128,35
ISBN 3-540-67853-0

This book focuses on the finite volume method to solve single-phase, Newtonian fluid problems. Although turbulence modelling is succinctly addressed in the first chapter, where an overview of the basic equations of fluid mechanics is given, the remainder of the book is devoted to laminar, single-phase Newtonian flow. Despite this restriction with respect to the subject matter the material covered in this comprehensive book is of such a generic nature that those who want to apply the methods to non-Newtonian fluids or multi-phase flows may benefit from the ideas explained in this book. After an introduction to the finite volume, in which both the vertex-centered and the cell-centered formulation are introduced, the stationary, as well as the non-stationary convection-diffusion equations are treated extensively. These equations are archetypes of equations, which have solutions possessing boundary layers in case convection is dominant. Capturing the high gradients can either be done by employing

a non-uniform mesh, by adding artificial viscosity or by limiting the slope when higher order discretizations are used. The concept of stability is treated for the unsteady convection-diffusion equation and the stability analysis is provided for a variety of time stepping schemes. A direct application of convection dominated flows is given by the incompressible Navier-Stokes equations discussed in Chapter 6. In addition to the special treatment required for convection dominated flows, the coupling between the incompressibility constraint and the pressure, which acts as Lagrange multiplier to enforce this constraint, is explained. Spurious pressure modes and staggering of the unknowns to circumvent this artifact are covered in detail. After a brief chapter on iteration, three chapters are devoted to hyperbolic systems, which allow for discontinuous solutions. Discretization of the Euler and Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates is explained thoroughly in Chapters 12 and 13. The final chapter addresses the issue of the limiting case for vanishing Mach numbers. For the purely incompressible case (Mach is zero) the speed of sound is infinitely large, leading to an elliptic character for the acoustic part, whereas for low, but for non-zero Mach numbers the speed of sound is very large, but finite. In this case the acoustic part becomes hyperbolic. This change of type has to be dealt with adequately in order to render accurate solutions, because for small Mach numbers the system becomes very stiff. A uniform approach applicable over a wide Mach range from incompressible to supersonic flow is discussed.

Principles of Computational Fluid Dynamics addresses primarily the mathematical aspects of the finite volume method and its application to flow problems. Implementational aspects are not considered. This book is therefore not an introduction to this emerging field of science, but will be much appreciated by those who already have a fair amount of experience with CFD. Apart from the wealth of information provided in the book, an extensive list of references is given which provides a good starting point for anyone wishing to master the principles of Computational Fluid Dynamics.

M. Gerritsma



J.F. Monahan

Numerical Methods of Statistics

Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 7

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

442 p., disk, prijs £50,-

ISBN 0-521-79168-5

This book is of interest to anyone who is involved in more or less sophisticated statistical analyses. It also contains much material for numerical mathematicians and computer scientists who are interested in applications. Numerical mathematics and statistical computing are both of utmost importance in modern statistics, especially because of the computationally intensive methods that are used. The textbook by Monahan nicely describes the interplay between these two areas. As the author states on page 9: 'For whatever purpose the reader will be using this book – whether devising new statistical procedures or delving deeper into how codes for certain algorithms work – the author has considerable

advice to offer.'

Chapter 1 is a kind of appetizer about algorithms, computers, and programming. Chapter 2 starts with discussing computer arithmetic and the way computers represent numbers. Here we encounter the first source of approximation to desired exact outcomes. In statistical computing, matrices and linear algebra play an essential role. Chapter 3 treats matrix operations, solving triangular systems, Gaussian elimination, Cholesky decomposition, matrix norms, and accuracy and conditioning. Chapter 4 contains more specialized material on solving linear equations with an application to ARMA models. Full elimination, banded matrices, Toeplitz matrices and sparse matrices are discussed. Chapter 5 is about regression computation. Here we meet the condition number, solving the normal equations, Gram-Schmidt orthogonalization, Householder transformation, and Givens transformation. The remaining part of this chapter becomes more statistical when regression diagnostics, hypothesis testing, and all possible regressions are discussed. But in the meanwhile conjugate gradient methods, the Doolittle method and the sweep operator are also treated. The topic of Chapter 6 is the eigenproblem and in particular the singular value decomposition.

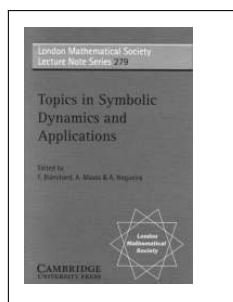
At this point the book switches from matrices to functions. Chapter 7 is about curve fitting. Approximation, interpolation, and splines are important issues. There is special attention for the computation of well-known probability functions. Optimization and solving linear equations is a topic that is of utmost importance to the maximum likelihood method and nonlinear least squares. Chapter 8 gives a nice introduction. Subsequently, Chapter 9 is about maximum likelihood and nonlinear regression. In this chapter the EM algorithm and generalized linear models are also discussed.

As a natural combination, Chapter 10 treats numerical integration and Monte Carlo methods. Especially in Bayesian procedures multivariate integrals have to be calculated. Monte Carlo methods can fruitfully be applied in order to evaluate certain multivariate integrals. This brings us to the subject of random number generators. The author presents 15 pseudorandom number generators. They are used to generate pseudorandom drawings from the uniform distribution on the interval (0,1). This is the basis for generating random variables from other distributions, which is discussed in Chapter 11. Chapter 12 continues the treatment of integration and Monte Carlo. It focusses on the statistical methods that can be applied. For example, kernel estimation methods are applied to estimate a density from Monte Carlo studies. The remaining part of this chapter is devoted to more specialized integration tools. Markov chain Monte Carlo (MCMC) methods, a modern topic in statistical computing, are discussed in Chapter 13. After a very short introduction to continuous Markov chains, Gibbs sampling, the Metropolis-Hastings algorithm, and acceptance/rejection sampling are treated, which is followed by diagnostics for monitoring MCMC methods.

Finally, Chapter 14 returns to a very basic issue, namely sorting, and some fast algorithms, i.e., the famous fast Fourier transform.

This inspiring book contains a lot of exercises. Algorithms are provided on a disk. The book gives an excellent survey and introduction for anyone involved in more advanced computational statistics, but it also offers a lot of subjects that are of interest to users of numerical methods.

A.G.M. Steerneman



F. Blanchard, A. Maass, A. Nogueira (eds.)
Topics in Symbolic Dynamics and Applications

London Mathematical Society lecture note series, 279

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

262 p., prijs £33,-

ISBN 0-521-79660-1

Symbolic Dynamics studies the translations (or, shifts) of infinite symbolic sequences. This is an extremely rich research area, and the present book demonstrates that most convincingly. The book contains the lectures given at the Summer School on Symbolic Dynamics and Its Application, held in Temuco, Chile, in January 1997. The book aims at those interested in the current state of the field. The book is not intended to be a textbook, two comprehensive textbooks appeared recently and have already become standard references: D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding* (1995), and B. Kitchens, *Symbolic dynamics* (1998). The book is organized in eight independent chapters, each with its own notation and bibliography.

Chapter 1 by V. Berthé deals with the sequences of low complexity, with emphasis on Sturmian and automatic sequences. This type of sequence appears in various fields ranging from computer science to biology. Several combinatorial methods for construction and study of such sequences are discussed.

Chapter 2 by B. Host introduces the fundamental notions of dynamical systems such as minimality, unique ergodicity, etc. These concepts are demonstrated using the substitution dynamical systems. One of the most famous examples of this kind is the Fibonacci sequence which is a fixed point of the substitution $1 \rightarrow 10$ and $0 \rightarrow 1$. This chapter also introduces the Bratelli diagrams and Bratelli-Vershik models.

Chapter 3 by M. Boyle studies the algebraic aspects of symbolic dynamics. This chapter introduces various types of subshifts, including the subshifts of finite type (SFT). The problem of isomorphism of SFT's, William's conjecture and recent counterexamples to this conjecture are discussed.

Chapter 4 by B. Kitchens continues the algebraic line but concentrates on the multidimensional dynamics, actions of $\mathbf{Z}^d$ on groups. The main examples are subgroups of $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{Z}^2}$. One has to say that the multidimensional symbolic dynamics is more intricate than in dimension one, and unexpected phenomena occur.

Chapter 5 by Z. Coelho studies the probabilistic laws of waiting times: how far does one have to look in the future to observe a given pattern in a realization of random process? It turns out that for a large class of stationary symbolic processes, one can establish very sharp asymptotic laws.

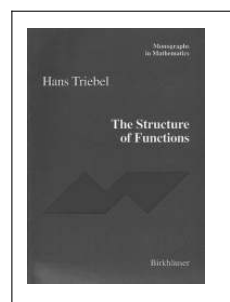
Chapter 6 by V. Bergelson shows the relations between ergodic theory on the one hand, and the Diophantine number theory and Ramsey theory, on the other. For example, the notions and methods developed in previous chapters can be used to prove that for irrational α , the sequence $x_n = \{n\alpha\}$, where $\{\cdot\}$ denotes the fractional part, is uniformly distributed in $[0, 1]$. Van der Waerden's theorem on the existence of a monochromatic arithmetic progression of an arbitrary length in an arbitrary coloring of $\mathbf{Z}$ with a finite number of colors, can also be proved using methods of dynamical systems.

Chapter 7 by Ch. Frougny starts with a description of expansions of real numbers in arbitrary base β , $\beta > 1$. There is a natural symbolic dynamical system associated to such β -expansions. In case β is a special algebraic number (Pisot, Salem or Perron), the symbolic system has very useful properties. The chapter finishes with a description of number representations with respect to an arbitrary sequence of numbers.

Chapter 8 by R. Labarca describes how the methods of symbolic dynamics can be used to obtain a classification of piecewise continuous and strictly increasing interval maps.

This book deals with various aspects of the modern theory of symbolic dynamics. Each chapter starts with basic definitions and does not assume any extensive prior knowledge. Nevertheless, the book is not elementary. In some cases, the learning curve is rather steep, which is inevitable given the volume and the scope of the book. Extensive bibliographies provided in each chapter should help with further reading. This book is a carefully prepared and nicely written overview of a fascinating field.

E.A. Verbitskiy



H. Triebel

The Structure of Functions

Monographs in Mathematics, 97

Basel: Birkhäuser, 2001

425 p. prijs €98,44

ISBN 3-7643-6546-3

The title of this book refers to the quarkonial decomposition of functions. For f on $\mathbf{R}^n$ an (s, p) - β -quarkonial decomposition is an expansion

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0^n} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \lambda_{jm}^{\beta} \left(2^{-\nu(s-\frac{n}{p})} \psi^{\beta}(2^j x - m) \right), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

The expression in big brackets is called an (s, p) - β -quark. Starting with a compactly supported function $\psi \geq 0$ on $\mathbf{R}^n$ such that $\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \psi(x - m) = 1$, $\psi^{\beta}(x)$ is defined as $x^{\beta} \psi(x)$. Next the $\{\lambda_{jm}^{\beta}\}$ are sequences that belong to appropriate normed sequence spaces, and the norm of $\{\lambda_{jm}^{\beta}\}$ is used to norm f .

In Chapter 1 this decomposition is studied. It gives rise to the Besov spaces B_{pq}^s and Triebel-Lizorkin spaces F_{pq}^s and it is proven that up to equivalence the norms are independent of the choice of ψ ; quarkonial decomposition applies to distributions too. Next the B and F -spaces are studied on domains and manifolds as well. Moreover, traces of such functions on so called d -sets, roughly speaking sets of Hausdorff dimension d equipped with a suitable measure, are studied.

Chapter 2 deals with sharp inequalities in the spaces B_{pq}^s and F_{pq}^s between quantities involving the non-increasing rearrangement f^* and the 'growth envelope function' on the one hand and the norm in these spaces on the other. This leads to a complete answer to the question which of the B and F spaces consist of L^p , bounded, or (Hölder) continuous functions on $\mathbf{R}^n$.

The third chapter deals with what is called 'the fractal drum'. Consider a smooth bounded domain G in $\mathbf{R}^n$ as a membrane with a mass distribution $m(x)$ defined on G . Vibrations of the membrane are described by

$$\Delta v(t, x) = -m(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2}, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times G.$$

Eigenfrequencies are obtained via the substitution $v(t, x) = e^{i\lambda t} u(x)$. This leads to the eigenvalue problem

$$(-\Delta)^{-1}(m(x)u(x)) = \lambda^2 u(x).$$

'Fractal' refers to mass distributions supported on d -sets $X \subset G$. Then the above equation has to be handled carefully. But the result is nice,

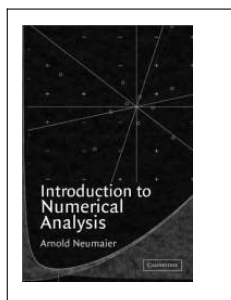
$$\lambda^2 \sim k^{-1+\frac{n-2}{d}}, \quad \text{if } \max\{0, n-2\} < d < n.$$

The Dirichlet problem on domains with fractal boundary is then solved as a particular case.

The short last chapter deals with truncation and semi-linear operators and their boundedness and continuity properties with applications to equations like

$$(-\Delta + Id)u = c|u| + h.$$

Triebel is the expert on this subject. He wrote many papers and books about function spaces and the structure of functions. Unfortunately he chose to assume that the reader knows four of his books by heart, as the many references to these books testify. The effect is that the book will not be appealing to many. This is too bad, because the idea of quarkonial decomposition is really beautiful and the results that are discussed throughout the book look very interesting. Moreover, in between all these references it still transpires that Triebel knows how to explain things. *J. Wiegerinck*



A. Neumaier
Introduction to Numerical Analysis
Cambridge: Cambridge University Press, 2001
363 p., prijs £27,-
ISBN 0-521-33610-4

Voor een introductie in de numerieke wiskunde kun je kiezen uit een dozijn boeken. Er zijn heel wat boeken met dezelfde titel als de bovenstaande boeken of met een titel die er een lichte variatie op is. Met zo'n ruime keuze getuigt het van lef om met een volledig nieuw boek op de markt te komen, zoals Neumaier doet. Dat heeft alleen zin als het boek zich ergens weet te onderscheiden van alle andere.

Stoer en Bulirsch hebben een kwart eeuw geleden al een boek geschreven over numerieke wiskunde, dat is verschenen in de serie *Texts in Applied Mathematics*. Ze komen nu met een nieuwe editie (de derde). De verschillen met de vorige editie zijn klein. Er zijn wat fouten uit de tekst gehaald en er is een enkele paragraaf toegevoegd. De grootste wijziging betreft de uitgebreide sectie over Krylov-subspace methoden, waarin nu speciaal aandacht wordt besteed aan GMRES, QMR en Bi-CG(STAB).

Het is niet verrassend dat de inhoud van de twee boeken voor een groot deel overlapt. Beide boeken bevatten hoofdstukken over foutenanalyse, numerieke interpolatie, numerieke integratie, het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en het zoeken van nulpunten. Stoer en Bulirsch voegen daar nog aan toe het oplossen van eigenwaardenproblemen, gewone differentiaalvergelijkingen en het gebruik van iteratieve methoden voor het oplossen van grote stelsels lineaire vergelijkingen. In het voorwoord belooft Neumaier deze onderwerpen aan te snijden in een vervolg op zijn boek.

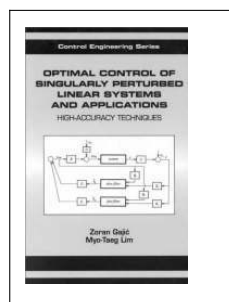
Er zijn meer overeenkomsten tussen beide boeken. Stellingen en algoritmen worden geïllustreerd aan de hand van uitgebreide voorbeelden. Aan het eind van elk hoofdstuk staat een behoorlijke lijst met opgaven. Ze variëren in moeilijkheid, maar zijn over het algemeen goed te doen.

Toch zijn er opmerkelijke verschillen. De introductie van Stoer en Bulirsch in de numerieke wiskunde is behoorlijk uitputtend. Alle onderwerpen worden nauwgezet en uitgebreid behandeld. Het voordeel is dat de introductie behoorlijk volledig is. Echter door de vele subsecties en subsubsecties wordt het geheel soms wat onoverzichtelijk.

Daar tegenover staat het boek van Neumaier, dat compacter is en een heldere structuur heeft. Dezelfde onderwerpen worden minder uitgediept, maar alle belangrijke algoritmen staan erin. Waarschijnlijk is zijn boek daardoor meer geschikt als cursusboek dan dat van Stoer en Bulirsch. Wat daarin ook voor Neumaier pleit, is het feit dat hij in zijn algoritmen, wiskundige notaties en opgaven aansluiting zoekt bij MATLAB. Het toepassen van de theorie wordt daardoor veel eenvoudiger. Wat verder nieuw is in het boek van Neumaier, is de consequente toepassing van intervalanalyse bij het berekenen van fouten.

Beide boeken hebben kwaliteit, maar welke van de twee het meest geschikt is hangt af van de doelgroep. Voor een eenvoudige cursus numerieke wiskunde prefereer ik Neumaier, maar voor een uitgebreidere studie zou ik naar Stoer en Bulirsch grijpen.

A. de Niet



Z. Gajić, M.T. Lim
Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications: High-Accuracy Techniques
New York: Marcel Dekker, 2001
309 p., prijs \$ 150,-
ISBN 0-8247-8976-8

Many dynamical systems exhibit both fast and slow dynamics. The analysis based on separating the fast and slow dynamics has a long history of almost a century. Major contributions came around 1950 in the seminal work of Tikhonov. The singular perturbation method was first studied in the context of control by Kokotović.

There are many known results for singularly perturbed control systems. For instance we refer to a classical textbook such as *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design* by Kokotović, Khalil, and O'Reilly (SIAM). The book under review looks at linear systems with singular perturbations and looks at several

optimal control problems such as linear quadratic optimal control and filtering problems. Associated problems such as cheap control or high-gain feedback are also studied. Finally, more recent developments such as H_∞ optimal control are investigated.

This book aims at an audience which is already familiar with singular perturbations. For instance, the book does not include motivations for singular perturbation techniques or recapitulate the classical theory. It immediately starts by noting that classical techniques give convergence which is linear in terms of the singular perturbation parameter ϵ . The rest of the book then focuses on the recursive tools derived by the first author and his co-workers for obtaining higher-order convergence. This technique to obtain higher-order convergence is referred to as the Hamiltonian approach which is based on an exact decomposition between the slow and fast dynamics and then the recursive solution of the associated equations with each recursion step increasing the order of convergence. Several numerical examples are included in the book.

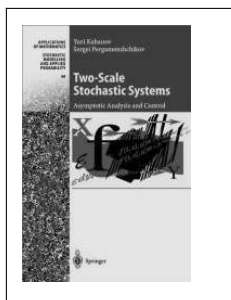
The book could have included some more motivation and clarifications of the results. Very often it just presents the resulting equations needed in the solution without much explanation. The basic objective of the book appears to be to present a complete description of the results obtained by Zoran Gajić and his co-workers. Finally, I would like to add that the book is typeset quite nicely.

A.A. Stoorvogel

tems. It is important to note that the case in which the diffusion coefficient in the stochastic differential equation of the fast variable depends on the parameter as ϵ^δ with $\delta = 1/2$, is covered by the book H.J. Kushner, *Weak convergence methods and singularly perturbed stochastic control and filtering problems* (Birkhäuser, 1990). Hence the authors concentrate attention in their book on the case $\delta > 1/2$.

Chapter 0 presents a few motivating problems including the Liénard oscillator, a filtering problem, and a stochastic approximation procedure. Chapter 1 presents moment bounds for nonlinear equations, bounds for linear systems, and growth rates for the maximal function. Chapter 2 presents the Tikhonov theory for stochastic differential equations: Uniform convergence of the fast variables outside the boundary layer and uniform convergence of the slow variables on the interval. Chapter 3 presents logarithmic rates on the large deviation probabilities. Chapter 4 presents uniform expansions of both state components on the full interval. Chapter 5 presents limit theorems for the attainable densities of singularly perturbed control systems in the formulation of stochastic control as developed by V.E. Beneš. Chapter 6 presents results for selected applications including PDEs, fast Markov modulations, filtering, and the linear-quadratic regulator.

The strength of the book is in the analysis of Tikhonov theorems for stochastic systems. In this area the only other book is that of Kushner (now retired from Brown University). The text is very well structured, runs very smooth, and the exposition allows detailed scrutiny of all proofs. The book is expected to become a basic reference on two-scale stochastic systems. J.H. van Schuppen



Y. Kabanov, S. Pergamenschikov
Two-Scale Stochastic Systems
Asymptotic Analysis and Control

(Stochastic Modelling and Applied Probability, 49)

Berlin: Springer-Verlag, 2003

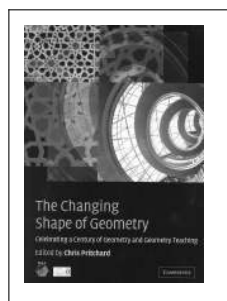
266 p., prijs €64,95

ISBN 3-540-65332-5

The book presents Tikhonov theorems for stochastic systems with two time scales when a parameter decreases to zero. The authors are mathematicians of the Russian school of probability and control, though now affiliated with different universities in France. The topic of the book is relevant for the research areas of stochastic and of control and system theory. The book is addressed to researchers and graduate students and has the character of a research monograph.

The stochastic systems are described by stochastic differential equations driven by Brownian motions. The state process is distinguished into two components, the first one termed the slow state component and the second one termed the fast state component. The parameter ϵ occurs in the stochastic differential equation for the fast state component. In the literature such systems are termed *singularly perturbed*. For deterministic nonlinear dynamic systems described by ordinary differential equations, A.N. Tikhonov in his thesis research of the late 1940's proved that if the parameter goes to zero then the behavior of the fast component can be described by an algebraic equation, while the differential equation for the slow component is simplified outside the boundary layer.

The book presents the corresponding results for stochastic sys-



C. Pritchard (ed.)
The Changing Shape of Geometry
Celebrating a Century of Ge-
ometry and Geometry Teaching

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

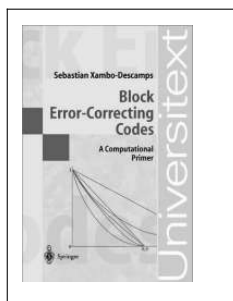
557 p., prijs £24.99

ISBN 0-521-53162-4

Verzamelbundels – of het nu om muziek, literatuur, kunst of wetenschap gaat – hebben bij mij bijna altijd hetzelfde effect. Eerst onderga ik een zeker enthousiasme en daarna volgt een bepaalde mate van teleurstelling. Zo ging het mij ook weer bij dit boek met de nieuwsgierig makende titel *The Changing Shape of Geometry*. Het gaat hier om een verzameling artikelen uit de achter ons liggende eeuw, hoofdzakelijk afkomstig uit de *Mathematical Gazette* en *Mathematics in School*. Mijn aanvankelijke enthousiasme ontstond uit de herkenning van een aantal bekende en minder bekende, soms interessante onderwerpen en prachtige problemen uit de meetkunde, maar mijn deceptie groeide naarmate ik meer naar het geheel keek. Het totaal is een subjectieve en eenzijdige selectie uit het Engelse taalgebied, waarbij een overzicht van de ontwikkelingen en een degelijke samenhang ontbreken. Ik tel maar liefst zo'n negentig verschillende auteurs. Kort gezegd, dit boek is een meetkundige potpourri. Dat karakter wordt verder versterkt doordat er nog een hoofdstuk over het meetkunde-onderwijs in Engeland toegevoegd is en doordat de tekst na elk

hoofdstuk onderbroken wordt door een reeks problemen, die de auteurs graag mee zouden nemen naar een onbewoond eiland. Daarbij zijn een aantal befaamde theorema's van Ceva, Menelaus, Pascal, Euler, Feuerbach en andere evergreens, veelal van uitbreidingen en verdieping voorzien. Een verrassing was het om bij het 'zes cirkels probleem' uit 1840 van Miquel opeens een stukje Nederlandse tekst – en nog wel van een vwo-leerling – te zien. Deze bijdrage kwam van Aad Goddijn, die voor zoveel fraaie bijdragen aan het meetkundeonderwijs heeft gezorgd. Deze 'Desert Island Problems' zijn ondergebracht in categorieën met de titels: 'Greek Geometry', 'Elementary Euclidean Geometry', 'Advanced Euclidean Geometry', 'Non-Euclidean Geometry & Topology' en 'Geometrical Physics'. De historische artikelen zijn over zes delen verdeeld. Deel I heet 'The Nature of Geometry' en bevat een beschouwing uit 1925, getiteld 'What is Geometry?'. De auteur is niemand minder dan de grote getaltheoreticus Hardy, die verklaart dat hij eigenlijk niets van meetkunde weet, maar daarna toch zijn mening ten beste geeft. Dan 'The History of Geometry' met een bijdrage van Darboux uit 1904 over de ontwikkeling van de meetkundige methoden. Deel III behandelt 'Pythagoras' Theorem', waaraan onder meer Rouse Ball heeft bijgedragen. De delen IV en V gaan over 'The Golden Ratio' en 'Recreational Geometry'. In het laatste deel 'The Teaching of Geometry' vinden we onder meer een kort artikel van Bertrand Russell uit 1902, waarin hij een aantal onvolkomenheden in Euclides' *Elementen* aanwijst. Dit laatste (onderwijs)deel begint met een inleiding van Michael Price, waarin een overzicht gegeven wordt van de opvattingen over en de uitvoering van het Britse meetkundeonderwijs gedurende de twintigste eeuw. Interessant is dat deze historie parallelen vertoont met die op het vasteland van West-Europa. Ook daar werd door onderwijsvernieuwers en wiskundendidactici – ook Felix Klein behoorde daartoe – gestreefd naar een longitudinaal gepland meetkunde-onderwijs. Dit betekent dat men wilde starten met een aanschouwelijk-intuïtieve fase, later overgaand op een meer systematische aanpak en pas voor de leerlingen van een jaar of zeventien afsluitend met een logisch-deductieve opbouw. Daarbij wilde men al op jonge leeftijd, dus in het primair onderwijs met die verkennende fase beginnen, iets wat in Nederland thans enige vorm krijgt. Zo vond ik, naast allerlei leuke opgaven, in dit boek nog iets van mijn gading, zoals toch ook weer in verzamelbundels het geval kan zijn.

E. de Moor



S. Xambo-Descamps
**Block Error-Correcting Codes
 A Computational Primer**
 Universitext
 Berlin: Springer-Verlag, 2003
 266 p., prijs €42,75
 ISBN 4-540-00395-9

Dit boek presenteert in vier hoofdstukken de beginselen van de foutverbeterende blokcodes. Het is geschreven om als lesmateriaal te dienen voor een inleidende cursus coderingstheorie voor derde- en vierdejaars wiskundestudenten. De vier hoofdstukken van het boek bevatten respectievelijk de introductie van foutverbeterende blokcodes, de theorie van eindige lichamen, cyclische

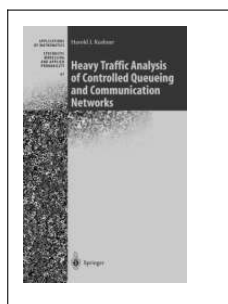
codes en alternerende codes.

De beoogde cursus steunt behalve op het boek op aanvullend computermateriaal. Op de site <http://www.wiris.com/cc> zijn de hoofdstukken van het boek in PDF-formaat te bekijken. De bijbehorende voorbeelden kunnen direct uitgevoerd worden met het programma WIRIS, dat heel simpel werkt en makkelijk te leren is (met de introductie op het programma die is opgenomen in het boek). Studenten kunnen de voorbeelden aanpassen en opnieuw uitvoeren, en de opgaven bieden mogelijkheden voor individuele opdrachten en groepswork. De schrijver richt zich met name op het overbrengen van begrip van de algoritmen op dit vakgebied, wat volgens hem de studenten meer inzicht geeft in de wiskunde achter de algoritmen, en hen voorbereidt op het maken van verdere applicaties. Deze praktische aanpak van het combineren van wiskunde en programmeren is natuurlijk experimenteel, en lijkt te passen in een trend van het gebruik van computervaardigheden bij het aanleren van wiskunde, maar heeft als nadeel dat het boek soms een wat summier uitleg geeft van theorie, zodat het uitvoeren en verdiepen in de oefeningen echt nodig is om het begrip te kweken.

De schrijver heeft goed naar andere bekende werken gekeken die een inleiding bieden op dit gebied, zoals *The theory of Error Correcting Codes* van MacWilliams en Sloane, en Van Lints *Introduction to Coding Theory*. De literatuurlijst bevat slechts 31 boeken, waarvan de meeste gericht zijn op het bieden van een duidelijk overzicht van onderwerpen in de coderingstheorie, combinatoriek, groepentheorie, algebraïsche meetkunde en natuurlijk foutverbeterende codes. Deze verwijzingen kunnen waardevol zijn voor studenten die proberen wegwijs te worden in de coderingstheorie, zeker als aanvulling op dit boek op plekken waar de theorie slechts kort beschreven wordt en men vooral met algoritmen en computervoorbeelden werkt.

Al met al lijkt het een aantrekkelijke manier om het gebied van coderingstheorie te verkennen, geïnteresseerden kunnen natuurlijk altijd een kijkje nemen op de al eerder genoemde website, waar niet alleen de voorbeelden per paragraaf staan, maar ook een niet-printbare versie van het boek te downloaden is.

E. Jochemsz



H.J. Kushner
**Heavy Traffic Analysis of Controlled
 Queueing and Communication Networks**
Stochastic Modelling and Applied Probability,
 47
 Berlin: Springer-Verlag, 2001
 513 p., prijs €80,20
 ISBN 0-387-95264-0

This book develops the heavy traffic approach to the modelling and analysis of queueing and communication networks. Emphasis is placed on strong solution methods. Types of networks covered include controlled and uncontrolled, open and closed, polling systems, networks with multiple arrival classes, bursty or batched arrivals, server interruptions, multiple servers, shared buffers, and many others. Kushner is a well-known expert in the field.

The scope of the book is impressive, and yet the reader is intro-

duced to the subject with care. The introduction presents a pleasing and intuitive description of the heavy traffic limiting procedure, including a discussion of how to apply it in practice. Several concrete examples are given. Helpful examples appear throughout the book as well, and the list of references is expansive.

The prospective reader should have some prerequisite knowledge of probability and measure theory. The author devotes three chapters to summarizing the mathematical background from the theory of stochastic processes necessary for his subject: weak convergence and martingales, stochastic differential equations, and invariant/ergodic theory. Some prior exposure to this theory will help the reader as well, but is not strictly necessary. Many results are stated with proof, but many are also stated without. Where proofs are omitted, the author provides comments and references to aid the reader in completing them.

This book is well organized and carefully written; the style is clear. It is suitable both as an introduction to the topic and as a reference.

C. Gromoll

J. van de Craats (ed)

Vakantiecursus 2003: Wiskunde in het Dagelijks Leven

CWI Syllabus 52

Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2003

114 p., prijs €15,85

ISBN 90-6196-520-9

Wiskunde in het dagelijks leven was het thema van de vakantiecursus 2003. Deze cursus voor leraren wordt jaarlijks twee keer gegeven, een keer op het CWI en een keer op de TU/e. In acht voordrachten werd door de sprekers getoond dat wiskunde overal in het dagelijks leven te vinden is. Dit boekje is de begeleidende syllabus van deze cursus. Een aantal bijdragen is intussen, soms licht aangepast, ook elders in druk verschenen (NAW december '03, maart en juni '04 en de Nieuwe Wiskrant maart '04).

De kleinste kwadratenmethode speelt in twee bijdragen een grote rol. Het GPS (Global Positioning System) gebruikt onder meer deze methode om met behulp van satellietgegevens onze plaats op aarde op elk moment met verbazingwekkende nauwkeurigheid te kunnen bepalen. Ook bij het voorspellen van reistijden op snelwegen speelt de methode een rol. Uit meetgegevens van zogeheten lusdetectoren kan op twee voor de hand liggende manieren een voorspelling van de reistijd worden gegeven. De kleinste kwadratenmethode wordt vervolgens ingezet om de twee voorspellingen te combineren tot een betere.

In een volgend artikel zien we dat ook speltheorie in verkeersmanagement een rol kan spelen. Verkeersmaatregelen beïnvloeden verkeersgedrag, waardoor na invoering van de maatregelen de verkeersstromen zullen veranderen. Optimalisatie vereist dan ook het anticiperen op het gedrag van de verkeersdeelnemers. Of het politieke bedrijf zich bij verkeersbesluiten door wiskunde laat leiden is nog maar de vraag, maar politiek en wiskunde hebben wel degelijk iets met elkaar te maken, zo blijkt uit een ander artikel. Discrete wiskunde wordt gebruikt om de relatie tussen stemmenaantal en de politieke macht op grond van dit aantal te bestuderen. Deze relatie leidt soms tot verrassingen. Zo nam de macht van Luxemburg in de Europese Unie in 1973 toe ondanks het feit dat Luxemburg er qua stemmenaantal relatief op achteruit ging...

Analyse, (partiële) differentiaalvergelijkingen en integralen

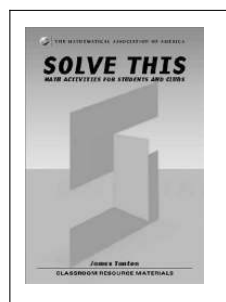
zijn de wiskundige instrumenten die in twee bijdragen tevoorschijn komen. Toevallig (of misschien juist ook niet) zijn beide bijdragen voortgekomen uit de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. In de eerste gaat het om de wens van een rozenkweker om de productie van zijn rozen te optimaliseren bij beperkte kosten. Er wordt een model ontwikkeld dat, gegeven de klimaatcondities, de productie van de totale massa aan rozen in de kas beschrijft. In de andere bijdrage wordt een drietal modellen voor de zogenaamde eurodiffusie beschreven. In het eerste 'eurojaar' haalde dit project, waar veel schoolklassen gegevens voor leverden, regelmatig de pers.

Eveneens volop in de belangstelling van de media, maar helaas niet om de wiskunde, waren de zigzagstrips van de Nederlandse schaatsters. In 1998 droegen de Nederlanders als enige deze strips op het hoofd en de onderbenen. Waarschijnlijk (maar het is niet met zekerheid te zeggen) hebben de strips bijgedragen aan de successen in Nagano. Tegenwoordig hebben de snelle schaatspakken geen zigzagstrips meer, maar zijn diverse ruwe stoffen in de pakken verwerkt. De technieken achter de aërodynamica en de daarbij gebruikte wiskunde worden in dit boekje belicht.

Kortom, veel variatie. Variatie in onderwerpen, variatie in wiskunde, maar ook variatie in diepgang. Sommige bijdragen vereisen dat je er echt even voor gaat zitten en andere lees je gezeten in een gemakkelijke stoel. Variatie soms ook binnen een artikel. Het artikel over de nieuwe generatie telecommunicatietechnieken en -diensten biedt een uiterst gevarieerd scala aan toepassingen van de wiskunde. De gebruikte wiskunde betreft onder meer codering, cryptografie en wachtrijtheorie.

Ter afsluiting kan ik de woorden van K.J. Batenburg, die in NAW juni 2004 de syllabus van de vakantiecursus 2002 besprak, van harte onderschrijven: "de organisatoren van de vakantiecursus zijn erin geslaagd een programma samen te stellen dat voor een breed publiek interessant is. Het boekje bevat voor elk wat wils en kan door leraren zowel gebruikt worden om hun eigen achtergrondkennis te verdiepen als om hun leerlingen van interessante opdrachten te voorzien."

E. Lambeck



J. Tanton

Solve this: Math Activities for Students and Clubs

Washington DC: Mathematical Association of America, 2001

232 p., prijs \$ 29,95

ISBN 0-883-85717-0

De schrijver van dit boekje heeft veel ervaring met het organiseren van zogenaamde 'math clubs'. In het boek zijn naar eigen zeggen de dertig meest succesvolle onderwerpen voor bijeenkomsten van deze clubs gebundeld. Het boek bestaat uit drie gedeelten. Het eerste gedeelte bevat alleen problemen. De problemen zijn over het algemeen erg leuk. Ze zijn zo gekozen dat er vaak met een groep mensen een 'experiment' gedaan kan worden dat de wiskunde illustreert, denk bijvoorbeeld aan: knippen/plakken, kleding aan/uittrekken, snoepjes uitwisselen en handen schudden. De oplossingen van de problemen zijn over het algemeen niet gemakkelijk en daarom bevat het tweede gedeelte hints. Het derde

gedeelte geeft de oplossingen en soms een discussie van wat diepere wiskunde achter het probleem. Voorbeelden van deze wat diepere wiskunde zijn: fractale dimensies, de vierde dimensie en de Borsuk-Ulam stelling. Het boek bevat verder her en der extra uitdagende en soms zelfs onopgeloste problemen. Er wordt geen enkele voorkennis verondersteld van de kant van de lezer en het boekje is er totaal niet op gericht de lezer of leerling veel kennis over wiskunde bij te brengen, het doel lijkt te zijn deze zelf tot nadenken te brengen en, naar mijn mening, is de auteur daar goed in geslaagd. Het is een onmogelijke opgave een goed idee te geven van de opgaven en onderwerpen uit het boek en dat probeer ik dus maar niet. Wel kan bijvoorbeeld opgemerkt worden dat getaltheorie volledig ontbreekt.

J. Tuitman



B. Ernst
De Interessantste Bewijzen voor de Stelling van Pythagoras

Utrecht: Epsilon Uitgaven, 2002

96 p., prijs €12,50

ISBN 90-5041-067-7

De schrijver pretendeert, zoals de titel al aangeeft, een verzameling bewijzen van de stelling van Pythagoras bijeen gebracht te hebben die allemaal de moeite waard zijn. Het boekje is bedoeld voor wiskundestudenten, leraren en algemeen geïnteresseerden. Enige kennis van elementaire meetkunde is dan ook zeker noodzakelijk om alles te kunnen begrijpen. Daarom is dit boek ook niet zonder meer geschikt voor bijvoorbeeld scholieren.

In totaal staan er 29 bewijzen in het boek. De verschillende bewijzen die behandeld worden, zijn ook echt verschillend. Zowel de leeftijd als de methode die gebruikt wordt voor het bewijs loopt erg uiteen. Er zijn bewijzen bij van honderden of duizenden jaren oud, maar ook van enkele tientallen jaren. Sommige bewijzen zijn puur meetkundig, andere deels of geheel algebraïsch. Of ze ook allemaal interessant zijn is deels een kwestie van smaak, maar de meeste bewijzen bevatten wel een onverwacht element, zoals een typische hulplijn, een cirkel of een algebraïsche identiteit die niet zo voor de hand ligt. De schrijver heeft vooral zijn eigen smaak gevolgd als leidraad bij de keuze van de opgenomen bewijzen, hoewel alle 'klassiekers' er volgens mij in staan.

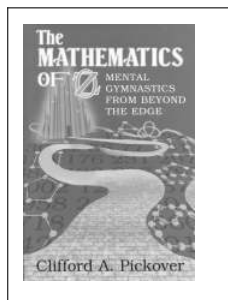
Alle bewijzen zijn met een volgnummer in de marge aangegeven om het opzoeken te vergemakkelijken. Over het algemeen zijn de bewijzen helder en duidelijk opgeschreven en de tekeningen van meetkundige constructies overzichtelijk. Meestal blijft er daardoor niet zo veel te puzzelen over. Gelukkig is de tekst bij de bewijzen zo opgebouwd dat de lezer volop gelegenheid krijgt om zelf eerst na te denken over hoe het bewijs zou kunnen gaan dat bij de betreffende tekening hoort. Eerst wordt de historie en achtergrond van de bewijzen verteld en daarna komt pas de wiskunde.

De typografie van het boekje is, zoals bij wel meer Epsilon-uitgaven, matig: standaard $\text{\TeX}$ in iets te grote letters. Er is niet heel veel aandacht aan besteed. Dat is jammer, want de inhoud verdient beter. Je kunt het boekje in één ruk van voor naar achter uitlezen of, zoals ik gedaan heb, af en toe een paar bewijzen

lezen. Daarbij maakt het meestal niet uit in welke volgorde je ze leest. Soms wordt er echter een deelresultaat uit een vorig bewijs gebruikt. Verder zijn de bewijzen in de laatste paar hoofdstukken iets gecompliceerder dan de voorgaande. Dus al met al is de 'natuurlijke' volgorde misschien wel de handigste.

Het is een leuk boek voor op de koffietafel. Ik heb het met veel plezier gelezen.

J. Brands



C.A. Pickover

The Mathematics of Oz.
Mental Gymnastics from Beyond the Edge

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

351 p., prijs £21,95

ISBN 0-521-01678-9

Dit boek is een leuke verzameling puzzels, die op een speelse wijze worden gepresenteerd. De opzet is als volgt. Dorothy uit Kansas wordt ontvoerd door een buitenaards wezen, Dr. Oz. In elk van de 108 korte hoofdstukken van het boek legt deze haar vervolgens een (wiskundig) raadsel voor. Als ze het oplost, stelt hij haar doorgaans een beloning in het vooruitzicht en als ze faalt soms een gruwelijke straf.

Nu lijkt het misschien alsof de nadruk in dit boek ligt op de blijde avonturen van Dorothy in plaats van op de puzzels, maar dit is niet het geval. Het is knap van de auteur hoe hij in een luchtige stijl steeds in een paar zinnen heel helder het probleem formuleert. Je leest elk hoofdstuk werkelijk in enkele minuten, om vervolgens, als je wilt, uren te piekeren over de oplossing van het raadsel.

De puzzels zijn heel divers, zowel wat betreft moeilijkheid als wat betreft de soort wiskunde die erbij komt kijken. Om met dit laatste te beginnen: er zijn een boel intelligentietest-achtige puzzels à la 'Wat zijn de ontbrekende symbolen in dit diagram?', maar bijvoorbeeld ook een aantal vragen over getallen, zoals 'Kun je een rij aangeven van 10.000 opeenvolgende natuurlijke getallen die niet priem zijn?'. Een indicatie van de moeilijkheid van een probleem wordt gegeven door een aantal sterren, variërend van 1 (uitdagend) tot 4 (bijna onoplosbaar).

Wat echt een heel goed punt van het boek is, is dat het leesbaar is voor iedereen met enige affiniteit voor wiskunde. Mocht iemand nog niet weten wat een priemgetal is: het wordt even uitgelegd. Maar dit betekent niet dat het boek oninteressant is voor mensen die veel meer weten. Achterin bevindt zich nog een groot aantal bladzijden met oplossingen van de puzzels. Ook dit stuk heeft een heldere stijl. Meestal gaat de auteur behalve op de puzzel zelf ook nog in op verwante vragen en doet hij voor wie meer wil weten suggesties in de vorm van aanbevolen boeken en internetpagina's.

Het boek lijkt mij geschikt voor wiskundeleraren om ideeën te krijgen voor inspirerende puzzels voor leerlingen. Ik denk dat het ook leuk is voor een middelbare scholier met interesse voor wiskunde. Ieder die graag zijn brein op de proef stelt, zal er mijns inziens plezier aan beleven.

E. Reuvers