

Pieter Moree

Max-Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7
D-53111 Bonn, Duitsland
moree@mpim-bonn.mpg.de

Boekbespreking

De nulpunten van Riemann

In een jaar tijd zijn er vier nieuwe populair-wetenschappelijke boeken over de Riemannhypothese verschenen. Hoogste tijd om deze werken kritisch tegen het licht te houden. Pieter Moree doet onderzoek in de analytische getaltheorie aan het Max-Planck-instituut in Bonn.

Recentelijk zijn er maar liefst drie boeken voor een algemeen publiek uitgekomen over priemgetallen, hun verdeling en de *Riemannhypothese* (RH). Ik denk dat deze hausse iets te maken heeft met het bewijs van de laatste stelling van Fermat door Wiles (en Taylor) en de reactie van de publieke opinie daarop. Het bleek duidelijk dat er een levendige belangstelling onder het algemene publiek is voor publicaties over zeer beroemde wiskundige problemen die enigszins begrijpelijk zijn voor een lezersgroep zonder een voortgezette wiskunde achtergrond. Het vierde boek handelt over Eulers constante en vele zaken die daar aan gerelateerd zijn (logaritmen, Gammafunctie) en bevat een aantal hoofdstukken die aan de RH gewijd zijn.

De Riemannhypothese en priemgetallen

Door de meeste wiskundigen wordt de RH als het belangrijkste onopgeloste probleem in de wiskunde beschouwd. (Op Hilberts beroemde lijst van in 1900 onopgeloste problemen komt het natuurlijk ook voor en wel als het achtste probleem [22].) Zoals ik nader zal toelichten, impliceert deze hypothese dat de priemge-

tallen in zeker opzicht ‘regelmatig’ verdeeld zijn. Dit maakt vele bewijzen waarin priemgetalverdeling een belangrijke rol speelt een stuk eenvoudiger. Vandaar dat men in de getaltheorie zo vaak stellingen tegenkomt van het type ‘Als de RH waar is, dan geldt...’.

Vaak is niet eens duidelijk, zeker voor de onervarene, dat er überhaupt een verband bestaat tussen RH en de conclusie van de bewering. Een aantal kenmerkende voorbeelden in dit opzicht zijn te vinden in een overzichtsartikel van Goldfeld betreffende het befaamde ‘klassengetal-1-probleem van Gauss’ [8]. (Het klassengetal is een aritmetische invariant van algebraïsche getallenlichamen die op het eerste gezicht niets met de ‘regelmatige’ verdeling van priemgetallen te maken heeft.)

Dit alles maakt hopelijk nieuwsgierig naar de precieze formulering van de Riemannhypothese (voor de financieel gemotiveerde lezer vermeld ik ook nog dat de RH een van de acht Clay problemen is en bij oplossing een miljoen dollar oplevert [2]). Daartoe treedt ik in enig wiskundig detail en bespreek de zetafunctie $\zeta(s)$ van Riemann. Definieer voor complexe getallen s met reëel gedeelte, $\text{Re}(s)$ groter dan 1, de functie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1)$$

Een verband met priemgetallen wordt gegeven door de eenvoudige

dig te bewijzen Euler product formule:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (2)$$

waar het product over alle priemgetallen p loopt. Door middel van partiële integratie volgt uit (1) dat

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^{s+1}},$$

waarbij $[x]$ de entier van x is. Daar de integraal in deze formule convergeert voor $\operatorname{Re}(s) > 0$ (en zelfs voor $\operatorname{Re}(s) > -1$ [21, p. 14]) kan de laatste formule gebruikt worden om een voortzetting van $\zeta(s)$ voor $\operatorname{Re}(s) > -1$ te definiëren. In het bijzonder heeft $\zeta(s)$ dus een enkelvoudige pool in $s = 1$ met residu 1. (Toen een student tijdens een mondeling tentamen, afgenomen door de Poolse wiskundige Kac, naar het gedrag van $\zeta(s)$ in $s = 1$ gevraagd werd en hij met de mond vol tanden stond, gaf Kac de hint “Think of me”. “Aaaah, it has a simple pole” kwam gelijk de repliek [11].)

Het blijkt mogelijk $\zeta(s)$ op het hele complexe vlak, op $s = 1$ na, te definiëren; men zegt dat de reeks in (1) in dat gebied een analytische voortzetting heeft. De functie $\zeta(s)$ voldoet aan een functionaalvergelijking (voor $s \neq 0, 1$):

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s), \quad (3)$$

met Γ de Gammafunctie.

Nulpunten

Het is niet moeilijk om, onder gebruikmaking van de functionaalvergelijking en de Euler product formule, te concluderen dat $\zeta(s)$ de nulpunten $-2, -4, -6, \dots$ (de zogenaamde triviale nulpunten) heeft en dat alle overige nulpunten (de niet-triviale nulpunten) in de zogenaamde kritieke strook liggen (dit is de verzameling complexe getallen met $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$). De Riemannhypothese zegt nu dat ieder niet-triviaal nulpunt op de rechte $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ ligt (de kritieke lijn). Riemann formuleerde zijn vermoeden in een kort baanbrekend artikel met de titel *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* in 1859 (zie bijvoorbeeld [5,19]). Dit artikel wordt beschouwd als het startpunt van de analytische getaltheorie. Riemann leidt hierin een formule af voor $\pi(x)$, het aantal priemgetallen $p \leq x$, in termen van de nulpunten van $\zeta(s)$. Zijn bewijsvoering is heel summier en pas met de ontwikkeling van de complexe functietheorie (door mensen als Hadamard en de la Vallée Poussin), konden Riemanns verdere beweringen volledig bewezen worden (op dus de RH na).

Achteraf is gebleken dat Riemanns kennis over $\zeta(s)$ heel wat verder ging dan wat hij heeft gepubliceerd. Zo werd in 1932 door C.L. Siegel de zogenaamde Riemann-Siegel approximatieve functionaalvergelijking voor $\zeta(s)$ gevonden. Een soortgelijk, maar minder bruikbaar, resultaat was toen net door Hardy en Littlewood gevonden die toen de beste zetafunctie-onderzoekers ter wereld waren. Siegel vond zijn resultaat na een minutieuze bestudering van de door Riemann nagelaten papieren, de zogenaamde *Nachlass*.

Hardy, Landau en Littlewood dachten in het begin van de 20e eeuw dat Riemanns artikel uit 1859 sterk op vermoedens gebaseerd waren, maar de geschiedenis heeft geleerd dat dit een onterechte onderwaarding was. Riemann blijkt niet alleen op conceptueel gebied een fenomeen geweest te zijn, maar ook reken-technisch. Dit aspect van zijn werk heeft hij evenwel onderbelicht in zijn publicaties. Helaas heeft Riemanns overijverige huishoudster heel wat van zijn papieren aan het vuur prijsgegeven: welke andere wiskundige schatten zouden er zo verloren gegaan zijn?

Polynomen met complexe coëfficiënten liggen, op een scalaire factor na, geheel vast als men hun nulpunten kent. Iets dergelijks geldt ook voor $\zeta(s)$. Door enerzijds uitdrukking (1) te gebruiken en anderzijds de uitdrukking voor $\zeta(s)$ in termen van zijn nulpunten, vindt men onder toepassing van de residustelling van Cauchy de volgende, zogenaamde expliciete formule, die priemgetallen aan nulpunten relateert voor $x > 1$ en $x \neq p^m$

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad (4)$$

Hierin is $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$. In het linkerlid loopt dus de sommatie over alle priem machten $\leq x$, in het rechterlid over alle nulpunten ρ in de kritieke strook. Merk op dat in het geval dat de RH waar is, alle termen van de vorm x^{ρ} in absolute waarde gelijk zijn aan $\sqrt{x}$.

De expliciete formule suggereert dus dat $|\psi(x) - x|$ klein is, als RH waar is. Hieruit kan dan weer worden afgeleid dat, onder aanname van de RH, $\pi(x) = \int_2^x dt / \log t + O(\sqrt{x} \log x)$. Dit is veel scherper dan de best bekende onvoorwaardelijk bewezen afchatting, die op zijn beurt weer scherper is dan de priemgetalstelling (1896) die zegt dat $\pi(x) \sim x / \log x$, dat wil zeggen dat de verhouding van het linkerlid en rechterlid naar 1 gaat als x groter en groter wordt. De priemgetalstelling is overigens equivalent met het feit dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft op de lijn $\operatorname{Re}(s) = 1$, zie ook Korevaar [15]. Riemann geeft in zijn artikel uit 1859 een formule voor $\pi(x)$ analoog aan (4), maar wat complexer en zeker aanmerkelijk moeilijker rigoureus te bewijzen, vandaar dat ik me hier tot $\psi(x)$ in plaats van $\pi(x)$ beperkt heb.

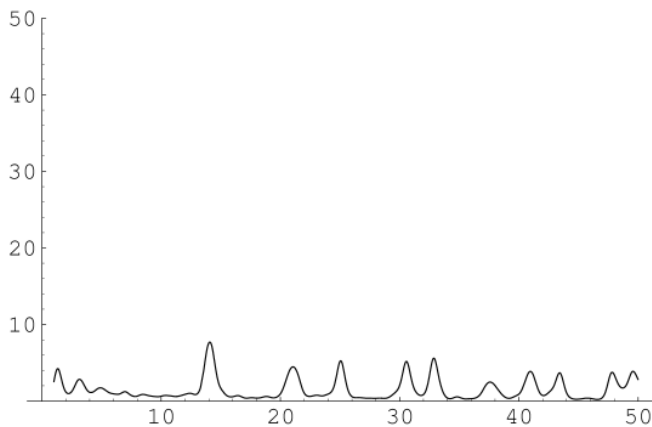
De kritieke lijn

De expliciete formules stellen ons vaak in staat om vragen over priemgetallen te ‘reduceren’ tot vragen over de verdeling van zetanulpunten. Wat weet men zoal over de nulpunten van $\zeta(s)$? Laat $N(T)$ het aantal nulpunten zijn van $\zeta(s)$ in de kritieke strook met $0 < \operatorname{Im}(s) \leq T$. Riemann schreef al op en Von Mangoldt bewees meer dan 30 jaar later dat

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log \left(\frac{T}{2\pi e} \right),$$

dat wil zeggen dat de verhouding van het linkerlid en rechterlid naar 1 gaat als T groter en groter wordt. In het bijzonder heeft $\zeta(s)$ oneindig veel nulpunten in de kritieke strook. Dit volgt overigens ook uit (4), daar als er maar eindig veel niet-triviale nulpunten zouden zijn, het rechterlid van (4) een continue functie voorstelt, terwijl $\psi(x)$ niet continu is.

Laat nu $N_0(T)$ het aantal nulpunten van $\zeta(s)$ op de kritieke lijn. De RH zegt dus dat $N_0(T) = N(T)$ voor alle T . Hardy bewees in



De grafiek van $1/|\prod_{p \leq 29}(1-p^{-s})|$ op de kritieke lijn

1914 dat $N_0(T)$ naar oneindig gaat met T , dat wil zeggen er zijn oneindig veel nulpunten die op de kritieke lijn liggen. Later bewees Selberg dat een positieve fractie van de nulpunten van $\zeta(s)$ op de kritieke lijn liggen, dat wil zeggen dat $N_0(T) > CN(T)$, met C een positieve constante. Levinson bewees in 1974 dat $C > 1/3$, aangescherpt door Conrey in 1989 tot $C > 2/5$. De nulpunten van $\zeta(s)$ blijken vrij regelmatig verdeeld, veel regelmatiger dan op grond van een Poissonverdeling verwacht zou mogen worden. Het blijkt uit numerieke experimenten dat de nulpunten verdeeld liggen volgens de zogenaamde Gaudinverdeling. Deze verdeling blijkt ook op te treden bij de bestudering van de eigenwaarden van random hermitische matrices! In het bijzonder is het zo dat de nulpunten elkaar 'onderling afstoten' en vermoed wordt dan ook dat alle zetanulpunten enkelvoudig zijn.

Benaderingen en computerberekeningen

Riemann zelf berekende benaderend de eerste 3 complexe zetanulpunten met behulp van de Riemann-Siegel approximatieve functionaalvergelijking (met reëel gedeelte, respectievelijk, ongeveer 14.1, 21.0, 25.0). Van de Lune, te Riele en Winter bewezen dat de eerste 1.500.000.001 nulpunten in de kritieke strook inderdaad op de kritieke lijn liggen en bovendien enkelvoudig zijn. Gourdon [9] kondigde recent aan dat de eerste 10^{13} nulpunten van $\zeta(s)$ op de juiste lijn liggen. Hiermee is hij een stuk verder gekomen dan het zetagrid project van S. Wedeniwski [24], waar een enorme rekenkracht en tijd ingezet is. Dit bewijst maar weer eens het cruciale belang van een goed algoritme in de computationele getaltheorie! (In het zetagrid project kregen de computer(s) van de deelnemers stukjes kritieke strook toegewezen waarin dan de nulpunten worden berekend. De verkregen data worden vervolgens teruggestuurd naar Wedeniwski.)

Wiskunde en haar wiskundigen

De besproken boeken hebben allen een andere rode draad. De primaire belangstelling van Karl Sabbagh lijkt niet zozeer de wiskunde als wel de wiskundigen te gelden. Wat brengt iemand er toe om een zeer groot gedeelte van zijn of haar wakende uren te besteden aan het doen van wiskundig onderzoek? Deze vraag wordt nog pregnanter als men kijkt naar wiskundigen, die zich zeer obsessief met een zeer lastig probleem bezighouden dat ze naar alle waarschijnlijkheid nooit zullen oplossen. Iemand die zich daar mee bezig houdt is als een mens die een muur van beton probeert af te breken door er met het voorhoofd tegen aan te beuken (zo om-

schreef een wiskundige me ooit hoe hij het doen van onderzoek zag).

Sabbaghs primaire interesse geldt de herkomst van deze fascinatie. Wiskundigen, die aan de RH werken, vormen hiervoor natuurlijk een schoolvoorbeeld. Zijn aanpak is dat hij een 14-tal wiskundigen werkzaam in dit gebied heeft geïnterviewd. In de tekst komen ze vaak min of meer direct aan het woord en dit verlevendigt de behandeling van het onderwerp.

Vaak, en meestal op een treffende wijze, wordt het middel der analogie gekozen. Sabbaghs interesse betrof ook hoe de wiskundigen in hun jeugd tot de wiskunde gekomen zijn. Ook dit vond ik interessant om te lezen. Verder heeft Sabbagh in allerlei literaire teksten verwijzingen naar wiskunde gevonden. Deze zijn soms zeer amusant om te lezen, en in ieder geval altijd onderhoudend.

Een wiskundige die in het bijzonder in Sabbaghs sociologische kader past is Louis de Branges, die zich in zijn lange carrière vrijwel uitsluitend met beroemde lastige problemen heeft bezighouden. Ik herinner mij, dat ik op verschillende wiskunde-instituten op koffietafels een van hem afkomstige versie van een voorgesteld bewijs van de RH zag liggen. Een dik artikel met voornamelijk tekst, hetgeen ik onder meer om die reden, beken ik, minder serieus nam. Bij navraag werd er wat schouderophalend over gedaan.

Het blijkt, dat Louis de Branges, alhoewel hij het befaamde Bieberbachvermoeden heeft bewezen en voor zijn werk als wiskundige gelauwerd is, minder serieus genomen wordt waar het zijn claims betreffende de RH geldt. Zijn methoden zouden ontoereikend zijn. Wat ook een rol lijkt te spelen is dat zijn methoden niet erg gangbaar zijn in de analytische-getaltheoriewereld en er gedeeltelijk sprake is van een 'wat-de-boer-niet-kent-dat-vreet-hij-niet'-effect.

Deze perceptie van hem binnen delen van de wiskundige gemeenschap komt ook nadrukkelijk aan de orde in het boek. Hiermee komt voor de leek ook een ander sociologisch aspect van de wiskunde naar voren; dat bewijspogingen min of meer serieus genomen worden aan de hand van de reputatie van een persoon. Dit is gedeeltelijk verklaarbaar als men bedenkt dat er soms ontzettend veel tijd gaat zitten in het uitkammen van een bewijs. Andere wiskundigen willen dit dan vaak alleen maar doen als ze de overtuiging hebben dat ze er zelf iets van kunnen opsteken en dat het niet een spelletje wordt van 'Vind de eerste serieuze fout'.

Relaties met de fysica

Marcus du Sautoy is zelf wiskundige met artikelen gepubliceerd in toptijdschriften. Ik had daarom vrij hoge verwachtingen van zijn boek. Hij blijkt evenwel wiskundig niet zo diep te willen graven. Hij hanteert ook zijn eigen terminologie. Modulaire rekenkunde noemt hij consequent klokrekendkunde. Soms is de terminologie bevreemdend. In plaats van 'diverges' heeft du Sautoy het over 'spirals off to infinity'. (Wat spiraliseert er hoe naar oneindig aan $\sum_{n \leq x} 1/n$ als x naar oneindig gaat?)

Hij heeft, zoals hij zelf ook zegt, een vlot leesbaar boek willen schrijven. Daarbij doet hij af en toe een beetje afbreuk aan de waarheid. Zijn boek beschrijft in essentie de geschiedenis van de priemgetaltheorie aan de hand van een aantal van de grote wiskundigen (Euler, Landau, Hardy, Littlewood, Ramanujan etc.) en volgt dus een klassiek stramien van populaire wiskunde boeken. Van de hier besproken boeken behandelt dat van du Sautoy dan ook het meeste materiaal, maar graaft tevens wiskundig gezien

het minst diep (zo zijn er nauwelijks formules in zijn boek te vinden). Hij maakt ook duidelijk dat er eigenlijk letterlijk muziek in de priemgetallen zit en komt daar op verschillende manieren op terug.

Laat ik dit illustreren aan de hand van formule (4). In essentie hebben we hier met een Fourier decompositie van doen waarin de termen x^ρ/ρ een golfgedrag vertonen. De nulpunten zijn derhalve te zien als ‘tonen’ en de priemgetal gerelateerde telfunctie $\psi(x)$ als de resulterende muziek. In de natuurkunde zijn er systemen waarvan de lengten van periodieke banen gerelateerd kunnen worden aan de eigenwaarden van zekere operatoren (Gutzwiller spoorformule). Omdat deze natuurkundige formules vaak niet rigoureus bewezen kunnen worden, zijn natuurkundigen ook geïnteresseerd geraakt in de expliciete formule (4) en generalisaties daarvan (de zogenaamde Weil-Guinandformules), daar deze wel exact zijn en als modelsysteem voor de natuurkundige situatie opgevat kunnen worden. Dit heeft geresulteerd in een steeds grotere belangstelling van de theoretisch natuurkundigen in de Riemann-zetafunctie, een belangstelling die gedurende een aantal jaren tot niets concreets leidde.

Een fles wijn

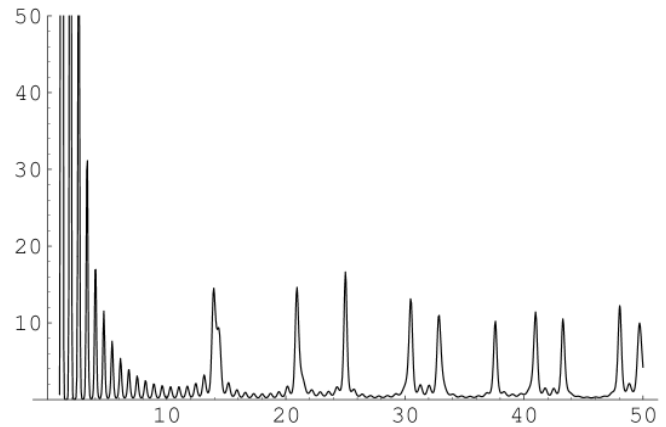
Peter Sarnak loofde in 1996 een fles wijn uit voor de eerste natuurkundige die hem echt iets nieuws kon vertellen, dat wil zeggen iets dat buiten het bereik van de gangbare technieken uit de analytische getaltheorie zou liggen. In 1998 moest hij die fles wijn uitreiken met betrekking tot een probleem aangaande de momenten van $\zeta(s)$. Het k -de moment van $\zeta(s)$, $I_k(T)$, is gedefinieerd als

$$I_k(T) := \frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt,$$

met k een geheel getal. Het zetamoment-vermoeden [3,14] stelt dat $I_k(T)$ zich asymptotisch gedraagt als $g_k a_k (\log T)^{k^2}$, waarin a_k een expliciet bekende constante is en g_k een factor waarvan vermoed wordt dat het altijd een geheel getal is. Als $I_k(T)$ zich altijd asymptotisch gedraagt als een constante keer een macht van $\log T$, dan volgt daaruit het beroemde Lindelöfvermoeden (1908), dat stelt dat voor iedere $\epsilon > 0$ geldt dat $|\zeta(1/2 + it)|$ naar boven begrensd is door een constante die van ϵ mag afhangen maal t^ϵ .

Het is bewezen dat $g_1 = 1$ (Hardy en Littlewood) en $g_2 = 2$ (Ingham). Conrey en Ghosh kwamen na veel hard analytisch getaltheoretisch werk tot het vermoeden dat $g_4 = 24024$. Groot was dan ook de verbazing toen Keating en Snaith [14] in 1998 kwamen met een algemeen vermoeden voor de waarde van g_k , dat gebaseerd was op een totaal andere methode, de *random-matrixtheorie* (RMT), die zijn oorsprong heeft in de natuurkunde. Keating en Snaith relateren g_k aan het Haargemiddelde van het k -de moment van het karakteristieke polynoom van een matrix uit de unitaire groep $U(N)$, en laten N naar oneindig gaan. Random-matrixtheorie werd als eerste gebruikt door Wigner om de verdeling van spectraallijnen in atomaire spectra statistisch te begrijpen. Later werd het verder ontwikkeld door Freeman Dyson. Substitutie van $k = 4$ in de Keating-Snaith formule blijkt precies de 24024 van Conrey te geven, terwijl de gebruikte wiskundige methoden totaal verschillend zijn!

Het Leidmotiv van John Derbyshire is het uitleggen van het artikel van Riemann. Zijn hoofdstukken zijn om en om, historisch,



De grafiek van $1/|\prod_{p \leq 7919}(1 - p^{-s})|$ op de kritieke lijn

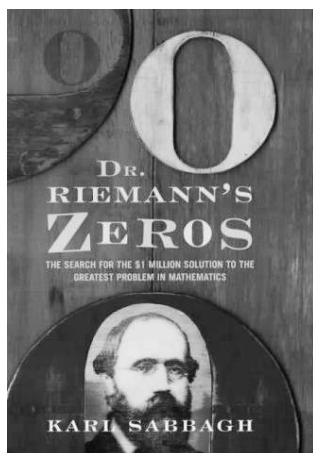
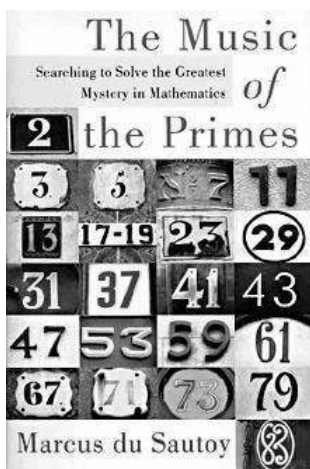
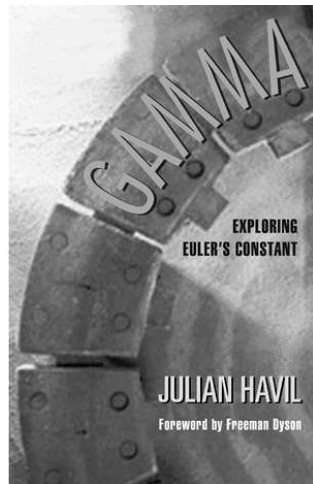
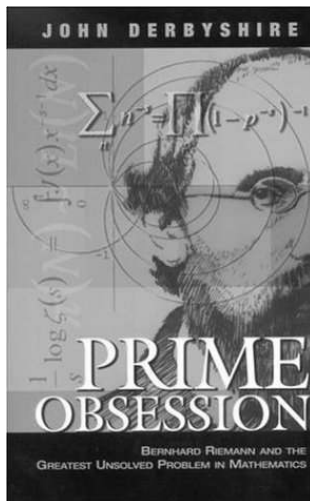
respectievelijk, wiskundig van aard. Zijn boek is het wiskundigst van de drie RH boeken. Waar de andere twee auteurs niet vrij zijn van effectbejag en nogal ‘glad’ schrijven, is Derbyshire ontwapenend direct. Hij laat zijn persoonlijke voorkeuren duidelijk blijken (zoals een grote compassie voor Riemann, wiens persoonlijk leven nogal tragisch verliep). Hij richt zich op mensen die de analyse-achtergrond van een beginnende eerstejaars student hebben. Hij maakt ook duidelijk dat hij zijn boek een beetje beperkt moest houden van zijn editor. Het gevolg is dat er niet zoveel materiaal over priemgetallen in te vinden is en dat dus de titel ‘Prime obsession’ de lading niet zo goed dekt. Derbyshire slaagt er goed in over te brengen wat bepaalde formules betekenen.

Een naïeve gedachte

Bij het lezerspubliek van populaire wiskundeboeken stel ik me meestal wiskundestudenten en niet-wiskundigen voor. Een andere categorie wordt evenwel gevormd door in dit geval professionele wiskundigen die niet in de getaltheorie werkzaam zijn. Die zouden evenwel zelfs door lezing van populaire getaltheoretische boeken op bruikbare gedachten kunnen komen. Een fraai voorbeeld vind ik het idee van Mamuka Jibladze, een topoloog, die $1/\zeta(s)$ op de kritieke lijn simpelweg denkt te benaderen door naar $\prod_{p \leq p_0}(1 - p^{-s})$ te kijken (vergelijk met (2)). Toen hij dat idee opperde, zei ik hem dat ik het zo naïef vond, dat een analytische getaltheoreticus er niet eens op zou komen. Het blijkt echter, zelfs al voor kleine p_0 , de absolute waarde van deze functie een aantal er duidelijk ‘uitspringende’ locale maxima vertoont die heel dicht bij de bekende nulpunten van $\zeta(s)$ liggen! Men zou dan misschien verwachten dat verhogen van p_0 tot een betere benadering van die nulpunten leidt, maar dat blijkt niet het geval, de er ‘duidelijk uitspringende’ locale maxima blijken te gaan fluctueren (met p_0) rond de bekende nulpunten. Verschillende experts die ik er over sprak, waren niettemin verbaasd dat een dergelijk naïeve aanpak toch bepaalde aspecten van het gedrag van de zetafunctie op de kritieke lijn lijkt te vangen.

De Eulerconstante en de Riemannhypothese

Ik wil het ook nog kort over het boek van Havil hebben. Dit handelt over allerlei zaken die met Eulers constante, $\gamma = 0.5772156\dots$, van doen hebben. Deze constante duikt op in de asymptotiek van de harmonische reeks (met $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$) en een definitie is $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n)$. (Door het tekenen van een plaatje ziet men eenvoudig in dat deze



limiet bestaat en kleiner dan 1 is.) De logaritme speelt dan ook een belangrijke rol in dit boek. Hetzelfde geldt voor de Gammafunctie, daar in een van de definities van de Gammafunctie ook Eulers constante voorkomt. In de laatste drie hoofdstukken komt ook de RH ter sprake (de Gammafunctie duikt zeer vaak op in de bestudering van $\zeta(s)$, zie bijv. de functionaalvergelijking (3)). Een prachtig verband tussen de RH en H_n , een van de hoofdrolspelers in Havils boek, heeft Lagarias (2001) gevonden: de RH is equivalent met de bewering dat voor alle natuurlijk getallen n geldt dat

$$\sum_{d|n} d \leq e^{H_n} \log(H_n) + H_n,$$

waarbij in het linkerlid de som over alle positieve delers d van n loopt. Hoewel Havil dit resultaat noemt, heeft hij wat mij betreft een kans gemist de onderlinge samenhang in zijn boek te versterken door hier dieper op in te gaan (Bruinier [1] doet dat op een toegankelijke manier).

Havils boek is het meest wiskundig van de besproken boeken, maar geeft heel veel (historische) achtergrond. Het poogt niet zaken tot in technische details te bewijzen, maar wel het basisidee van bewijzen te geven. Dit alles op het niveau van eerste en tweede jaar studenten. De auteur bespreekt heel veel materiaal gereleateerd aan Eulers constante, waaronder ook allerlei toepassingen

die men niet op het eerste gezicht verwacht. Dit boek is een van de weinige boeken die ik ken dat qua niveau inzit tussen een populair boek en een klassieke wiskundetekst. De schrijfstijl vind ik wat brokkelig en niet van het niveau van de andere drie. Ondanks mijn vertrouwdeheid met het besproken materiaal vond ik de nodige interessante feiten en ik denk dat het de meeste wiskundigen zo zal vergaan. Niettemin denk ik dat het boek vooral leuk is voor studenten die het vak analyse aan het bestuderen zijn.

Modulaire functies

De analytisch priemgetaltheorie stagneerde volgens mij ergens in de zeventiger jaren: er moest steeds harder gewerkt worden om steeds kleinere verbeteringen van foutentermen tot stand te krijgen. In de tachtiger jaren kwam daar enige verandering in doordat gebruik gemaakt werd van technieken uit de theorie van modulaire functies. Op het moment ligt de vooruitgang voornamelijk in het opstellen van vermoedens daar waar voorheen niemand ook maar een idee had van wat de waarheid zou moeten zijn. Deze vooruitgang is voornamelijk het gevolg van het gebruikmaken van methoden uit de random-matrixtheorie. Volgens een bepaald vertaalmechanisme kunnen dan resultaten uit de RMT overgezet worden naar vermoedens in de getaltheorie. Tot dusverre waren trouwens de numerieke data steeds in overeenstemming met de door RMT verkregen vermoedens. (De eerste die een dergelijke berekening gedaan heeft is Odlyzko, zijn bijdrage aan het berekenen van zetanulpunten is overigens enorm groot.)

De RMT filosofie kan trouwens ook toegepast worden in de setting van zogenaamde functionellichamen en in dat kader kunnen ook daadwerkelijk resultaten bewezen worden. In deze setting is inmiddels bekend dat het analogon van de RH waar is en vandaar dat het misschien niet zo verrassend is dat de door de RMT voorspelde resultaten ook daadwerkelijk bewezen kunnen worden; zie het boek van Katz en Sarnak [13]. Ik meen derhalve stellig dat we in een opwindende tijd leven wat betreft ontwikkelingen in de priemgetaltheorie (naast RMT zijn er nog andere gaande, maar die vallen buiten het kader van deze bespreking) en vanuit deze optiek vind ik het een goede zaak dat een algemener publiek hierop gewezen wordt.

In conclusie: ik vind de drie RH boeken goed geschreven en een behoorlijk betrouwbare indruk geven van de geschiedenis van RH, de hedendaagse wiskundigen die er aan werken, alsmede de recente ontwikkelingen. $\Leftarrow$

Literatuur

Voor een andere bespreking van de drie RH boeken, zie Edwards [6] en Grunwalds commentaar daarop [10]. Grunwald betoogt dat wiskundigen geen reviews van populaire wiskundeboeken zouden moeten schrijven, daar wiskundigen niet het beoogde publiek vormen. Voor nog weer een andere bespreking van Sabbaghs boek, zie Folland [7]. Voor een uitgebreide (en lovende) bespreking van Havils boek, zie Segal [20]. Besprekingen van alle vier hier besproken boeken zijn ook te vinden op de MAA online site [16].

Voor verder (inleidend) materiaal over RH, respectievelijk RMT, zie [4,5,18,21,24], respectievelijk [3,4,12,13]. Het meest populaire populaire wiskundeartikel over priemgetaltheorie ooit geschreven (en dus vertaald in vele talen), is denk ik dat van Zagier [23]. Een leuk boek over priemgetaltheorie met heel veel historische achtergrond, is dat van Narkiewicz [18].

Dankwoord

Met dank aan Prof. J. Korevaar, Dr. H.J.J. te Riele en Dr. P. Tegelaar voor hun commentaar op eerdere versies. Prof. E. Opdam heeft altijd mijn interesse in RMT gestimuleerd en zijn NWO Pioniersubsidie maakte het bijwonen van verschillende conferenties mogelijk, zie ook [17].

Prime Obsession, John Derbyshire, Washington, DC, Joseph Henry Press, 2003, ISBN 0-309-08549-7.

The Music of the Primes, Marcus du Sautoy, New York, Harper Collins, 2003, ISBN 0-06-621070-4.

Dr. Riemann's Zeros, Karl Sabbagh, New York, Farrar, Strauss and Giroux, 2003, ISBN 0-374-25007-3. *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Julian Havil, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003, ISBN 0-691-09983-9.

Referenties

- 1 J. H. Bruinier, 'Primzahlen, Teilsummen und die Riemannsche Vermutung', *Math. Semesterber.*, no. 1, (48), (2001), p. 79–92.
- 2 Clay Institute, <http://www.claymath.org/millennium>.
- 3 B.J. Conrey, *L-functions and random matrices, Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, p. 331–352.
- 4 B.J. Conrey, 'The Riemann hypothesis', *Notices Amer. Math. Soc.*, no. 3, (50), (2003), p. 341–353.
- 5 H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Reprint of the 1974 original, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. xiv+315 p. ISBN: 0-486-41740-9.
- 6 H.M. Edwards, 'Prime Obsession, The Music of the Primes, The Riemann Hypothesis' *Math. Intelligencer*, no. 1, (26) (2004), p. 55–59.
- 7 G.B. Folland, 'Editor's corner', *Amer. Math. Monthly* (111) (2004), p. 75–81.
- 8 D. Goldfeld, 'Gauss's class number problem for imaginary quadratic fields', *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, no. 1, (13), (1985), p. 23–37.
- 9 X. Gourdon, <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>.
- 10 E. Grunwald, 'Letter to the editor concerning 'Review by Harold Edwards of 3 Books'', *Math. Intelligencer*, no. 4, (26), (2004), p. 5–6.
- 11 M. Kac, *Enigmas of chance. An autobiography*, Alfred P. Sloan Foundation, Harper & Row, Publishers, New York, 1985. xxviii+163 p. ISBN: 0-06-015433-0.
- 12 N.M. Katz en P. Sarnak, 'Zeroes of zeta functions and symmetry', *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, no. 1, (36), (1999), p. 1–26.
- 13 N.M. Katz and P.C. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- 14 J.P. Keating and N.C. Snaith, 'Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$ ', *Comm. Math. Phys.*, (214), (2000), p. 57–89.
- 15 J. Korevaar, 'Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling', *Nieuw Arch. Wisk.*, no. 4, (5), (2004), p. 284–291.
- 16 Mathematical Association of America reviews, <http://www.maa.org/reviews/>.
- 17 P. Moree, 'Kort Amerikaans?', *Nieuw Arch. Wisk.*, no. 3, (3), (2002), p. 231–232.
- 18 W. Narkiewicz, *The development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000. xii + 448 p. ISBN: 3-540-66289-8.
- 19 G.F.B. Riemann, 'Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse', <http://www.emis.de/classics/Riemann>.
- 20 D. Segal, *Notices Amer. Math. Soc.*, (51), (2004), p. 768–770.
- 21 E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Second edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986. x+412 pp. ISBN: 0-19-853369-1. MR1880187 (2003b:01037)
- 22 B.H. Yandell, *The honors class. Hilbert's problems and their solvers*, A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2002. x+486 pp. ISBN 1-56881-141-1.
- 23 D. Zagier, 'The first 50 million prime numbers', *Math. Intell.*, 0, (1977), p. 7–19.
- 24 Zetagrid, <http://www.zetagrid.net/>.