

Theo van den Bogaart

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
bogaart@math.leidenuniv.nl

Wiskunde uit de oude doos

Op 19 augustus 2004 plaatste Geert-Jan Uytendewilligen, student aan de Fontys Hogeschool Toegepaste Natuurwetenschappen in Eindhoven, een artikel op de Mathematics Archiv webserver, dat beloofde een nieuwe oplossing te bieden voor het vinden van nulpunten voor een polynoom van willekeurige graad. Het pr-bureau van de hogeschool wist de media te overtuigen van het volgens hen baanbrekende karakter van het resultaat van Uytendewilligen. Een hype was geboren. In de universitaire wereld werd van mild tot zeer scherp gereageerd: duidelijk werd al spoedig dat het om negentiende-eeuwse wiskunde ging.

Maar wat is nu eigenlijk de wiskundige inhoud van het artikel van Uytendewilligen? Theo van den Bogaart, assistent in opleiding in de algebraïsche meetkunde in Leiden, legt het uit.

“Student kraakt eeuwenoud wiskundig probleem”, kopten enkele kranten afgelopen september. Geert-Jan Uytendewilligen zou een formule hebben gevonden om de nulpunten van een veelterm van willekeurige graad te berekenen. Hoewel al snel duidelijk werd dat de media een flater hadden geslagen, leidde alle publiciteit wel tot de nodige vragen en discussies. In het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van december 2004 stond in de nieuwsrubriek al een kort bericht over deze mediahype; hier zullen we wat gedetailleerder ingaan op het wiskundige resultaat van Uytendewilligen. Zijn oorspronkelijke tekst is te vinden op het Arxiv [1].

Laten we eerst bekijken wat Uytendewilligen bereikt. Zij n een positief geheel getal. We willen een oplossing van een vergelijking van graad n , met coëfficiënten $a_i \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0}_{f(X)} = 0. \quad (1)$$

Noem het niet-constante stuk van de veelterm $f(X)$, zoals aangegeven. Beschouw $f(X)$ als een functie van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$; er geldt dat $f(0) = 0$. Neem nu aan dat $a_1 \neq 0$, zodat $f'(0) \neq 0$. De impliciete functiestelling zegt nu dat er een open omgeving $U \subset \mathbb{C}$ van 0 bestaat, samen met een analytische functie $x: U \rightarrow \mathbb{C}$, zo-

dat $x(0) = 0$ en $f(x(s)) = s$ voor alle $s \in U$. Door U zo nodig te beperken, kunnen we aannemen dat U een open schijf om 0 is. Er is dan een machtreeks in s die voor ieder $s \in U$ convergeert naar $x(s)$. Uytendewilligen's methode beoogt deze machtreeks expliciet te maken. Vervolgens hoopt hij U zo groot te kunnen nemen dat $-a_0 \in U$: we komen hier later op terug. Is inderdaad $-a_0 \in U$, dan is $x(-a_0)$ een oplossing van (1).

Even afgezien van de algemeenheid van dit resultaat, merken we op dat een oplossing zoals Uytendewilligen die nastreeft niet strijdig is met de stelling van Abel-Ruffini uit de Galoistheorie. Deze stelling zegt dat als $n \geq 5$ er geen formule bestaat die de nulpunten van een willekeurige veelterm van graad n uitdrukt in zijn coëfficiënten, als er alleen maar gebruik mag worden gemaakt van de elementaire algebraïsche operaties en wortels van iedere macht. Een oplossing in de vorm van bijvoorbeeld een reeks, zoals hier, is echter niet uitgesloten: al in de negentiende eeuw waren er dergelijke formules bekend. Meer historische informatie hierover is te vinden op de *Wolfram Research poster*, die ook op internet staat [2].

We zullen nu de functie x met $f(x(s)) = s$ nader bepalen. Noteer met $x^{(i)}$ de i -de afgeleide $d^i x / ds^i$ van x . Rond 1860 bedachten Cockle en Harley een methode om een lineaire differentiaalvergelijking

$$b_{-1}(s) + b_0(s)x(s) + b_1(s)x^{(1)}(s) + \cdots + b_{n-1}(s)x^{(n-1)}(s) = 0 \quad (2)$$

te vinden, met coëfficiënten $b_i(s)$ veeltermen in s , waarvan de oplossing (onder de juiste beginvoorwaarden) de gezochte functie x is. Deze methode werkt als volgt. Noteer met $\mathbb{C}(X)$ het lichaam van rationale functies in de variabele X . Via de identificatie $s = f(X)$ kan $\mathbb{C}(X)$ opgevat worden als vectorruimte over $\mathbb{C}(s)$. Laat B de verzameling elementen $1, X, \dots, X^{n-1}$ van $\mathbb{C}(X)$ zijn. Dan is B een $\mathbb{C}(s)$ -basis voor $\mathbb{C}(X)$. Om dit te bewijzen is wat algebra nodig. (Om precies te zijn: $\mathbb{C}(X)$ is isomorf met het quotiënt van $\mathbb{C}(s)[X]$ naar het ideaal voortgebracht door het irreducibele polynoom $f(X) - s$; het is dus een lichaamsuitbreiding van $\mathbb{C}(s)$)

van graad n .) Daadwerkelijke berekeningen zijn echter eenvoudig te maken. Door herhaaldelijk X^n door $s - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X$ te vervangen, kan bijvoorbeeld iedere veelterm in $\mathbf{C}[X] \subset \mathbf{C}(X)$ geschreven worden als een lineaire combinatie van elementen in de basis B .

Differentiatie van $f(x(s)) = s$ naar s geeft $x^{(1)} = 1/f'(x)$. Dan is $x^{(2)} = -f''(x)/f'(x)^3$ en zo verder tot en met $x^{(n-1)}$. Al deze afgeleiden zijn dus rationale functies in x en we kunnen ze dan ook formeel opvatten als elementen van $\mathbf{C}(X)$. De afgeleiden $x^{(i)}$ voor $1 \leq i \leq n-1$ geven samen met 1 en x een collectie van $n+1$ elementen in $\mathbf{C}(X)$ en zijn dus lineair afhankelijk over $\mathbf{C}(s)$. Met wat lineaire algebra over het lichaam $\mathbf{C}(s)$ kunnen nu $b_i(s) \in \mathbf{C}(s)$ worden bepaald, niet alle nul, zodat (2) geldt. Door ten slotte de noemers uit te vermenigvuldigen, mag aangenomen worden dat de coëfficiënten in (2) veeltermen in s zijn.

Tot zover de methode van Cockle en Harley. Nu moet een oplossing van de differentiaalvergelijking worden gezocht. Schrijf de machtreeksontwikkeling van $x(s)$ als $\sum_{i \geq 0} c_i s^i$. Het ligt voor de hand om deze te substitueren in (2) en het resultaat weer samen te voegen tot een enkele machtreeks. De coëfficiënten van laatstgenoemde machtreeks moeten alle nul zijn, en dit geeft een recursierelatie van de vorm

$$r_0(i)c_i + r_1(i)c_{i+1} + \dots + r_k(i)c_{i+k} = \lambda(i) \quad (i \geq 0). \quad (3)$$

Hierin zijn λ en r_j (met $0 \leq j \leq k$) eenvoudige functies van i (het zijn veeltermen) en $r_k(i) \neq 0$ voor alle indices i . De lengte k van de recursierelatie hangt af van de graad van de veeltermen $b_i(s)$ in (2). (In tegenstelling tot wat Uytendewilligen beweert, geldt niet algemeen dat $k = n-1$.)

Om met de relatie (3) aan de slag te gaan, zijn nu nog de eerste coëfficiënten $c_0, \dots, c_{k-1}$ uit de machtreeks van x nodig. Per con-

structie is $c_0 = 0$. De andere volgen door $f(\sum_{i \geq 0} c_i s^i) = s$ tot en met orde s^{k-1} uit te werken.

Uytendewilligen gaat nog een stapje verder, door c_i voor $i \geq k$ uit te drukken als de determinant van een matrix (na de recursierelatie eerst homogeen gemaakt te hebben). Omdat het aantal elementen in deze matrix kwadratisch groeit met i , is dit van weinig nut. Wellicht geeft het wel het 'gevoel' dat de coëfficiënten c_i van de machtreeks van x expliciet zijn bepaald.

De vraag is nu natuurlijk nog of de gevonden machtreeks ook een oplossing van het oorspronkelijke probleem (1) geeft. Met andere woorden: of $-a_0$ bevat is in het convergentiegebied. Dat is in het algemeen natuurlijk niet het geval. Om er eens meetkundig naar te kijken: de vergelijking $f(X) = s$ definieert een algebraïsche kromme die een eindige overdekking geeft van de s -as, met $x(s)$ een lokale sectie. Ligt s binnen de convergentieschijf van x , dan kan $(s, x(s))$ geen vertakkingspunt zijn. De sectie x zal daarom niet verder dan het vertakkingspunt komen.

Voor de vergelijking (1) is dus in het algemeen geen oplossing gevonden. Natuurlijk liggen er eenvoudige generalisaties van de methode voor de hand, bijvoorbeeld door aan $f(X)$ een constante term toe te voegen op zo'n manier dat een nulpunt α van f bekend is. Los van de vraag welke keuze van f dan te maken, blijven meervoudige nulpunten nog steeds een probleem. Uytendewilligen maakt niet duidelijk hoe deze problemen kunnen worden opgelost.

Het mag duidelijk zijn dat de hier beschreven methode geen grote doorbraak is. De enige toegevoegde waarde is dat oude negentiende-eeuwse technieken weer eens expliciet op de voorgrond treden. Dit neemt niet weg dat het voor een student aan de hogeschool een knappe prestatie is.

Verdere discussies, met name over de rol van de media en de nieuwswaarde van Uytendewilligen's bijdrage, staan op Kennislink [3].

Referenties

- 1 G.A. Uytendewilligen, 'The roots of any polynomial equation', <http://arxiv.org/abs/math.CA/0408264>, 20 augustus 2004.
- 2 'The quintic poster', <http://library.wolfram.com/examples/quintic>.
- 3 'ABC voor gevorderden', www.kennislink.nl/web/show?id=118013, en de diverse links onder dit artikel.