Yun-Qiu Shen
Department of Mathematics
Western Washington University
Bellingham WA 98225
Verenigde Staten
yqshen@cc.wwu.edu

Tjalling Ypma
Department of Mathematics
Western Washington University
Bellingham WA 98225
Verenigde Staten
tjalling.ypma@wwu.edu

Onderwijs

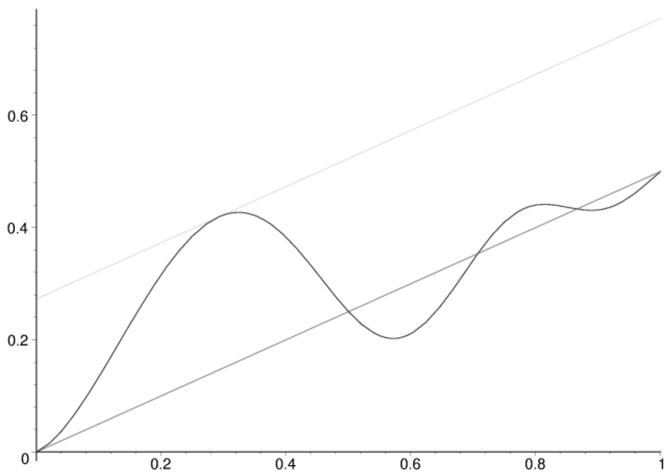
Een constructief bewijs van de middelwaardestelling

Nog altijd behoort de middelwaardestelling tot de standaardonderwerpen van de reële analyse. Vrijwel alle eerste- en tweedejaars wiskundestudenten komen er mee in aanraking, en velen van ons zullen het resultaat met een overtuigend plaatje, met of zonder een bewijs, wel eens op een schoolbord hebben gezet. In onderstaand kort artikel gaan Yun-Qiu Shen en Tjalling Ypma er dieper op in en beschouwen ook de numerieke aspekten van de stelling.

De middelwaardestelling zegt het volgende: *Is* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *een continue functie die bovendien differentieerbaar is op het open interval* (a,b)*, dan bestaat* $c \in (a,b)$ *zodat* $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$.

Het resultaat is afkomstig van J.-L. Lagrange (1736–1813). Figuur 1 maakt de stelling intuïtief duidelijk.

Er is zeker een punt in (a,b) te vinden waarboven de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is aan de lijn door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$. De standaardbewijzen van het resultaat zijn evenwel



Figuur 1

veel minder visueel intuïtief. De meeste teksten bewijzen eerst dat zo'n functie op een gesloten interval een maximum aanneemt. Vervolgens dat als dit niet op de rand van het interval gebeurt, hier de afgeleide een nulpunt heeft. Hieruit wordt Rolle's stelling afgeleid, oftewel het speciale geval van de middelwaardestelling waar $f(a) = f(b)$. Na een handige coördinatentransformatie volgt tenslotte de hele middelwaardestelling.

In onderstaande tekst willen we een meer intuïtief duidelijk bewijs voor dit klassieke resultaat geven. Daartoe zal zo'n gezocht punt c, wat we een middelwaardepunt zullen noemen, op een eenvoudige manier worden geconstrueerd.

Een aangepaste bisectiemethode

Schrijf M voor de helling van de lijn L door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$. We laten zien dat een $c \in (a,b)$ geconstrueerd kan worden met de eigenschap $f'(c) = M$. Dit doen we met een variant van de bekende bisectiemethode voor het (numeriek) oplossen van niet-lineaire vergelijkingen $g(x) = 0$. Zoals bekend, benadert deze methode een nulpunt van $g(x)$ in een interval $[a,b]$ als geldt $g(a)g(b) \le 0$, als volgt. Is dit product 0, dan is een nulpunt gevonden. Zo niet, neem het midden $c = (a+b)/2$ van het interval. Dan is $g(a)g(c)g(c)g(b) \le 0$, dus $g(a)g(c) \le 0$ of $g(c)g(b) \le 0$. Zo kunnen we verdergaan met een tweemaal zo klein deelinterval van $[a,b]$ waarvoor dezelfde conditie geldt. Na n stappen levert dit een deelinterval van lengte $(b-a)/2^n$ dat een nulpunt van g bevat. De methode is daarom *lineair*: de precisie waarin we zo'n nulpunt kennen (oftewel, het aantal cijfers achter de komma) hangt lineair af van het aantal iteratiestappen.

De hier voorgestelde aangepaste bisectiemethode construeert onderling evenwijdige lijnen $\{L_n\}_{n \ge 1}$ waarbij L_n door punten $(a_n, f(a_n))$ en $(b_n, f(b_n))$ op de grafiek van f gaat, en

$$a = a_1 \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le b_1 = b,$$

en ook

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le (b_n - a_n)/2.$$

Dit gaat inductief als volgt.

Zijn voor $n \geq 1$ de waarden a_n, b_n bepaald, schrijf dan $p_n := (a_n + b_n)/2$ en laat L_{n+1} de lijn door $(p_n, f(p_n))$ evenwijdig aan L_n zijn. Er zijn nu drie mogelijkheden.

(1) Raakt L_{n+1} in het punt $(p_n, f(p_n))$ aan de grafiek van f, dan hebben we een middelwaardepunt gevonden en zijn we klaar.

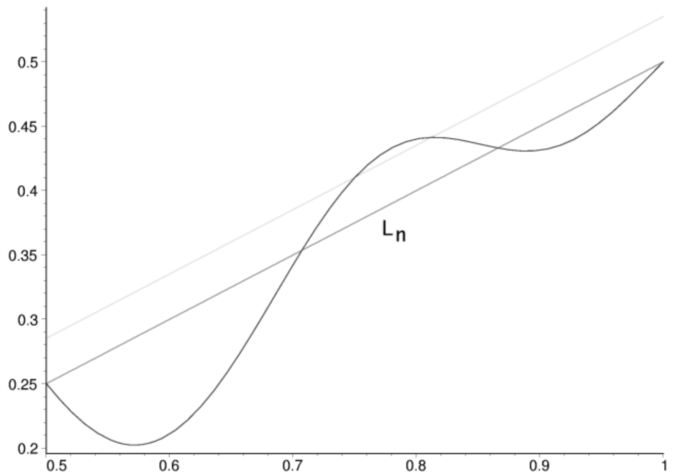
Zo niet, dan worden a_{n+1} en b_{n+1} als volgt bepaald.

(2) Stel dat geldt $L_n = L_{n+1}$. Kies

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (a_n, p_n) & \text{als n oneven;} \\ (p_n, b_n) & \text{als n even.} \end{cases}$$

Met deze keuze geldt $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, de punten $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ en $(b_{n+1}, f(b_{n+1}))$ liggen op de lijn L_{n+1} en de lengte van het interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ is precies de helft van de lengte van $[a_n, b_n]$.

(3) In het resterende geval geldt $L_n \neq L_{n+1}$ en bovendien is dan L_{n+1} niet de raaklijn in het punt $(p_n, f(p_n))$ aan de grafiek van f. Zoals in onderstaand lemma wordt aangetoond en uit figuur 2 intuïtief blijkt, snijdt L_{n+1} de grafiek van f in een punt $(q_n, f(q_n)) \neq (p_n, f(p_n))$ met $a_n < q_n < b_n$.



Figuur 2

Kies dan

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (q_n, p_n) & \text{als } q_n < p_n \\ (p_n, q_n) & \text{als } q_n > p_n. \end{cases}$$

Ook in dit geval geldt per constructie dat $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ en dat de punten $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ en $(b_{n+1}, f(b_{n+1}))$ op de lijn L_{n+1} liggen. De lengte van $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ is hier zelfs minder dan de helft van de lengte van $[a_n, b_n]$.

In het bijzondere geval dat ergens in dit proces precies een middelwaardepunt wordt gevonden zijn we uiteraard helemaal klaar; gebeurt dit niet, dan is $(a_n)_{n\geq 1}$ een begrensde, monotoon stijgende rij en $(b_n)_{n\geq 1}$ een begrensde, monotoon dalende. Voor de verschilrij $(b_n - a_n)$ geldt

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-n},$$

en daarom hebben de rijen (a_n) en (b_n) dezelfde limiet p. Dat $p \in [a, b]$ is per constructie duidelijk, en dat $p \neq a, b$ volgt onder meer uit het feit dat in geval (2) niet uitsluitend het linker of rechter halve interval wordt gekozen. Een standaardargument (gebruik makend van het feit dat f differentieerbaar is in $x = p$ en dat $M = \lim_{n\to\infty}(f(b_n) - f(a_n))/(b_n - a_n) = f'(p)$ bewijst dat inderdaad p een middelwaardepunt is.

n	a_n	b_n	p_n	$f'(p_n)$	e_n
1	0	1	0,5000	-1,2007	0,5000
2	0	0,5000	0,2500	1,0939	0,2500
3	0,2500	0,3325	0,2913	0,5122	0,0413
4	0,2913	0,2925	0,2919	0,5025	0,0006

Tabel 1

Het in geval (3) gebruikte resultaat is het volgende.

Lemma. Stel $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ is continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b). Laat L de lijn door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ zijn, $p \in (a, b)$, en L' de lijn door $(p, f(p))$ evenwijdig aan L.
Als L' niet de raaklijn aan de grafiek van f in $(p, f(p))$ is, en bovendien $L \neq L'$, dan snijdt L' de grafiek van f in een punt $(q, f(q))$ met $a < q < b$ en $q \neq p$.

Bewijs. Laat M de richting van de lijn L zijn. Door eventueel de functie $x \mapsto f(x)$ te veranderen in $x \mapsto \pm f(\pm x)$ mogen we aannemen $f'(p) > M$ en $f(p) > L(p)$. Schrijf de vergelijking voor L' als $y = Mx + k = M(x - p) + f(p)$ en definieer $g(x) := f(x) - Mx - k$. De functie g is continu, negatief voor $x = a$ en voor $x = b$, en er is een nulpunt voor $x = p$. Omdat $\lim_{h\to 0}(f(p + h) - f(p))/h = f'(p) > M$, bestaat een $h > 0$ zodat $g(p + h) = f(p + h) - f(p) - Mh > 0$. De continue functie g voldoet dus aan $g(p + h)g(b) < 0$, en dus heeft g een nulpunt $q \in (p + h, b)$. Het vinden van zo'n punt in een concreet geval kan (bijvoorbeeld) met de gewone bisectiemethode toegepast op een geschikt gekozen interval $[p + h, b - h]$. Dit levert het gezochte snijpunt $(q, f(q))$. $\square$

Als voorbeeld nemen we de functie f op het interval $[0, 1]$ gegeven door

$$f(x) := e^{-4x} \sin(4\pi x^2) + \frac{1}{2}x.$$

De lijn door de eindpunten $(0, 0)$ en $(1, \frac{1}{2})$ geeft richting $1/2$. Ook bij het midden $x = \frac{1}{2}$ snijdt deze lijn de grafiek van f, dus de eerste iteratie van het algoritme gaat volgens geval (2). Het middelwaardepunt c voldoet aan de ongelijkheid $|p_n - c| \leq e_n := |b_n - a_n|/2$, dus voor de benadering p_n van dit punt is de fout hoogstens e_n. De (lineaire) convergentie is duidelijk te zien in tabel 1.