

Gerard Stroomer

Citogroep
Nieuwe Oeverstraat 50,
6811JB Arnhem
gerard.stroomer@citogroep.nl

Nol Reebok

Adres bij redactie bekend

Onderwijs

Examens in de steigers

Niet alleen scholieren maken wiskunde-examens, ook andere geïnteresseerden, zoals professionele wiskundigen halen de examens van de website van de Citogroep en lossen de vraagstukken op. Vanuit hun perspectief houden zij de examens wiskunde B1 en B1,2 van het vwo tegen het licht. Af en toe is hierbij de eigen middelbare schooltijd het enige referentiekader en dan vragen ze zich af of dit nou alles is wat er nog geleerd wordt.

Vooraf de kritiek uit de universitaire wereld op de examens vwo wiskunde B is niet mals. Zijn de examens werkelijk zo slecht als daar wordt beweerd? In dit artikel vertellen Gerard Stroomer en Nol Reebok hoe de examens tot stand komen en welke ontwikkelingen de afgelopen jaren van invloed zijn geweest op de inhoud van de examens. Geven de eindexamens zicht op de huidige stand van cultuuroverdracht in ons vak? Bepalen de examens het onderwijs of is het andersom? Gerard Stroomer is toetsdeskundige bij de Citogroep en Nol Reebok (pseudoniem) is lid van de constructiegroep wiskunde B vwo.

De Tweede Kamer heeft in 1998 het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B in de Tweede Fase vastgesteld. De voorstellen hiervoor zijn geformuleerd door een vakontwikkelgroep, ingesteld door het ministerie van OCW. Deze voorstellen zijn in het *Profi-project*, ook ingesteld door het ministerie van OCW, uitgewerkt in concreet voorbeeldmatig lesmateriaal en door middel van veldexperimenten onderzocht op haalbaarheid. Ook heeft het *Profi-team* trajectenboeken geschreven voor auteurs en examenmakers, waarin de programma's worden beschreven en

afgebakend [1]. De trajectenboeken zijn geschreven in samenwerking met twee resonansgroepen. Hierin hadden, naast enkele leden van de vakontwikkelgroep en vertegenwoordigers van de Citogroep, de Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo (CEVO) en de Onderwijsinspectie, ook hoogleraren en universitair docenten zitting.

In de Regeling profielen 2000 zijn de examenprogramma's aangepast: wegens gebleken overladenheid is een aantal eindtermen geschrapt [2].

De CEVO

De Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven bestaat uit een algemeen bestuur, waarin het georganiseerde onderwijsveld is vertegenwoordigd, en uit een vaksectie voor elk examenvak. Elke vaksectie, dus ook de vaksectie wiskunde B, bestaat uit een voorzitter en twee leden. Deze twee leden geven als leraar les aan examenkandidaten. De voorzitter van de vaksectie is afkomstig uit het wetenschappelijk onderwijs of hoger beroeps-onderwijs. Eén van de leden wordt benoemd op voordracht van de vakgebonden organisatie (Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren), het andere lid op voordracht van de personeelsorganisaties. De voorzitter en de leden van de vaksectie hebben een zittingsduur van drie jaar. Hun benoeming kan met twee termijnen verlengd worden tot maximaal negen jaar.

De CEVO werkt met een hoge mate van zelfstandigheid onder de eindverantwoordelijkheid van de minister. De taak van de CEVO is geregeld in het Eindexamenbesluit artikel 39. De CEVO geeft enige uitvoeringsregels voor

het centraal examen: het examenrooster, de bij een examen toegestane hulpmiddelen, regels voor de beoordeling van een examen. Zij stelt na afloop van een examen de definitieve normering vast.

De vaksectie stelt het examenmodel wiskunde B vast. Daarin staat hoe lang een examen duurt, welke onderwerpen aan de orde komen, en in welke mate, en welke vaardigheden (zoals informatievaardigheden en gebruik van de grafische rekenmachine). In het examenmodel staat ook hoeveel contexten en hoeveel vragen het examen omvat en welke hulpmiddelen gebruikt mogen worden. De vaksectie geeft met het examenmodel aan de Citogroep een gespecificeerde opdracht voor de productie van opgaven voor het centraal examen. Ook bespreekt de vaksectie voorstellen voor het examen en stelt zij het examen vast [3].

De Citogroep

Met de opdracht van de CEVO gaat de Citogroep aan de slag. Bij het examen wiskunde B vwo zijn twee toetsdeskundigen betrokken en een constructiegroep. De leden van de constructiegroep zijn allen werkzaam in het voortgezet onderwijs. De constructiegroep ontwerpt de opgaven waaruit een examen wordt samengesteld. Daarna moet het geheel nog bijgeschaafd worden om te zorgen dat de set opgaven voldoet aan het examenmodel. Zodra de keus voor de opgaven is gemaakt en een aantal verbeterlagen is uitgevoerd, leggen de toetsdeskundigen het eerste concept voor aan de CEVO-vaksectie. De CEVO-vaksectie levert commentaar op de opgaven waarmee de toetsdeskundigen en

de constructiegroep weer aan het werk gaan. Regelmatig worden vragen in de praktijk getest. Na een paar keer commentaar en nog enkele verbeterlagen kan het examen worden vastgesteld. Vóór de vaststelling wordt het examen gescreend door een onafhankelijke screener (meestal een ex-lid van de CEVO-vaksectie, of iemand met een specifieke deskundigheid). Het hele proces duurt per examen meer dan een jaar en moet afgerond zijn in de maand september voorafgaande aan het examen. Daarna wordt het examen gereed gemaakt voor de drukker.

Het examenprogramma is veranderd

In het voorwoord van de syllabus Wiskunde B vwo [4], in opdracht van de CEVO samengesteld door de Citogroep, schrijft de voorzitter van de CEVO, J. Bouwsma:

“De Vernieuwde Tweede Fase van havo en vwo betekent een ingrijpende verandering op alle gebieden van het onderwijs. Pedagogisch, didactisch, vakinhoudelijk en organisatorisch verandert er veel. Dit leidt ook tot veranderingen in de examinering. [...] In de centrale examens zijn de veranderingen tweemaal:

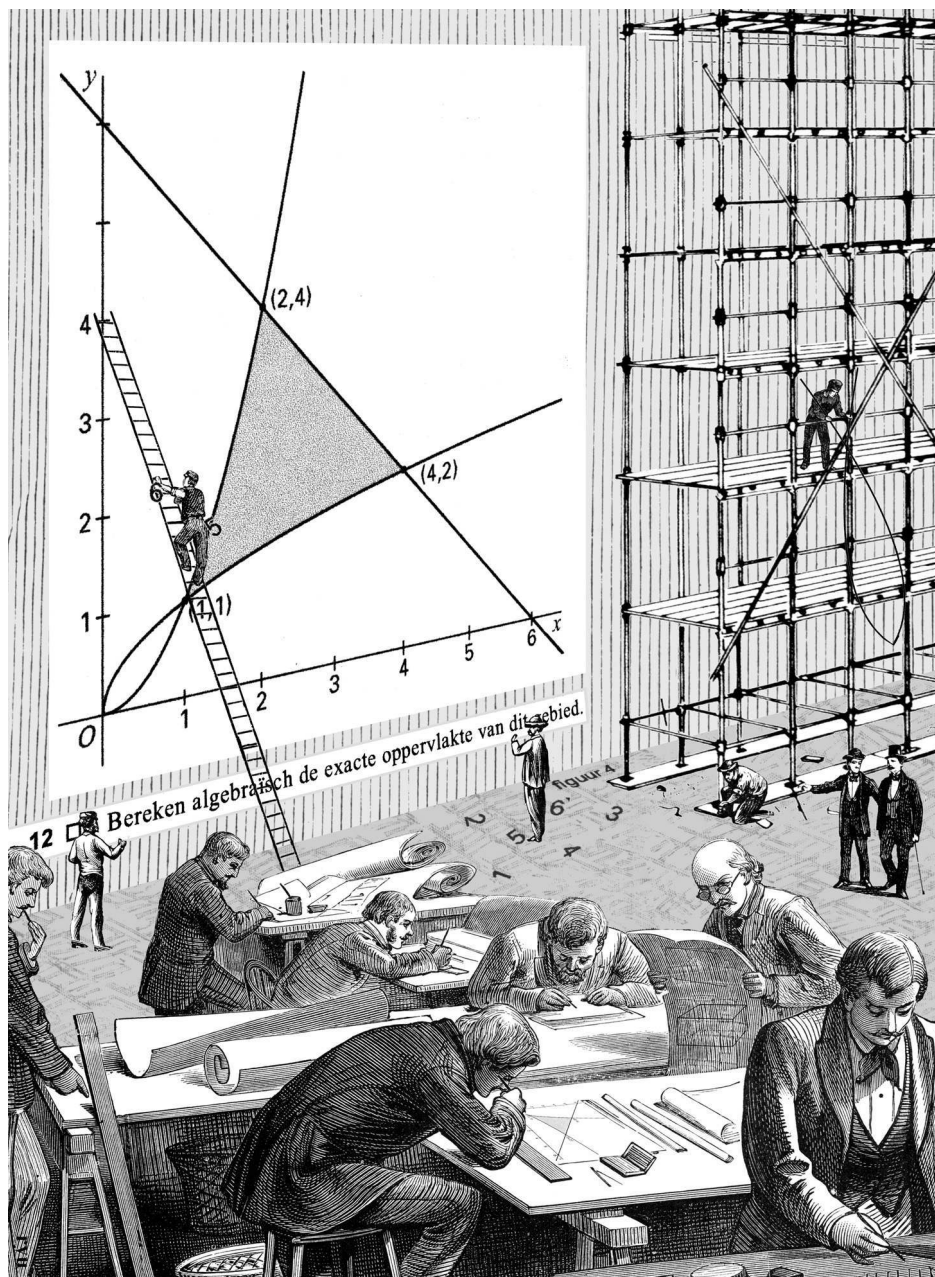
- De vakinhouden in de nieuwe examenprogramma's en dus in de nieuwe examens zijn veranderd. [...]
- De nieuwe examenprogramma's zijn sterker dan voorheen gericht op vaardigheden. Voor een deel kunnen deze vaardigheden het best geëxamineerd worden in het schoolexamen. In de centrale examens zullen vaardigheidsvragen voorzover dat in een schriftelijk examen kan ook een plaats gaan innemen. [...]

De vakinhoudelijke verandering in wiskunde B illustreren we aan de hand van het domein Differentiaal- en Integraalrekening dat ook al in het oude examenprogramma voorkwam. Over de verandering staat in het rapport van de vakontwikkelgroep (zie [1], blz. 7):

“De benadering van de analyse zal een dynamisch karakter hebben en er dienen, meer dan in het huidige onderwijs, numerieke accenten te worden gelegd. Door meer nadruk te leggen op differentiequotient en Riemannsom als discreet-numerieke benadering van afgeleide en integraal, kan de typisch analytische begripsvorming beter tot zijn recht komen en kan worden voorkomen dat differentiëren en integreren door leerlingen worden ervaren als het toepassen van een serie algebraïsche trucs.”

Nog een citaat uit dit rapport ([1], blz. 7):

“De exercitie met het algebraïsch differentiëren kan zich in principe beperken tot



elementaire gevallen (standaardfuncties en combinaties daarvan), nu men ervan kan uitgaan dat iedere toekomstige student aan universiteit of hogeschool toegang zal hebben tot een computer-algebrapakket. Bovendien zal de leerling bij het differentiëren gebruik kunnen maken van een formulekaart.”

De examens zijn veranderd

Als gevolg van de veranderingen in het examenprogramma is ook de inhoud van de examens zelf veranderd. Wim Groen vergelijkt in zijn artikel Vier decennia wiskundeonderwijs (Nieuw Archief voor Wiskunde, december 2003) examenopgaven over differentiaal- en integraalrekening uit 1962, 1982 en 2002. Om doublures met dat artikel te vermijden bekijken we hier hoe de verandering van het examenprogramma doorwerkt in opgaven uit het domein Goniometrische functies. We kiezen examenopgaven uit 1991 en 2002 (zie figuren 1 en 2).

De opgave uit 1991 bestaat uit standaardvragen. Dezelfde vragen hebben de leerlingen al tientallen keren geoefend, alleen de kromme zelf is nieuw. De laatste vraag is, zoals toen gebruikelijk, het tekenen van de kromme. Er is grote nadruk op rekentechniek, inzicht is niet echt nodig.

De opgave uit 2002 heeft niet zo'n standaarddrijtje vragen en heeft een dynamischer karakter. De opgave eindigt niet met een tekening, maar begint ermee. De opgave is minder goed op routine te maken; er is meer

Opgave 1

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is voor $t \in (-\pi, \pi)$ de kromme K gegeven door

$$x = 1 + 2 \sin t \quad \text{en} \quad y = \ln(1 + \cos t).$$

- 1 Onderzoek welke waarden x kan aannemen en onderzoek welke waarden y kan aannemen.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten van K met de x -as en bereken in één decimaal nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van K met de y -as.
- 3 Bereken de coördinaten van de punten van K waarin de raaklijn aan K evenwijdig is met een van de coördinaatassen.
- 4 Geef een vergelijking van de asymptoot van K en toon aan dat deze asymptoot tevens symmetrie-as is van K .
- 5 Teken K .

Figuur 1 Examen 1991 eerste tijdvak

creativiteit voor nodig. Rekentechniek speelt niet zo'n prominente rol, maar wordt niet vergeten.

De opgave uit 1991 zou waarschijnlijk in 2002 slecht gemaakt zijn. De opgave uit 2002 zou in 1991 ook slecht gemaakt zijn. De opgaven zijn zo verschillend omdat ze horen bij verschillende examenprogramma's.

De opgave uit 2002 is een illustratie van hetgeen in het trajectenboek over goniometrie is te lezen (blz. 23): "In vergelijking met het 'oude' programma valt in het nieuwe domein goniometrische functies vooral de nadruk op bewegingen op; goniometrische functies worden gebruikt om bewegingen te modelleren. Daarnaast is het gebruik van de GR een nieuw aspect. Minder aandacht dan voorheen wordt besteed aan het oplossen van goniometrische vergelijkingen. De formulekaart maakt het uit het hoofd leren van formules overbodig."

De relatie onderwijspraktijk — examens

Als gevolg van het Profi-experiment, de trajectenboeken en de wiskundemethoden is het onderwijs veranderd. De examenmakers maken hun opgaven op grond van het examenprogramma, maar staan ook met beide benen in de onderwijspraktijk. Als de onderwijspraktijk verandert, heeft dat via de leden van de constructiegroep, met enige vertraging, ook invloed op de examens. De leden van de constructiegroep weten namelijk wat goed gaat in de klas en wat niet, en houden daar vanzelf rekening mee bij de constructie van hun opgaven. Omgekeerd is het natuurlijk ook waar dat de examens invloed hebben op de onderwijspraktijk. Als een bepaalde activiteit weinig aan bod komt in examens, zal op den duur daaraan in de lessen minder aandacht worden besteed.

Overigens gaat de wederzijdse beïnvloe-

ding langzaam. Veranderingen worden pas na jaren goed zichtbaar.

Kritiek

Binnen sommige universitaire kringen bestaat weinig begrip voor de huidige examens wiskunde B in het vwo; zie onderstaande citaten.

- "Het curriculum daar (op het vwo) is treurig, de examenopgaven zijn treurig en de manier waarop het werk nagekeken wordt is treurig. Het bewijzen is uit de lesstof verdwenen en in plaats daarvan hebben we realistische wiskunde gekregen die abstracties schuwt." (H. Barendregt, NRC, 07-11-02)
- "De wiskundige inhoud van de zes onderdelen is gering, soms zelfs zeer gering. [...] Vaardigheid in het manipuleren van formules en vindbaarheid bij het vinden van sluitende redeneringen worden niet verlangd [...] De manier waarop de grafische rekenmachine mag worden ingezet betekent niet minder dan een uitroeien van de wiskundige cultuur." (F. Keune, Kennisnet, 25-05-04)
- "Het is triest om te zien hoe weinig men hedentendage in zes jaar leert [...] Ook dit jaar valt het op dat de algebraïsche vaardigheden zijn gereduceerd tot optellen en delen." (J. van Lint, Kennisnet, 25-05-04)

Natuurlijk zijn er ook andere geluiden:

- "Een blik op de eindtermen leert dat deze tweede fase wiskunde bestaat uit een ambitieuze lijst van onderwerpen met een enorme variatie. Daar zitten ook hele leuke onderwerpen bij, ook wat stokpaardjes van deze of gene, en het wiskundig bewijs is in ere hersteld en wordt onderwezen aan de hand van de vlakke meetkunde in de tweede fase. Verder is er ook een lijst van verplichte vaardigheden, die een eerste-

tweedejaars wiskundestudent niet zouden misstaan. Dat is de theorie. Nu de praktijk. [...] Als we de recente examens als representatief mogen beschouwen, moeten we concluderen dat de zogenaamde context opgaven en realistische wiskunde ook bij de 'harde' wiskunde B hun intrede hebben gedaan en een belangrijke rol spelen." (F. Beukers, Oratie 22 okt. 2001, NAW sept. 2002) [Overigens toont Beukers zich in het vervolg niet zo gelukkig met contextrijke opgaven in het examen.]

De nieuwe examens (of misschien beter: de nieuwe examenprogramma's) beantwoorden blijkbaar niet aan wat men ervan verwacht. Dat komt misschien ook omdat de voorlichting naar de vervolgopleidingen over de nieuwe examenprogramma's en de achtergronden daarvan onvoldoende is geweest. In de volgende paragrafen pogen we alsnog een en ander toe te lichten.

Vroeger was alles ...

Kritiek is niet nieuw. Vóór de invoering van de tweede fase pleit J. Wessels in het artikel 'Wiskunde-B-examen vooral opzitten en pootjes geven' in de *Cursor* van 3 oktober 1996 al voor minder standaard examens:

- "De manier waarop wiskunde B geëxamineerd wordt, is zodanig dat de leerling een aantal kunstjes moet kennen, hij moet als het ware opzitten en pootjes geven." Volgens Wessels is het hoofddoel van de docent namelijk om zoveel mogelijk mensen te laten slagen voor het Wiskunde-B-examen. Wessels: "Dat bereikt hij het beste door de leerlingen te drillen, ze veel trucjes te leren. Terwijl het bij de wiskunde juist gaat om inzicht, om de precisie van formuleren, om het kritisch kijken."

En Wessels staat bepaald niet alleen. Het rapport van de studiec commissie wiskunde B vwo (1994) vraagt ook om meer inzicht in het onderwijs: Doe minder wiskunde, maar laat die wel begrepen zijn [5].

In elk geval was vroeger alles anders, dat laten examenopgaven van vroeger en nu duidelijk zien. De opgaven in de tweede fase ademen een andere sfeer: ze zijn spelser, er zit een toepassingsaspect in en ze vragen minder algebraïsche techniek. In de opgaven vóór de tweede fase moest meer worden gerekend. De vragen waren standaard. De studiec commissie wiskunde B vwo schrijft in haar rapport [5]: "Standaardvragen zijn door een goed getrainde kandidaat op routine te maken, de volgorde van de stappen naar de oplossing is gesneden koek. Niet-standaardvragen daar-entegen vereisen naast toepassing van de no-

Een beweging door (0, 0)

De beweging van een punt in het Oxy -vlak wordt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 3 is de baan van het punt getekend.

6p **8** Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip $t = 0$.

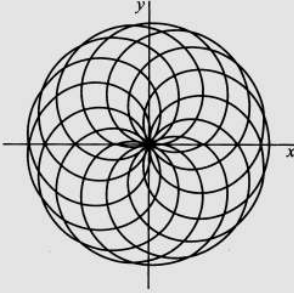
De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(8\frac{1}{2}t) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(8\frac{1}{2}t) \end{cases} \text{ met } r(t) = 2 \cos(6\frac{1}{2}t)$$

4p **9** Toon dit aan.

Bij het doorlopen van de baan van figuur 3 voor $0 \leq t \leq 2\pi$ passeert het punt een aantal keren $(0, 0)$.

6p **10** Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.



Figuur 2 Examen 2002 eerste tijdvak

dige technieken ook wiskundige activiteit op een hoger niveau. De kandidaat moet zich in deze situaties een weg banen naar de oplossing..."

Met de huidige (2004) bril op kan over de examens van vroeger het volgende gezegd worden.

- Het eindexamen was vroeger voorspelbaar: drie opgaven analyse (functieonderzoek, parameterkromme, differentiaalvergelijking) en één opgave ruimtemeetkunde.
- Het eindexamen kon je vroeger goed trainen. Sommige scholen begonnen daar dan ook in september in vwo 5 mee. De vraag "Onderzoek de functie en teken de grafiek" kwam in elk examen voor. Die werd dus uitentreuren op school gesteld. En dat ging ten koste van de creativiteit.

Het risico van deze wiskundecultuur ligt voor de hand: als een examenopgave ook maar een beetje afweek van de standaard, werden de resultaten een fiasco. Het niveau van de examens uit de periode voor de vernieuwde tweede fase was dus gedeeltelijk schijn. Het leek heel wat, maar stelde in creatieve zin weinig voor.

Tegenwoordig

Tegenwoordig krijgen de leerlingen vaak nieuwe situaties voorgeschoteld. Dan moeten ze min of meer creatief zijn. Als je zulke examens voorlegt, moet je uiterst voorzichtig zijn. Het is heel moeilijk om in drie uur tijd nieuwe dingen te verzinnen. Als je een situatie voor de eerste keer ziet, kom je vaak niet meteen op het goede idee. Misschien pas een dag later, of pas als je er met iemand over hebt gepraat! Maar dat kan niet op een examen.

De tweedefase-examenopgaven gaan ergens over. Ze behandelen een onderwerp. Dat kan op het gebied van een natuurkundige toepassing zijn, maar ook binnen de meetkunde of zelfs in een analysecontext. Dit brengt met zich mee dat de opgaven vaak een langere introductie behoeven.

In het programma B12 heeft het bewijzen een belangrijke plaats gekregen, namelijk in het domein Voortgezette meetkunde. Terwijl vóór de tweede fase een bewijs inhield dat de leerling door een berekening het beweerde moest aantonen, gaat het in de vlakke meetkunde om het zuivere wiskundig redeneren.

Conclusie

Het type examenopgave is thans heel anders dan vroeger. Achteraf is die verandering van jaar tot jaar aanwijsbaar. Er zijn drie hoofdmotieven voor de veranderingen.

- Door de verder gevorderde techniek heeft het bijvoorbeeld geen zin het tekenen van de grafiek als einddoel te stellen, terwijl je de grafiek op de GR onmiddellijk kunt tekenen. Eerder dient de grafiek thans als uitgangspunt voor onderzoek van de functie.
- Opvattingen zijn veranderd. De studiec commissie wiskunde B vraagt om meer inzichtsvol onderwijs: doe meer aan begripvorming. In de enquête die de commissie afnam onder vwo-scholen vindt de meerderheid van de respondenten dat er meer aandacht moet zijn in het B-programma voor redeneren en bewijzen en dat meer ingespeeld moet worden op creativiteit en inventiviteit.
- Er is in het wiskundeonderwijs meer aandacht voor algemene vaardigheden (domein A uit het examenprogramma). Het onderwijs is meer onderzoekend geworden; denk aan de praktische opdrachten en het profielwerkstuk. Vaak werken leerlingen zelfstandig en is de docent meer begeleider van het leerproces geworden. Deze andere werkhouding komt ook in de examens tot uitdrukking.

Recente ontwikkelingen

De Tweede Kamer heeft dit voorjaar de nieuwe plannen voor de herziening van de tweede fase aangenomen. Daarin is voor wiskunde B vwo minder studielast voorzien (van 760 naar 520 studiebelastinguren). De NVvW heeft daar krachtig tegen geprotesteerd; de HBO-raad en de VSNU ook. Dat heeft echter niet geholpen. De minister luisterde niet naar wat ze lobby noemde. Integendeel: met minder wiskunde worden de natuurprofielen makkelijker en dus aantrekkelijker, aldus de minister. Het programma dat in 2007 van start gaat, zal zijn weerslag vinden in nieuwe examens. En die zullen weer veel mensen uit de universitaire wereld aan het schrijven zetten. Misschien schrijven wij dan wel weer een reactie.

Noten

- 1 Profi-team, Trajectenboek Wiskunde N&G en N&T vwo, Freudenthal Instituut, januari 1998.
- 2 Het examenprogramma is te vinden op de website www.nvww.nl/Eindtermen2.html.

- 3 De website van de CEVO is www.cevo.nl.
- 4 Lagerwaard, K. en G. van Lent, Syllabus wiskunde B vwo, CEVO en Cito, januari 1999.

- 5 Wiskunde B vwo, rapport studiec commissie ISBN 90-74684-02-5.
- 6 Zie voor recente vwo wiskunde B-examens de website www.havovwo.nl/vwo/vwb.