Lodewijk van Schalkwijk
Instituut voor Leraar en School
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 38250
6503 AG Nijmegen
vanschalkwijk@planet.nl

Onderwijs

Tussen haarkloverij en pannenkoekwiskunde

Het Latijnse woord voor verhouding is Ratio. Ook staat het voor denkvermogen, rede en verstand. Het is tevens de naam van het instituut aan de Radboud Universiteit Nijmegen dat zich ten doel stelt het secundaire wiskundeonderwijs te bevorderen. In dit artikel worden twee activiteiten van het instituut uitgelicht: het project 'Wiskundig Denken' voor de bovenbouw van het vwo en de zogenaamde 'internetmethode' voor de onderbouw. Met deze twee projecten geeft het instituut invulling aan haar naam door steeds te streven naar een evenwichtige verhouding tussen toepassing en praktijk.

Samen met oprichter Frans Keune geeft Lodewijk van Schalkwijk leiding aan dit Instituut. Hij promoveerde op het proefschrift 'Onderzoekend wiskunde leren' en is als didacticus verbonden aan het instituut voor Leraar en School van de Radboud Universiteit.

Het is drie jaar geleden dat *Ratio* van de grond is gekomen als instituut van de subfaculteit wiskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen (KUN), thans Radboud Universiteit. De missie van Ratio wordt verwoord in de volgende citaten uit de inaugurele rede *Naar de knoppen* van Frans Keune. *"Het is hard nodig dat er op het vwo een leerweg komt die al in de brugklas begint speciaal voor leerlingen die enige aanleg voor exacte vakken hebben. En dat zijn meer leerlingen dan sommigen denken. Vroege selectie is heel goed mogelijk: wiskundeleraren hebben doorgaans in de brugklas omstreeks de kerst al een goed beeld van de capaciteiten van hun leerlingen. De wiskunde zal in zo'n leerweg een centrale rol moeten hebben. Dat zeg ik niet omdat ik een wiskundige ben, maar op grond van inzichten in de rol van de wiskunde en het wiskundeonderwijs."*

De activiteiten binnen Ratio hebben betrekking op twee deelprojecten: *Wiskundig denken* voor de bovenbouw vwo en de *internetmethode* voor de onderbouw van het vwo. Het bovenbouwproject speelt tevens een rol in de master-opleiding *Mathematics and Education* en daardoor ook in de opleiding tot eerstegraads leraar wiskunde. In het volgende zal ik een impressie geven van de twee deelprojecten en de betekenis voor de genoemde master ME en de opleiding tot eerstegraads wiskundeleraar.

Wiskundig denken

In de jaren 1992–1996 werden door de vakgroep wiskunde van de *KUN* de *Wiskunde C*-cursussen georganiseerd voor leerlingen van 5 vwo, als extra buiten het normale schoolcurriculum. Bij de invoering van de nieuwe profielen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs ontstond de mogelijkheid leerlingen te begeleiden bij hun profielwerkstuk en praktische opdrachten. Dit valt binnen het curriculum en is daardoor meer levensvatbaar. Bij het project *Wiskundig denken* kunnen leerlingen uit de bovenbouw van het vwo kiezen uit een drietal thema's. *Fractals* en *cryptografie* zijn daarbij min of meer vaste onderwerpen. Vorig schooljaar was *speltheorie* het derde thema en dit jaar *krommen*. In het afgelopen najaarssemester hebben negentig leerlingen uit de bovenbouw van het vwo meegedaan, waarvan er dertig hebben ingetekend voor een praktische opdracht en zestig voor een profielwerkstuk. Een citaat uit de afsluitende evaluatie van het profielwerkstuk van twee leerlingen, over krommen, geeft een aardige eerste indruk.

"Leerzaam, interessant en moeilijk; dat zijn de drie kernwoorden die we het beste kunnen gebruiken voor het maken van ons profielwerkstuk. We hebben er veel van geleerd op het gebied van wiskunde natuurlijk maar

Figuur 1 Op de internetpagina van Ratio staat onder andere een op het spel Tangram geïnspireerde puzzel van het logo.

ook op het gebied van het maken van zo'n groot werkstuk en ook de manier waarop het gegaan is via de universiteit. [...]

Er was altijd de nodige begeleiding aanwezig wanneer je hulp nodig had omdat je er niet uitkwam. De lessen waren (meestal) ook goed te volgen. Een aanrader voor de leerlingen in de jaren na ons!

Toen we daarna het verder een beetje zelf uit moesten gaan zoeken wat we nu verder deden viel dat wel een beetje tegen. We wisten niet goed waar we moesten beginnen. Nadat we toen wat plannen hadden gemaakt en deze ook hadden uitgelegd in een kleine presentatie op de universiteit, viel het nog vies tegen om deze te realiseren. Bewijzen die we van plan waren te geven waren veel te hoog gegrepen en na hier veel tijd in te hebben gestoken hebben we een aantal hiervan dan ook maar opgegeven. Uiteindelijk zijn er een paar andere dingen bijgekomen die we wel tot een goed einde hebben weten te brengen. Maar een ding is zeker: moeilijk was het wel! Dit heeft Niels echter niet op andere gedachten weten te brengen: hij is nog steeds van plan om wiskunde te gaan studeren. Het is ook een heel interessante manier van denken; logisch denken. We hopen dat het lezen van het werkstuk u ook wat wijzer heeft gemaakt, net zoals het dat ons heeft gemaakt."

Hun werkstuk, binnen het thema krommen, ging onder andere over kranen waarvan het uiteinde een deel van een *lemniscaat* beschrijft. Dergelijke kranen kun je met stangenconstructies nabouwen: de leerlingen hebben dit daadwerkelijk gedaan. Ook kwam er de nodige goniometrie bij kijken, bijvoorbeeld om van bipoolcoördinaten over te stappen op poolcoördinaten.

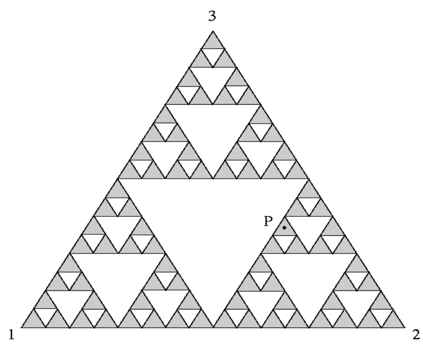
Het verzorgen van zo'n cursus voor middelbare scholieren legt een zware last bij de medewerkers van de subfaculteit wiskunde. Maar de opbrengst is groot een veelzijdig. De gekozen onderwerpen bijvoorbeeld, vallen buiten het schoolcurriculum, maar zijn wel goed toegankelijk voor leerlingen. De wiskundigen ontginnen als het ware nieuwe gebieden, waarvan sommige onderwerpen op den duur wellicht een vaste plek in de schoolboeken zullen vinden. Zo ontstaat een natuurlijke ontwikkeling en verversing van de schoolstof. De medewerkers aan de cursus krijgen een betere kijk op leerlingen en op de huidige schoolwiskunde en denken expliciet na over didactische mogelijkheden. Dat kan hun eigenlijke colleges alleen maar ten goede komen.

Vanuit het oogpunt van de leerlingen is een cursus als *Wiskundig denken* een goede zaak, zoals uit het citaat hierboven duidelijk naar voren komt. Ze krijgen een betere kijk op wiskunde en maken kennis met de gang van zaken op een universiteit. Leerlingen die overwegen wiskunde te gaan studeren, krijgen de gelegenheid een weloverwogen beslissing te nemen. Voor wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs betekent het enige taakverlichting, wanneer leerlingen hun profielwerkstuk op de universiteit maken. Maar de meesten kunnen de verleiding niet weerstaan zich te verdiepen in het onderwerp dat hun leerlingen bestuderen. Uiteindelijk blijven zij medeverantwoordelijk voor de beoordeling van het werkstuk.

How to solve it

In het programma van de master *Mathematics and Education* is ruim plaats voor wiskunde die in het bijzonder voor toekomstige wiskundeleraren van belang is, zoals Galoistheorie, geschiedenis van de wiskunde en meetkunde. Bovendien is het mogelijk de master af te sluiten met een didactische scriptie. De opleiding tot eerstegraads bevoegd docent, inclusief de stage, valt geheel binnen deze masteropleiding. Dit deel wordt verzorgd door het *Instituut voor Leraar en School (ILS)*. Een deel van de vakdidactiek uit de lerarenopleiding wordt gecombineerd met de vakgroepactiviteiten in het kader van Ratio. Als assistent van de wiskundigen die als docent van de verschillende thema's optreden is het mogelijk een bijdrage te leveren aan de cursus *Wiskundig denken*. De studenten die hiervoor kiezen krijgen ondersteunende vakdidactische colleges en daarbij passende opdrachten. Ze krijgen de gelegenheid zo nu en dan klassikale uitleg te geven en de leerlingen te helpen bij hun huiswerk. Ze begeleiden grotendeels zelfstandig enkele groepjes leerlingen bij het maken van hun profielwerkstuk. Er zijn uitstekende mogelijkheden om 'mini-lesjes' vast te leggen op audio of video en daaruit fragmenten te protocolleren en te analyseren.

Wanneer je leerlingen begeleidt bij een praktische opdracht of een profielwerkstuk,



Figuur 2 De zeef van Sierpinski

komt natuurlijk het 'begeleiden bij het probleemoplossen' aan de orde. De vier stappen van Polya (*How to solve it*, 1945) bieden dan het klassieke theoretische kader. De stappen zijn: (1) het probleem begrijpen, (2) een plan bedenken, (3) het plan uitvoeren, (4) het resultaat overzien.

Het onderstaande videoprotocol gaat over de zeef van Sierpinski (figuur 2). Begin met een regelmatig driehoekig gebied (S_0), inclusief de randen. Verbind de middens van de zijden en laat het inwendige daarvan weg. Er blijven drie driehoekige gebieden over (S_1). Verbind in elk van deze nieuwe driehoeken de middens van de zijden en laat wederom het inwendige daarvan weg (S_2). Enzovoort. Zo krijg je de oneindige rij figuren S_n. De doorsnede daarvan is de zeef van Sierpinski (S). Je ziet al gauw in dat elk punt dat in enig tussenstadium S_n op de rand ligt, tot S behoort. Maar zijn dat dan ook de enige punten van S?

Een groepje leerlingen wordt met dit probleem aan het werk gezet. Van hun worsteling wordt een video-opname gemaakt. Als hulpmiddel is een adresseringsmethode aangereikt. Het adres van P in figuur 2, begint in dat systeem met 2313 (van de eerste generatie driehoeken kies je die bij hoekpunt 2 hoort, van de tweede generatie de driehoek die bij 3 hoort, dan de driehoek die bij 1 hoort en dan weer die bij 3 hoort). Het fragment begint met een vraag van de leerlingen A, B en C aan de student H. Helaas is die vraag maar half verstaanbaar op het videobandje, maar na enige regels is het gesprek goed te volgen.

A: (We willen vragen welke punten) op de zeef van Sierpinski liggen.
H: In principe liggen alle punten wel op de zeef, maar niet allemaal liggen ze op de rand van een van die driehoeken, en, daar ging het eigenlijk om. Jullie snappen wel waarom deze lijn erop ligt (H wijst de buitenrand aan van hoekpunt 2 naar hoekpunt 3)?
A, B, C: Ja.
H: En, kun je ook een formule voor de lijn geven? Of niet?
H: Of een formule, de punten, hoe die gedefinieerd zijn? Wat voor staart ze hebben?
A, B, C: Adres of zo?
H: Ja, ja.
A, B, C knikken bevestigend en reageren onverstaanbaar.
H: En, waar eindigt deze op? (H wijst weer op de buitenrand 23)
B: Twee, twee, twee, ...
A: Ja, tweeën of drieën, tweeën en drieën.
H: Effetjes kijken.
B: Tweeën toch?
A: Of drieën.

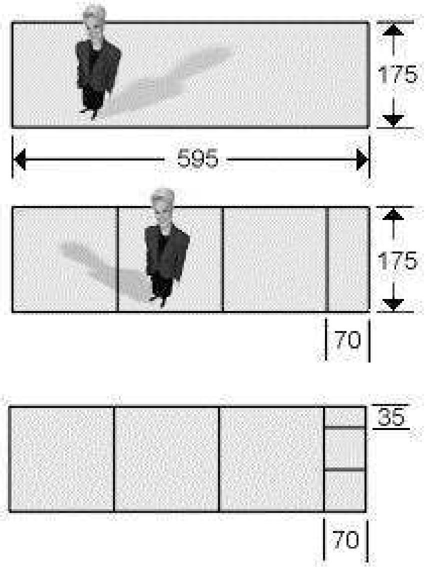
Eerste klas	Tweede klas	Derde klas
1 Tellen	11 Machten	18 Verbanden
2 Passen en meten	12 Veelhoeken	19 Goniometrie
3 Formules	13 Vergelijkingen	20 Ruimtelijke figuren
4 Ruimte	14 Gelijkvormigheid	21 Lineaire functies
5 Algebra	15 Haakjes	22 Kwadraten en wortels
6 Breuken	16 Stelling van Pythagoras	23 Vierkantsvergelijkingen
7 Driehoeken	17 Ontbinden	24 Functies
8 De getallenlijn		
9 Afstanden		
10 Negatieve getallen		

Tabel 1

[...]
A: Ze eindigen op tweeën of drieën.
B: Nee, op tweeën, want anders komt dienooit op die lijn (wijst op rand 23).
A: En op drieën want anders komt die toch daar (wijst op hoekpunt 2).
B: Ja, vooruit.
H: Ja, nee, hij eindigt alleen op drieën zelfs, want als je, nee
C: Hier eindigt die op een 2 (wijst op het hoekpunt 2).
H: Als je hier net in dit driehoekje gaat kijken (wijst naar een driehoekje dat grenst aan de rand 23), [...] (en) als je voor twee blijft kiezen, dan ga je naar dit punt toe, alleen maar tweeën is dit punt, en zodra je een 1 kiest ben je van deze lijn af, of ga je niet meer naar deze lijn toe,
C: Dus je moet tweeën of drieën kiezen.
H: maar als je een drie kiest, kom je op deze lijn terecht en als je dan drieën blijft kiezen dan blijf je op die lijn terecht komen.
H: Dus als je steeds, zeg maar, en hier, deze lijn, heb je dat ook, even kijken, deze lijn die eindigt op allemaal, oh jeetje, dit waren allemaal drieën, dit allemaal tweeën,
B: enen en drieën
H: Ja, dit zijn allemaal enen en drieën, dit zijn
C: tweeën en drieën weer.
H: (knikt) en dit zijn dan enen en tweeën
A, B, C: Ja
[...]
H: Dat kun je voor deze lijn ook doen, zeg maar, dan kun je ook kijken of dat die misschien alleen maar op 1-en of 3-en eindigt.
H: Als je nou naar een punt gaat kijken, je kijkt bijvoorbeeld naar 123123123..., dan ga je, eerst ga je naar 1, en dan naar 2, dus dan kom je in deze (driehoek terecht)
B: Ja
H: en als je dan naar 3 gaat heb je punt 1,2,3, of eh het driehoekje 123, da's deze, dan ga je weer naar 1, dan heb je weer een zo'n driehoekje iets, dat is die, en dan ga je weer naar 2, dan ga je weer opzij, en je blijft zeg maar zo
B: O, je blijft steeds rondjes draaien.
H: rondjes draaien
B: Je komt nooit op een lijn, omdat altijd weer een 3 gebruikt in plaats van alleen tweeën en drieën of alleen tweeën en enen.
A: Ah zo, ja, dus als je hier, kijk als je hier naar die lijn zou gaan (de 2-3-lijn) en je kiest hier voor een 1 dan ga je dus niet meer naar die lijn,
H: Nee
A: en dat doe je dus hier de hele tijd.
H: Ja.
A: Dus dan blijf je daar mee doorgaan
H: Ja, kun je nog een voorbeeld geven? Van alleen 2-en en 3-en, dus van alleen 123,123,123? (maakt het gebaar van iets wat steeds maar doorgaat) Een ander voorbeeld?
A: Ja, gewoon een de hele tijd terugkerend patroon
B: Ja zolang ze er alledrie inzitten
A: of niet?
H: Ja, want als je alleen
B: je moet ze er alledrie in hebben zeg maar dat het de hele tijd terugkomt.
C: 1,1,2,2,3,3,1,1,2,2,3,3,
H: Ja
A, B, C: oke., we snappen het.
H: oké

Als ervaren docent kun je wel enige punten in de begeleiding aanwijzen die voor verbetering vatbaar zijn. Belangrijk is echter dat ook de student zelf daar aandacht voor krijgt. Video en audio zijn dan goede hulpmiddelen. Dat blijkt wel uit de nabeschouwing van de student:

"We waren deze bijeenkomst bezig met adressen in de zeef van Sierpinski. De leerlingen vragen welke punten op de zeef van Sierpinski liggen. Ik geef antwoord op deze vraag en probeer het werkelijke probleem te zoeken. Dit lukt maar matig, omdat ik ja-



Figuur 3 Een dame wil haar gang met afmeting 595 bij 175 betegelen met zo groot mogelijke vierkante tegels. Ze haalt er eerst vierkanten af ter grootte van de breedte van de gang, zodat ze een kleiner stukje gang overhoudt. Daarvan haalt ze weer vierkanten af totdat ze een stukje overhoudt dat precies overdekt kan worden met vierkante tegels ter grootte van de breedte (35). Zo heeft ze de grootste gemene deler van 595 en 175 gevonden.

neevragen gebruik. Een les voor in de toekomst: stel zoveel mogelijk open vragen. Dan kom je er sneller achter wat de leerlingen niet snappen.

We gaan in discussie over een opgave en we komen er uit. Naderhand bekeken heb ik eigenlijk de opgave voorgezegd, iets waar je als docent voor moet oppassen. Het is wel de gemakkelijkste weg, maar zeker niet de beste.

Ze hebben de opgave niet alledrie begrepen, en ik doe nog een poging om het op een andere manier uit te leggen. Als een van de leerlingen iets anders zegt, valt het kwartje. Ze mogen zelf een voorbeeld geven van een punt dat niet op de zeef ligt, en dat lukt.

Er is een hele boel aan te merken op de manier waarop ik te werk ben gegaan. Kijken we naar het stappenplan, dan zien we dat ik twee stappen ben vergeten. We hebben niet besproken hoe we het willen aanpakken, en ook niet of het resultaat wel kan kloppen.”

Ze schrijft dat ze ervan overtuigd is geraakt dat het stappenplan echt heel belangrijk is.

“Als je dit niet volgt, dan zit je al snel iets uit te leggen zonder dat er structuur in zit, en leerlingen zullen dan sneller problemen met dezelfde stof krijgen.”

In de rest van de cursus heeft ze dan ook geprobeerd dat consequenter toe te passen.

Uit het vorige moge duidelijk worden dat de cursus *Wiskundig denken* een belangrijke rol speelt in de master Mathematics and Education. Het toegankelijk maken van interessante wiskunde voor leerlingen gepaard aan bewuste aandacht voor didactische vaardigheden vormt een geschikte start voor de opleiding tot leraar.

De internetmethode

De internetmethode voor de onderbouw is het tweede deelproject van Ratio. Op den duur moet deze methode het hele gebied van tien tot achttien jaar te bestrijken. Voorlopig richten we ons echter op de eerste drie klassen van het vwo. Na een periode van zoeken en experimenteren, van ontwikkelen, testen en bijstellen en het schrijven van basisprogrammatuur zit de vaart er nu goed in. Op de Ratiosite is onder Lesmateriaal het overzicht te vinden van de hoofdstukkenindeling (zie tabel 1).

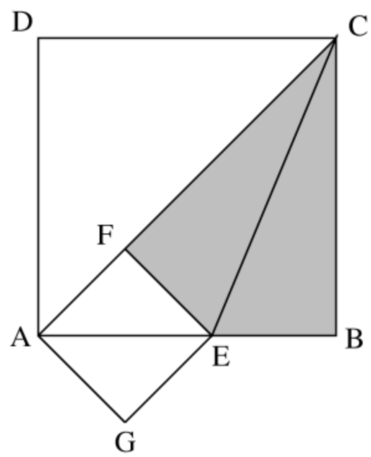
De hoofdstukken 1, 7, 11, 17 en 22 zijn klaar en al een of meerdere keren in de klas getest. Dit zijn voor het merendeel hoofdstukken uit de aanloopperiode. Vanaf het begin van dit schooljaar zijn we begonnen met de systematische productie vanaf het begin. Aan het einde van dit schooljaar 2003–2004 zullen de brugklashoofdstukken gereed zijn en klaar voor gebruik in school, inclusief alle bijkomende schriftelijke producten als overzichtsopgaven, zelftoetsen en proefwerken. De hoofdstukken van de tweede en derde klas kunnen bij dit productieschema royaal op tijd gereed zijn om scholen die nu starten, continuïteit te kunnen garanderen voor gebruik in de volgende klassen.

In zijn inaugurele rede stelt Frans Keune: *“Nodig is een lesmethode voor wiskunde waarbij het deductieve karakter wordt hersteld. Dat wil niet zeggen dat het weer moet zoals vroeger. Liever niet meer bijvoorbeeld een bewijs van de stelling van Pythagoras zonder het begrip oppervlakte om de enige reden dat je hem dan ook kunt bewijzen. Er gaapt een kloof tussen het vroegere rigide wiskundeonderwijs en het huidige realistische. Het is heel goed mogelijk om het deductieve karakter te behouden zonder in voor leerlingen onbegrijpelijke haarkloverijen te vervallen.”*

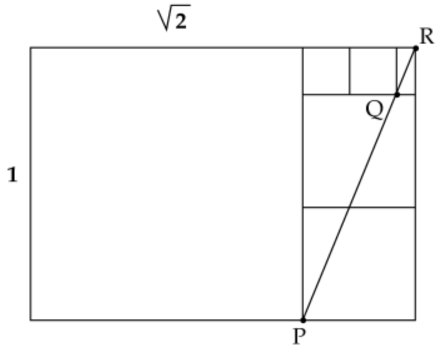
Het heeft nogal wat moeite gekost om een deductieve middenweg te vinden tussen *pannenkoekwiskunde* en haarkloverijen. Dat heeft immers ook heel sterk te maken met de groep leerlingen waarop je je richt. In de eerste experimenten betrof dat selecte groepjes van de beste leerlingen uit alle brugklassen van het Elzendaalcollege te Boxmeer. Daar zijn we snel van afgestapt. De leerlingen werkten liever in klassenverband dan in een uitzonderingspositie. Het materiaal dat we nu ontwikkelen is bruikbaar voor vwo-klassen en zeker voor vwo+-klassen, waarvan er steeds meer verschijnen. Achterliggende doelen die door ons hoofd spelen zijn: (1) de leerlingen een goed getalbegrip bijbrengen, zowel van de natuurlijke, de rationale als de reële getallen en (2) de leerlingen naar de hoogtepunten van de klassieke meetkunde leiden, zoals de stelling van Pythagoras en de gulden snede. Wanneer meetkunde weer uit het curriculum van de bovenbouw verdwijnt — en dat lijkt onvermijdelijk — kunnen leerlingen toch kennisnemen van deze hoogtepunten uit de klassieke wiskunde.

De gulden snede, en meer in het algemeen incommensurabiliteit, kan een mooi bindend element vormen door verschillende hoofdstukken heen. Beginnend met de grootste gemene deler (GGD) van twee natuurlijke getallen komen we via het algoritme van Euclides uit bij irrationale getallen, waarvan het gulden snede-getal een voor de hand liggend voorbeeld is. Een mooi zijspoor is het onderwerp kettingbreuken. Nadat in het eerste hoofdstuk *Tellen* de begrippen de GGD en het kleinste gemene veelvoud (KGV) zijn geïntroduceerd (opgefrist?), maken de leerlingen in hoofdstuk 2, *Passen en meten*, kennis met het algoritme van Euclides.

Mevrouw A wil haar gang betegelen met zo groot mogelijke vierkante tegels (zie figuur 3). Ze haalt er eerst vierkanten af ter grootte van de breedte van de gang. Dan houdt ze een kleiner stukje gang over. Daarvan haalt ze weer vierkanten af en zo houdt ze een stukje over waarop twee vierkante tegels van 35×35 passen. Zo heeft ze de GGD van 595 en 175 gevonden. Uiteraard hebben de leerlingen in een internetmethode de beschikking over een *Java-applet*, waar leerlingen zelf nieuwe gangmaten kunnen invoeren en daarbij vierkante tegels kunnen laten zoeken van maximale af-



Figuur 4 De *gemeenschappelijke maat*: de grootste gemene deler van zijde en diagonaal van een vierkant.



Figuur 5 Voor het geval dat de gang zijden 1 en $\sqrt{2}$ heeft, verkrijgen we na drie keer vierkanten afpassen een rechthoekje dat gelijkvormig is met een rechthoek die al eerder is opgetreden: de punten P, Q en R liggen op één lijn.

metingen. In kettingbreuken vertaald krijg je:

$$\frac{595}{175} = 3 + \frac{70}{175} = 3 + \frac{1}{\frac{175}{70}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{35}{70}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}.$$

Dit leidt op begrijpelijke wijze tot de notatie: $\frac{595}{175} = \frac{17}{5} = [3, 2, 2]$. Het is goed uit te leggen aan vwo-ers met aanleg dat ieder rationaal getal een *eindige* kettingbreuk heeft. Oefenen met kettingbreuken lijkt me ook niet verkeerd voor vergroten van de rekenvaardigheid en de beheersing van breuken in het algemeen. In een later stadium, de tweede klas, kun je proberen de GGD van zijde en diagonaal van een vierkant te vinden (zie figuur 4. Dat wordt dan een *gemeenschappelijke maat* genoemd. Daarbij is het algoritme van Euclides opnieuw een geschikt hulpmiddel. Stel dat er zo'n gemeenschappelijke maat zou zijn. Dan past die een geheel aantal keren (p) op de zijde BC van het vierkant en ook een geheel aantal keren (q) op de diagonaal AC. We kunnen p en q zo kiezen dat hun GGD gelijk is aan 1. Neem nu een stuk CF ter grootte van de zijde van het vierkant af van de diagonaal. Die gemeenschappelijke maat past dan ook een geheel aantal keren (p_1) op het resterende deel AF van de diagonaal. Neem nu het snijpunt E van zijde AB en de bissectrice van hoek BCF (de lijn waarlangs je hebt gevouwen om zijde BC op diagonaal AC te passen). Dan is $BE = FE$ en $\angle EBC = \angle EFC = 90°$ (vanwege het vouwen). Omdat $\angle FAE = 45°$ is ook $\angle FEA = 45°$ en daarom $AF = FE = BE$. De gemeenschappelijke maat past dus ook een geheel aantal keren op het stukje BE en bijgevolg een geheel aantal keren (q_1) op de rest AE. Maar AF en AE zijn dan weer zijde en diagonaal van een vierkant, en dus zou gelden: $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$. Omdat $p_1 < p$ en $q_1 < q$ zou de GGD van p en q toch groter dan 1 zijn, wat in strijd is met de aanname. Zijde en diagonaal hebben dus géén gemeenschappelijke maat.

Hiermee is de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ aangetoond. Natuurlijk mag ook de redenering hiervoor niet ontbreken die gebruik maakt van priemfactor-ontbinding.

Er is nog een ander fraai plaatje dat wellicht in een later stadium (derde klas) van pas kan komen. Wanneer je, weer in de context van de gang van mevrouw A, een gang tekent met zijden 1 en $\sqrt{2}$, bijvoorbeeld met een programma als *CABRI*, kun je constateren dat na drie keer vierkanten afpassen er een rechthoekje ontstaat dat gelijkvormig is met een rechthoekje dat al eerder is opgetreden, zie figuur 5. Je ziet immers dat de punten P, Q en R op één lijn liggen. CABRI bevestigt dat desgevraagd. Voor begaafde derdeklassers lijkt me het een geschikte uitdaging dat na te rekenen. Daarmee is ook de kettingbreuk ontwikkeling van $\sqrt{2}$ bekend: $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$.

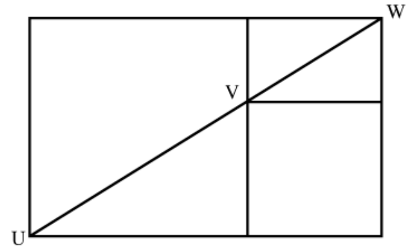
De meest voor de hand liggende repeterende kettingbreuk, en dus het meest evidente irrationale getal φ, krijg je in het geval dat al na één stap een rechthoek ontstaat die gelijkvormig is met de startrechthoek (figuur 6). Dus geldt: $\varphi = [1, \overline{1}]$. Dit biedt uitzicht op de Fibonacci-rij. Voor begaafde leerlingen valt daar heel wat te genieten.

Het algoritme van Euclides speelt al eeuwenlang een belangrijke rol in de hedendaagse getaltheorie. Het is voor leerlingen goed te begrijpen en leidt tot mooie en belangrijke wiskundige inzichten.

Tenslotte

Misschien is in de laatste decennia bij het ontwikkelen van lesmateriaal voor het vwo in de schoolboeken te veel de nadruk gelegd op het nut en de toepasbaarheid van de wiskunde en is er te weinig aandacht geweest voor de rijkdom van de wiskundige cultuur op zich zelf. Terwijl er toch genoeg mogelijkheden zijn. Daarvan raak je wel overtuigd als je bijvoorbeeld bladert in oude jaargangen van het tijdschrift Pythagoras.

Bij het ontwikkelen van de *Ratio*-internetmethode kiezen we daarom in de eerste plaats een wiskundige invalshoek, zonder daarbij de realiteit uit het oog te verliezen. Fundamenteel is steeds het ontwikkelen van een goed getalbegrip. Toegankelijk maken van de rijkdommen van de klassieke meetkunde is de tweede pijler van onze methode. Ook willen we graag de nieuwsgierigheid van de leerlingen prikkelen en een onderzoekende houding stimuleren. Daarnaast moet het ook speels en luchtig blijven. We hopen te laten zien dat dit allemaal kan samengaan. Wanneer over een jaar of twee het lesmateriaal af is, beschikken we over een methode die — omdat die via het internet wordt verspreid — steeds eenvoudig kan worden aangepast, uitgebreid en verbeterd, in discussie tussen docenten en leerlingen enerzijds en anderzijds ook de universitaire wereld. We hopen dan ook dat dit lesmateriaal de weg naar de scholen zal vinden. Na de eerste experimenten zijn we hoopvol gestemd.



Figuur 6 Het algoritme voor het geval dat al na een keer afpassen een rechthoekje ontstaat dat gelijkvormig is met een rechthoek die al eerder is opgetreden.

Internetpagina: www.ratio.kun.nl