Klaas Landsman
Subfaculteit Wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 9010
6525 ED Nijmegen
npl@science.uva.nl

Onderzoek Abelprijs 2004

De indexstelling van Atiyah en Singer

De Noorse Academie voor Literatuur en Wetenschappen heeft de Abelprijs 2004 toegekend aan Sir Michael Francis Atiyah van de University of Edinburgh, en aan Isadore M. Singer van het Massachusetts Institute of Technology. Zij ontvingen hun prijs voor de ontdekking van de indexstelling, die nieuwe verbanden legde tussen verschillende gebieden van de wiskunde en fysica. Klaas Landsman, hoogleraar Analyse aan de Universiteit Nijmegen, geeft een inleiding in de indexstelling van Atiyah en Singer, uitgaande van elementaire kennis van lineaire algebra, analyse en topologie.

Op 25 maart 2004 verscheen het volgende persbericht:

“**Atiyah og Singer deler Abelprisen** *Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen 2004 til både Sir Michael Francis Atiyah, University of Edinburgh og Isadore M. Singer, Massachusetts Institute of Technology ‘for å ha oppdaget og bevist indeksteoremet, som knytter topologi, geometri og analyse til hverandre, og den fremtredende rolle de har hatt når det gjelder å bygge nye broer mellom matematikk og teoretisk fysikk.’*[1] ”

Wat opviel in verschillende nieuwsberichten over deze toekenning is de wijze waarop de publicerende instantie de prijs als het ware voor zichzelf claimt. De kop van het persbericht van MIT luidt bijvoorbeeld *MIT professor shares international prize for mathematics*, terwijl Oxford University meldt *Sir Michael Atiyah awarded Abel Prize*, om er vervolgens op te wijzen dat Atiyah zijn werk aan de indexstelling deed toen hij in Oxford was. Elsevier zegt *Isadore M. Singer and Sir Michael Francis Atiyah are both longstanding authors of Elsevier*, en zijn grote concurrent zegt doodleuk *Springer Autoren erhalten Abel-Preis 2004* (terwijl de artikelen over de indexstelling alle in de *Annals of Mathematics*[2] verschenen, dat door geen van beide uitgeverijen wordt gepubliceerd!). Maar het leukst is de *Iraqi Linux User Group* (stel je voor!), die op hun website melden: *The Lebanese mathematician Michael Atiya is one of this years winners of the Abel Prize*. Een prijs voor de Arabische wereld dus!

A propos. Atiyah’s afkomst, met een Schotse als moeder en een inderdaad uit Libanon afkomstige vader, verklaart wellicht een voor een wiskundige nogal opvallende eigenschap. Edward Atiyah had in Oxford gestudeerd en zich volledig geassimileerd, in de hoop Engelsman te worden en uiteindelijk tot de *upper class* door te dringen. De Britse autoriteiten gaven hem na zijn studie een baan in Khartoum (Sudan), destijds een belangrijk knooppunt van het British Empire, waar de jonge Michael (geboren in 1929) opgroeide. Maar tot zijn verbittering merkte Edward dat de Britse kolonisten toch op hem neer keken, en zag zijn hoop daarmee vervliegen.

Zijn zoon maakte dit falen meer dan goed. Atiyah junior werd al op 32-jarige leeftijd gekozen tot *Fellow of the Royal Society*, F.R.S. dus, en was van 1990 tot 1995 zelfs president van deze organisatie, afgekort P.R.S. (wat hij ook achter zijn naam zette). Atiyah werd in 1983 benoemd tot *Knight Bachelor*; wie hem een brief wil schrijven moet daarom sindsdien beginnen met *Dear Sir Michael*. In 1992 werd hij in de zeer hoge *Order of Merit* opgenomen, in gezelschap van bijvoorbeeld Nelson Mandela. Maar van geen enkele benoeming genoot Atiyah zozeer als van die tot *Master of Trinity College* in Cambridge. Daar loopt men in de voetsporen van Newton, Wittgenstein, en maar liefst 24 Nobelprijswinnaars, terwijl de telgen uit de Britse koninklijke familie, zoals Prins Charles, voor het benodigde intellectuele contrast zorgen. En van deze instelling was Atiyah van 1990–1997 de hoogste baas, woonachtig in de *Master's Lodge*, vergeleken waarbij onze koninklijke paleizen eenvoudige schuurtjes zijn.

Over Singer (1924) valt op dit vlak niet veel boeiends te melden: hij heeft de typische levensloop van een topwiskundige. Hij promoveerde in 1950 bij Irving Segal in de functionaalanalyse op een dissertatie getiteld *Lie Algebras of Unbounded Operators*, maar specialiseerde zich eveneens in de differentiaalmeetkunde, zoals bijvoorbeeld blijkt uit de bekende stelling over de holonomie van connecties op hoofdvezelbundels die hij in 1953 met Ambrose bewees. Zijn wiskundige achtergrond was daarmee duidelijk anders dan die van Atiyah, die zijn doctorstitel in 1955 verkreeg bij William Hodge, op het proefschrift *Some Applications of Topological Methods in Algebraic Geometry*. Deze titel beschrijft precies waar Atiyah tot 1962 aan werkte, het jaar waarin zijn samenwerking met Singer in Oxford begon. Deze leidde al in datzelfde jaar tot de indexstelling, waaraan Atiyah en Singer evenwel nog zeker twintig jaar zouden blijven schaven. In deze stelling wordt hun gecombineerde expertise in de topologie, de differentiaalmeetkunde, en de analyse op een bijzonder indrukwekkende manier tot gelding gebracht; het is precies de kracht van de stelling dat deze gebieden van de wiskunde zo diepzinnig als het maar kan aan elkaar worden gerelateerd. Het is dan ook geen toeval dat Atiyah zelf Riemann en Weyl als zijn belangrijkste inspiratoren in respectievelijk de negentiende en de twintigste eeuw noemt.

Toen een journalist Singer onlangs vroeg of hij de indexstelling aan krantenlezers uit kon leggen antwoordde hij kortaf "No, I can't!" Niettemin zullen we hier een poging wagen, uitgaande van elementaire kennis van lineaire algebra, analyse, en topologie.

De index

We beginnen met de index in het eindig-dimensionale geval. Stel $L : V \to W$ is een lineaire afbeelding tussen eindig-dimensionale vectorruimten V en W (over **C**, zoals verder overal in dit stuk). Beschouw de vergelijking $Lx = y$. Het bestaan van een oplossing wordt bepaald door de vraag of y in het beeld ran(L) van L ligt. Het is handig om voor de volgende beschouwing een inproduct in W te kiezen. We kunnen dan schrijven $W = \mathrm{ran}(L) \oplus \mathrm{coker}(L)$, waarbij $\mathrm{coker}(L) = \mathrm{ran}(L)^{\perp}$. De vraag of y in ran(L) ligt wordt dan beantwoord door $\dim(\mathrm{coker}(L))$ lineair onafhankelijke condities, namelijk $(y, e_i) = 0$, waarbij $\{e_i\}_{i=1,\dots \dim(\mathrm{coker}(L))}$ een orthonormale basis is van coker(L). Als namelijk aan deze condities voldaan is, volgt dat $y \in \mathrm{coker}(L)^{\perp} = \mathrm{ran}(L)^{\perp\perp} = \mathrm{ran}(L)$. Stel nu dat dit inderdaad zo is. Gegeven een particuliere oplossing x_0, is $x_0 + v$ ook een oplossing voor iedere $v \in \ker(L)$, i.e., als $Lv = 0$. De dimensie van de oplossingsruimte is dus $\dim(\ker(L))$.

We zien dat $\dim(\ker(L))$ en $\dim(\mathrm{coker}(L))$ interessante grootheden zijn. De indexstelling gaat over hun verschil

$$\mathrm{index}(L) := \dim(\ker(L)) - \dim(\mathrm{coker}(L)), \tag{1}$$

dat wonderbaarlijke eigenschappen blijkt te hebben. Er geldt dat

$$\mathrm{index}(L) = \dim(V) - \dim(W), \tag{2}$$

hetgeen dus onafhankelijk is van L! Dit is eerstejaars lineaire algebra, maar vormt ook het eenvoudigste geval van de indexstelling van Atiyah en Singer. Nemen we $V = W$, zodat $L : V \to V$, dan volgt dat $\mathrm{index}(L) = 0$.[2]

Van links naar rechts: Israel Gohberg, Mark Krein en G.N. Chebotarev omstreeks 1958. Krein stierf in 1989 in Odessa, Gohberg is emeritus hoogleraar (onder andere aan de Vrije Universiteit Amsterdam) en woont in Israel.

Op grond hiervan zou men vermoeden dat de index van $L : V \to V$ altijd nul is, maar dit is niet meer het geval wanneer V oneindig-dimensionaal is. Om de analytische argumenten zo eenvoudig mogelijk te houden nemen we voor V een Hilbert-ruimte. Het eenvoudigste voorbeeld is $V = \ell^2(\mathbf{N})$, de Hilbert-ruimte van Hilbert (1906) zogezegd, bestaande uit rijen $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ met $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 < \infty$. We nemen voor L de *shift operator* $S : \ell^2(\mathbf{N}) \to \ell^2(\mathbf{N})$, gegeven door $(Sf)_n := f_{n-1}$ voor $n > 0$ en $(Sf)_0 := 0$. In dit geval geldt $\ker(S) = 0$, maar ran(S) bestaat uit alle $\{f_n\}$ waarvoor $f_0 = 0$, zodat coker(S) het lineaire span is van de rij $\{f_n\}$ met $f_0 = 1$ en $f_n = 0$ voor alle $n > 0$. We vinden dus

$$\mathrm{index}(S) = 0 - 1 = -1. \tag{3}$$

De indexstelling van Gohberg en Krein

Om iets dichter in de buurt van Atiyah en Singer te komen nemen we voor V de Hilbert-ruimte $L^2(I)$, waar $I = [0, 1]$, met inproduct $(f, g) := \int_0^1 dt\, \overline{f(t)} g(t)$. Iedere complexwaardige functie $g \in C(I)$ bepaalt een lineaire afbeelding $\hat{g} : L^2(I) \to L^2(I)$ door middel van $\hat{g} f := gf$, waarbij $(gf)(t) := g(t)f(t)$. Deze afbeelding heeft in het algemeen geen welgedefinieerde index, tenzij $g(t) \neq 0$ voor alle t. Maar in dat geval is $\hat{g}$ inverteerbaar: de inverse is $\widehat{g^{-1}}$, zodat $\mathrm{index}(\hat{g}) = 0$. We bekijken daarom een bepaalde deelruimte van $L^2(I)$, namelijk de zogeheten Hardy-ruimte $H^2(I)$. Deze bestaat uit alle functies $f \in L^2(I)$ met niet-negatieve Fourier-coëfficienten.[3] We schrijven p voor de orthogonale projectie van $L^2(I)$ op $H^2(I)$.

Als $f \in H^2(I)$ en $g \in C(I)$, dan ligt gf in het algemeen niet in $H^2(I)$, maar in $L^2(I)$. Maar de projectie p stelt ons in staat om een lineaire afbeelding $T_g : H^2(I) \to H^2(I)$ te definieren door $T_g := p \circ \hat{g}$. We kunnen nu de indexstelling van Gohberg en Krein formuleren [3].

Stelling. *Stel dat $g \in C(I)$ periodiek is en nergens nul. Dan geldt*

$$\mathrm{index}(T_g) = -w(g), \tag{4}$$

waarin $w(g)$ het windingsgetal van g is.[4]

Deze stelling geeft al een indruk van de indexstelling van Atiyah en Singer. Het linkerlid is een analytische grootheid, terwijl het rechterlid topologisch van aard is. Toen Smale in 1962 Atiyah in Oxford bezocht, had hij juist van Gelfand in de Sovjet-Unie over deze stelling gehoord. Gelfand suggereerde om naar generalisaties te zoeken, en deze suggestie viel bij Atiyah in vruchtbare aarde. Die zag onmiddellijk een verband met topologische K-theorie (zie volgende sectie) en met door Hirzebruch en Grothendieck gegeven generalisaties van de klassieke Riemann-Roch stelling uit de algebraïsche meetkunde. Hij wendde zich tot Singer voor raad, en 'de rest is geschiedenis.' (Zie Atiyah's eigen *Commentary* in Vol. 3 van [4].)

K-theorie

We geven nu een bewijsschets van de stelling van Gohberg en Krein, dat de strategie van het bewijs van de veel moeilijkere indexstelling van Atiyah en Singer aardig weergeeft. De eerste stap bestaat uit een herformulering van het indexprobleem in de taal van topologische K-theorie.[5] Hier moet men niet van schrikken; zoals Atiyah zelf zegt is dat niet veel meer dan lineaire algebra met een parameter. Een $n \times n$ matrix die continu van een parameter x in een ruimte X afhangt, kan worden gezien als een continue functie van X naar de ruimte $M_n(\mathbf{C})$ van alle $n \times n$ matrices. De ruimte $C(X, M_n(\mathbf{C}))$ van al zulke functies kan weer worden geïdentificeerd met de ruimte $M_n(C(X))$ van alle $n \times n$ matrices met entries in $C(X)$. De inverteerbare elementen daarvan heten uiteraard $GL_n(C(X))$, en vormen een groep.

We doen nu niet kinderachtig en nemen $n \to \infty$.[6] Neem X compact; bij het bewijs van de indexstelling van Gohberg en Krein is X bijvoorbeeld de cirkel (of 1-torus) $\mathbf{T}$. Dan is $C(X)$ een Banach-ruimte in de supremum-norm, en daarmee zijn alle $GL_n(C(X))$ topologische groepen.[7] Dit geldt ook voor $GL_\infty(C(X))$. Vanuit een topologische groep G kan men nieuwe groepen definiëren, met name $\pi_0(G) := G/G_0$, de groep van componenten van G (hier is G_0 de samenhangscomponent die de identiteit e bevat), en $\pi_1(G) := \pi_0(LG)$, waarbij LG de groep van lussen door e is (i.e., de ruimte van continue functies $f : [0,1] \to G$ met $f(0) = f(1) = e$, in een geschikte topologie). Zo komt men tot de zogenaamde topologische K-groepen

$$K^0(X) := \pi_1(GL_\infty(C(X)));$$
$$K^1(X) := \pi_0(GL_\infty(C(X))),$$

die in 1959 door Atiyah en Hirzebruch werden ingevoerd. Het eenvoudigste voorbeeld is $X = pt$, een enkel punt; dan volgt $K^0(pt) = \mathbf{Z}$ en $K^1(pt) = 0$.

We keren terug naar stelling van Gohberg en Krein. Atiyah en Singer construeren twee afbeeldingen $\mathrm{index}_a : K^1(\mathbf{T}) \to \mathbf{Z}$ en $\mathrm{index}_t : K^1(\mathbf{T}) \to \mathbf{Z}$, genaamd de *analytische* en de *topologische* index. De definities zijn

$$\mathrm{index}_a([g]) := \mathrm{index}(T_g); \tag{5}$$

$$\mathrm{index}_t([g]) := -w(g). \tag{6}$$

Hierbij is g als in de formulering van de stelling, en dit houdt in dat g gezien kan worden als een element van $GL_1(C(\mathbf{T}))$. Via de natuurlijke inbedding $GL_1(C(X)) \hookrightarrow GL_\infty(C(X))$ geeft een dergelijke g dus een element $[g]$ van $K^1(\mathbf{T})$. Het is zeker niet onmiddellijk duidelijk dat index_a en index_t welgedefinieerd zijn. Om dit aan te tonen moet ten eerste blijken dat de elementen van de vorm $[g]$ de groep $K^1(\mathbf{T})$ uitputten, en ten tweede dat $\mathrm{index}(T_g)$ en $w(g)$ alleen van g afhangen via $[g]$. Vervolgens kan men laten zien dat index_a en index_t homomorfismen van abelse groepen zijn. Voor de laatste is dat eenvoudige topologie, en voor de eerste volgt het uiteindelijk uit de eigenschappen

$$\mathrm{index}(ST) = \mathrm{index}(S) + \mathrm{index}(T);$$
$$\mathrm{index}(T^*) = -\mathrm{index}(T),$$

die gelden voor lineaire operatoren op een Hilbertruimte, mits die überhaupt een welgedefinieerde index hebben.[8]

Het is dan duidelijk uit de definities (5) en (6) dat (4) direct volgt uit de *indexstelling in K-theorie*, namelijk

$$\mathrm{index}_a = \mathrm{index}_t. \tag{7}$$

De oorspronkelijke gelijkheid tussen twee gehele getallen is dus vervangen door een ogenschijnlijk veel abstractere gelijkheid tussen twee afbeeldingen. Deze laatste gelijkheid wordt bewezen door eerst een speciaal geval te nemen, te weten $\mathrm{index}_a[\mathrm{id}] = \mathrm{index}_t[\mathrm{id}]$, waarbij $\mathrm{id} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ de functie $z \mapsto z$ is. Dit speciale geval is, op een Fouriertransformatie na, precies de indexstelling (3) voor de shift-operator. Maar omdat index_a en index_t homomorfismen zijn, volgt hun gelijkheid nu ook op elementen van de vorm $[z \mapsto z^n]$ voor alle $z \in \mathbf{Z}$. De laatste stap van het bewijs is dan om aan te tonen dat ieder element x van $K^1(\mathbf{T})$ geschreven kan worden als $x = [z \mapsto z^n]$ voor een zekere n.

De indexstelling van Atiyah en Singer

In het bekroonde resultaat wordt de cirkel $\mathbf{T}$ vervangen door een willekeurige compacte gladde ruimte M. We vormen dan de coraakbundel $X = T^*M$, die in de klassieke mechanica bijvoorbeeld opduikt als de faseruimte van een deeltje dat op M beweegt. De ruimte X is nu niet compact, maar men kan toch de K-groepen $K^0(T^*M)$ enzovoort, definiëren.[9] Atiyah en Singer definiëren ook hier een analytische en een topologische index, deze keer als afbeeldingen van $K^0(T^*M) \to \mathbf{Z}$. De definitie van de laatste is zeer gecompliceerd, en gaat uit van een inbedding $M \hookrightarrow \mathbf{R}^n$. De analytische index is evenmin eenvoudig, maar lijkt nog enigszins op (5): de definitie luidt

$$\mathrm{index}_a([\sigma(D)]) := \mathrm{index}(D). \tag{8}$$

Hier is D een meetkundig gedefinieerde elliptische partiële (pseudo)differentiaaloperator op M, met zogenaamd hoofdsymbool $\sigma(D)$, te vergelijken met de functie g die boven de operator T_g definieerde. Dit hoofdsymbool definieert op zijn beurt een element $[\sigma(D)] \in K^0(T^*M)$. De indexstelling in K-theorie luidt opnieuw (7), nu gezien als een gelijkheid tussen afbeeldingen $K^0(T^*M) \to \mathbf{Z}$, en net als in het bewijs van de indexstelling van Gohberg en Krein impliceert (7) een expliciete formule voor de index van D. Deze luidt

$$\mathrm{index}(D) = (-1)^{\dim(M)} \int_{T^*M} \mathrm{Ch}([\sigma(D)])\mathrm{Td}(T^*_{\mathbf{C}}M). \tag{9}$$

Het heeft niet veel zin om uit te leggen wat hier allemaal gebeurt, maar de formule is zo fraai en beroemd dat dit artikel in gebreke zou blijven als zij niet zou zijn afgedrukt. Het linkerlid is nog steeds gedefinieerd door (1), terwijl het rechterlid een bepaalde differentiaaltopologische uitdrukking is waarin D slechts via het symbool $\sigma(D)$ voorkomt. De andere term in de integraal hangt uitsluitend van M af. Wiskunde is

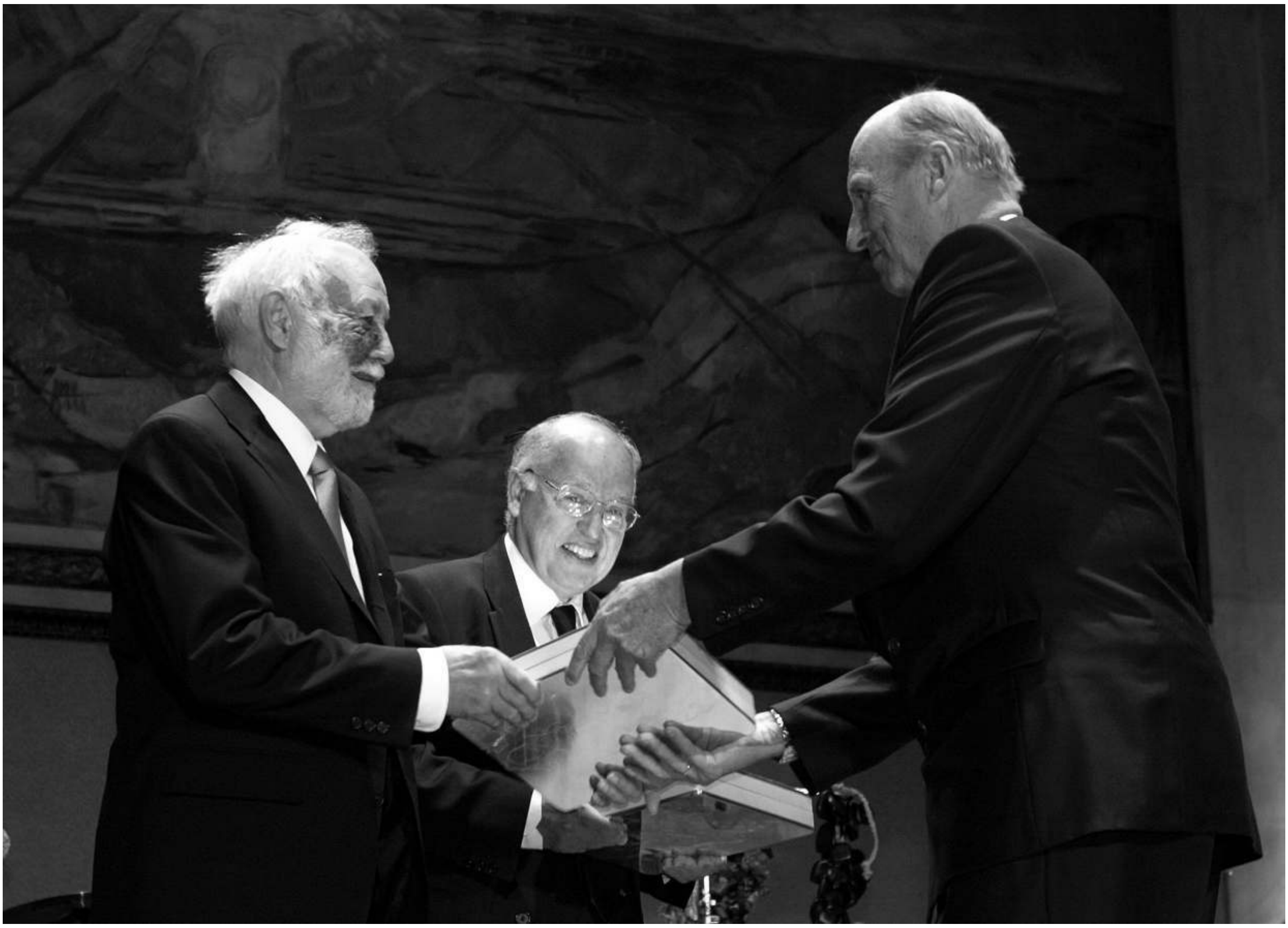

foto: Knut Falch/Scanpix/The Abel Prize/The Norwegian Academy of Science and Letters

Koning Harald van Noorwegen overhandigt de Abelprijs 2004 aan Isadore Singer en Sir Michael Atiyah in de aula van de Universiteit van Oslo (25 mei 2004).

mensenwerk, dus de letters Ch staan voor Chern, een ander belangrijk voorbeeld voor Atiyah, en Td is een afkorting van Todd, iemand met wie Atiyah vroeg in zijn loopbaan samenwerkte.

Zinvoller dan een opsomming van de betekenis van alle symbolen in (9) is het geven van een speciaal geval, te weten de bekende stelling van Gauß en Bonnet (in dimensie 2). Een kleine variatie op de algemene vorm van deze stelling in willekeurige dimensie, namelijk de zogenaamde signatuurstelling van Hirzebruch, vormde het speciale geval, analoog aan (3), van waaruit Atiyah en Singer hun stelling oorspronkelijk bewezen. De stelling van Gauß en Bonnet luidt [5]

$$F - E + V = \frac{1}{2\pi}\int_M K,$$

waarin M een compacte tweedimensionale Riemannse ruimte (zonder rand) is met kromming K (als M een bol met straal r is, is $K = 1/r^2$), en het linkerlid gegeven is via een willekeurige triangulatie van M door F driehoeken met in totaal E randen en V vertices. Voor een Riemann-oppervlak van genus g zijn beide kanten bijvoorbeeld gelijk aan $2-2g$. Atiyah zag in dat het linkerlid precies gelijk is aan de index van een bepaalde differentiaaloperator $D = d + d^*$, en net als in het algemene geval (9) kan men de indexformule index$(d + d^*) = (1/2\pi)\int_M K$ op twee manieren lezen: van links naar rechts verkrijgt men de waarde van de index van een bepaalde operator, maar van rechts naar links leert men dat een bepaalde meetkundige c.q. topologische uitdrukking verrassenderwijs een geheel getal is. Dit laatste perspectief vormde zelfs Atiyah's oorspronkelijke motivatie om naar zoiets als een indexstelling te zoeken.

Latere ontwikkelingen

Atiyah en Singer gaven zelf al spoedig een aantal generalisaties van hun stelling. Ten eerste, wanneer de gegeven operator D invariant is onder de werking van een compacte groep G, is het zinvol de index te definiëren als index$(D) = [\ker(D)] - [\mathrm{coker}(D)]$, waarbij $\ker(D)$ wordt gezien als een unitair G-moduul met equivalentieklasse $[\ker(D)]$, enzovoort. De index is dan een element van de representatiering $R(G)$ van G.[10] Op die manier leidt de indexstelling bijvoorbeeld tot de karakterformule van Hermann Weyl, die bekend is uit de representatietheorie van compacte groepen. (Zie [6] voor een moderne behandeling.) Vervolgens stelden Atiyah en Singer een indexstelling op voor een familie van elliptische operatoren, geparametriseerd door een compacte ruimte X. De index is dan geen getal, maar een element van de groep $K^0(X)$.[11]

Deze en soortgelijke generalisaties van de indexstelling werden uiteindelijk alle geïntegreerd in de niet-commutatieve meetkunde van Alain Connes [7], die zelfs voor een belangrijk deel werd gemotiveerd door het streven een indextheorie te formuleren voor een veel grotere klasse van ruimten en groepen dan oorspronkelijk door Atiyah en Singer was voorzien.

Rond 1977 begonnen Atiyah en Singer aan een soort tweede jeugd, waarin het raakvlak tussen wiskunde en theoretische natuurkunde centraal zou staan. De beroemde fysicus Yang had niet lang daarvoor ingezien dat zijn eigen Yang-Millsvergelijkingen, die de sterke en zwakke kernkrachten beschrijven door de uitwisseling van respectievelijk gluonen en zogenaamde W- en Z-deeltjes,[12] precies pasten in het wiskundig kader van de indexstelling. Dit inzicht probeerde hij uiteraard onder wiskundigen aan de man te brengen, en daarin vond hij bij Atiyah en Singer een gewillig oor. Ook Atiyah's collega Penrose trok aan hem, nu om de zwaartekracht beter te kunnen begrijpen met behulp van zijn speculatieve twistortheorie. Later zou ook Witten grote invloed op Atiyah en Singer uitoefenen, en het is met name de kruisbestuiving tussen dit briljante drietal geweest die tot de huidige renaissance van de mathematische fysica heeft geleid.

Zo bleek al spoedig, onder meer uit werk van Atiyah en Singer zelf, dat de indexstelling direct van toepassing was op een bepaald probleem in the theorie van Yang-Millsvergelijkingen, namelijk dat van anomalieën. Dat probleem houdt in dat behoudswetten in de klassieke veldentheorie, zoals het behoud van lading, niet noodzakelijk meer hoeven te gelden in de overeenkomstige kwantumtheorie. Dit verschijnsel werd in 1968 ontdekt, toevallig ook het jaar waarin Atiyah en Singer hun belangrijkste artikelen over de indexstelling publiceerden, maar werd oorspronkelijk als iets zeer exotisch gezien, hoogstens van belang bij de productie van bepaalde kunstmatige deeltjes in versnellers. Maar inmiddels is uit de stringtheorie gebleken dat anomalieën misschien wel de sleutel vormen tot de vraag waarom de fundamentele natuurwetten zo zijn als ze zijn, en zo speelt de indexstelling van Atiyah en Singer een rol in de beantwoording van die vraag.

Noten

1 Men ziet dat de Noorse taal voor Nederlanders niet moeilijk te lezen is, maar voor de zekerheid volgt hier de vertaling in het Engels: *Atiyah and Singer share Abel prize. The Norwegian Academy of Science and Letters has decided to award the Abel Prize for 2004, jointly to Sir Michael Francis Atiyah (University of Edinburgh) and Isadore M. Singer (Massachusetts Institute of Technology) "for their discovery and proof of the index theorem, bringing together topology, geometry and analysis, and their outstanding role in building new bridges between mathematics and theoretical physics."* Wie de rest wil lezen, inclusief de plichtmatige biografische informatie over de prijswinnaars, kan terecht op de website [1].

2 Hieruit volgt bijvoorbeeld direct het *Fredholm alternatief*: de afbeelding L is ofwel inverteerbaar, ofwel injectief noch surjectief.

3 De Fourier-transformatie is een (unitair) isomorfisme van $L^2(I)$ naar $\ell^2(\mathbf{Z})$, waarvan de beperking tot $H^2(I)$ een isomorfisme op $\ell^2(\mathbf{N})$ geeft. Men kan $H^2(I)$ ook zien als de ruimte van holomorfe L^2-functies op de open eenheidsdisk.

4 Het *windingsgetal* van g is het aantal malen dat $g : \mathbf{T} \to \mathbf{C}^*$ de cirkel om de oorsprong windt; vanwege de veronderstelde periodiciteit kan g worden opgevat als functie van de eenheidscirkel $\mathbf{T}$ naar het complexe vlak minus de oorsprong. Het windingsgetal van $g(t) = \exp(2\pi int)$ is bijvoorbeeld n.

5 Dit is een zeer belangrijk inzicht; in [4] laat Atiyah er geen twijfel over bestaan dat dit van hem afkomstig was.

6 Precies gezegd bestaat $GL_\infty(C(X))$ uit inverteerbare $\infty \times \infty$ matrices met entries in $C(X)$, met de eigenschap dat behalve op de diagonaal eindig veel entries ongelijk aan nul zijn, terwijl op de diagonaal uiteindelijk slechts enen staan.

7 In een topologische groep zijn de vermenigvuldiging en de inverse continu. Dit begrip werd onder andere door L.E.J. Brouwer ingevoerd.

8 Dit zijn de zogenaamde Fredholm-operatoren. Deze eigenschappen kunnen overigens zelf weer uit K-theorie worden afgeleid, maar nu in de zin van de K-theorie van C^*-algebras.

9 In plaats van $C(X)$ gaat men in dit geval uit van de Banach-ruimte $C_0(X)$ van continue functies op X die naar nul gaan op oneindig.

10 Er geldt dat $R(e) = \mathbf{Z}$ voor de triviale groep.

11 Voor een enkele operator is X een punt, zodat de index $\mathbf{Z}$-waardig is vanwege $K^0(pt) = \mathbf{Z}$.

12 't Hooft en Veltman kregen de Nobelprijs van 1999 voor hun werk aan de kwantumtheorie van de Yang–Mills vergelijkingen.

Referenties

1 www.abelprisen.no/en

2 M.F. Atiyah and I.M. Singer, 'The index of elliptic operators I-V', Ann. Math.**(87)** (1968) p. 484–530, p. 531–545, p. 546–604, *Ann. Math.* **(93)** (1971) p. 119–138, p. 139–149 (II met G.B. Segal i.p.v. I.M. Singer).

3 I.C. Gohberg and M.G. Kreĭn, 'Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators' (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk (N.S.)* **(12)**, (1957) no. 2(74) p. 43–118.

4 M.F. Atiyah, *Collected Works*, Vols I-V, Oxford University Press, 1988.

5 http://mathworld.wolfram.com/Gauss-BonnetFormula.html

6 N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer, Berlin, 1992 and 2004.

7 A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.