Bas Edixhoven
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
edix@math.leidenuniv.nl

Inaugurele rede

Van piramides tot mo

Volgens een bekend citaat van Hermann Weyl is het introduceren van getallen als ruimtelijke coördinaten een gewelddadige handeling. Echter, juist deze toevoeging van getallen aan ruimtelijke objecten, van algebra aan meetkunde is de laatste eeuw een zeer vruchtbaar gebied gebleken, dat culmineerde in het bewijs van de laatste stelling van Fermat. Het onderzoek van Bas Edixhoven bevindt zich ook op dit grensgebied. Sinds september 2002 is hij benoemd tot hoogleraar meetkunde aan de Universiteit Leiden; op 9 januari 2004 sprak hij onderstaande inaugurele rede uit. Hiervoor was hij tien jaar hoogleraar aan de Université de Rennes I.

Toen ik 16 jaar oud was, en in de vijfde klas van de middelbare school zat, ging mijn broer elektrotechniek studeren in Delft. Ik was meteen gegrepen door de boeken over natuurkunde en wiskunde die hij mee naar huis bracht: de hele opzet was totaal verschillend van wat ik op school gewend was. Van alle stellingen werden echte bewijzen gegeven. Ik had werkelijk het gevoel dat ik tot dat moment mijn hersens nooit echt had gebruikt. Mijn toekomstplannen veranderden: het idee van een studie in de diergeneeskunde werd vervangen door het plan natuurkunde en wiskunde te gaan studeren.

Een paar maanden later al begon mijn onderzoekscarrière. Ik vroeg mij af of er een formule was, analoog aan de welbekende a-b-c-formule, voor de oplossingen van een derdegraadsvergelijking in één variabele. Nadat ik werkelijk van alles had geprobeerd, vond ik inderdaad zo'n formule. Later leerde ik dat del Ferro en ook Tartaglia die formule, bekend als de formule van Cardano, al rond 1500 hadden ontdekt. Daarna was de vierdegraadsvergelijking makkelijk. Maar vanaf graad vijf gaat het anders, las ik in een goede encyclopedie. Pas drie jaar later, in de zomer na het tweede jaar van mijn studie natuurkunde en wiskunde in Utrecht, leerde ik de details van deze zaak uit het inmiddels aangeschafte algebraboek.

In de zomer na het derde studiejaar was ik op fietsvakantie in Frankrijk. Daar, in een dorp van zo'n driehonderd inwoners, las ik in het blad *Science et Vie* een artikel over het toen zeer recente werk van Faltings in de algebraïsche meetkunde. Gefascineerd daardoor besloot ik mij in die richting te specialiseren, temeer daar er in Utrecht een expert op dit gebied aanwezig was, Frans Oort, die het jaar daarop een college over dit onderwerp gaf.

Twee jaar later studeerde ik af in de wiskunde, met een doctoraalscriptie over zogenaamde 'modulaire krommen', onder leiding van Frans Oort en Bert van Geemen. Daarna ging ik door als promovendus. Na de promotie werkte ik twee jaar als Assistant Professor in Berkeley, en vervolgens één jaar in Utrecht, gefinancierd door een Huygensbeurs van N.W.O. Daarna ben ik tien jaar lang met veel genoegen in de Franse stad Rennes werkzaam geweest als hoogleraar. Inmiddels was ik getrouwd en waren er twee kinderen geboren. De wens weer dichter bij de familie te zijn bracht ons ertoe te proberen naar Nederland terug te keren. Dit resulteerde in mijn aanstelling hier in Leiden.

In de rest van deze rede zal ik proberen u uit te leggen wat ik zelf onder meetkunde versta, en wat voor problemen op dit moment belangrijk zijn in mijn eigen onderzoek, en in de meetkunde in het algemeen. De hedendaagse algebraïsche meetkunde, mijn eigen specialisme, heeft echter de reputatie zo technisch en abstract te zijn, dat het op een zinvolle wijze erover spreken, voor een breder publiek

Bas Edixhoven

dulaire krommen

zoals u, een moeilijke opgave is. De spreker kan dan kiezen uit verschillende strategieën om deze opgave op te lossen.

Één strategie is het publiek een gladde multimedia-presentatie, vol plaatjes, animaties en geluid, voor te schotelen. Hierbij kan het publiek rustig genieten, zonder zelf enige inspanning te leveren. Echter, de traditie wil dat in deze zaal de spreker spreekt zonder moderne hulpmiddelen.

Een andere strategie is alleen te spreken over elementaire zaken. Deze strategie kan makkelijk leiden tot het beeld dat wiskundigen wereldvreemden zijn, die zich bezig houden met eenvoudig te formuleren, maar toch kennelijk moeilijke problemen, irrelevant voor de echte wereld. Omdat dit beeld volkomen onjuist is, valt ook deze keuzemogelijkheid af.

De strategie die ik heb gekozen is te proberen in gewone, duidelijke taal, zonder formules, te praten over zaken die mij interesseren. Hierbij kan ik vanzelfsprekend niet ingaan op de meer technische aspecten van de wiskunde. Het einddoel van mijn verhaal van vandaag is u een beschrijving te geven van tenminste één actueel probleem in de meetkunde en van één aspect van de zogenaamde modulaire krommen die zo'n belangrijke rol in mijn eigen werk spelen. Onderweg daar naar toe wil ik ook samen met u wat wiskunde doen.

Thales en de piramide van Cheops

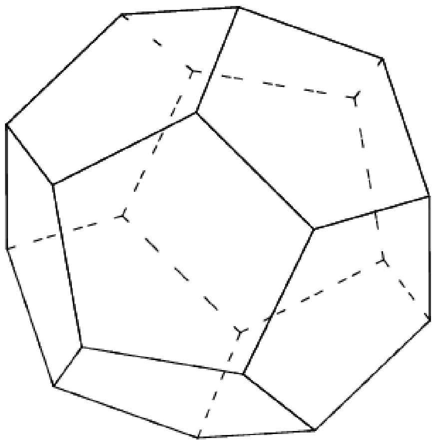
Hedendaagse onderzoeksvragen worden vaak duidelijker als we ze bekijken vanuit een historisch perspectief. Daarom zal ik met zeer oude meetkunde beginnen, en een paar belangrijke ontwikkelingen in de geschiedenis noemen, zodat de meetkunde van nu als een logisch vervolg kan worden gezien. Het lezen van het boek *Le théorème du perroquet* van Denis Guedj [2], waarin de geschiedenis van de wiskunde in de vorm van een detectiveroman is gegoten, was voor mij een bron van inspiratie bij het voorbereiden van deze rede.

Mijn verhaal over meetkunde begint met Thales van Milete. Thales wordt algemeen beschouwd als de vader van de Griekse meetkunde, sterrenkunde en wijsbegeerte. Hij leefde van 624 tot 547 voor Christus (zie [3]), in een gebied dat nu tot de westkust van Turkije behoort. Op reis in Egypte ziet hij de toen al zo'n tweeduizend jaar oude piramide van Cheops, en wil hij weten hoe hoog dit enorme bouwsel is.

Op *dit* moment wil ik een beroep doen op uw voorstellingsvermogen: stelt u zich deze piramide eens voor. Als u dat handig vindt, kunt u daarbij uw ogen sluiten. De piramide staat op een vlakke ondergrond. Het is een vierzijdige piramide, dus de onderkant is een vierkant. De top van de piramide ligt recht boven het middelpunt van dat vierkant. Wij kunnen ons dit goed voorstellen als een enorme tent. In het midden van het basisvierkant staat een tentstok, rechtop. Tussen de top van de tentstok en het vierkant is een strak gespannen tentdoek. De binnenkant van de tent is opgevuld met steen. Naast de piramide staat Thales, bijna verwaarloosbaar klein.

Hoe kan hij nu de hoogte meten, dat wil zeggen, de lengte van de tentstok? Deze tentstok zelf is ontoegankelijk, want de piramide is gevuld met steen.

De oplossing van Thales is erg mooi. Hij merkt op dat de zon schijnt, zodat ieder voorwerp zijn schaduw op de grond heeft. Vervolgens redeneert hij: de lengte van de schaduw van een rechtopstaand voorwerp is evenredig met de hoogte van dat voorwerp, ofwel, bij-



voorbeeld, een tweemaal zo hoge vlaggemast zal een twee maal zo lange schaduw hebben. In het bijzonder geldt dit voor de tentstok: als de lengte van de schaduw van de tentstok x maal groter is dan de lengte van de schaduw van Thales, dan is de tentstok x maal hoger dan Thales.

Hij gaat dus de lengte van de schaduw van de tentstok meten, dat wil zeggen, het lijnstuk tussen de schaduw van de top van de piramide en het middelpunt van het basis-vierkant. Een probleem is nu dat hij niet rechtstreeks het deel daarvan kan meten dat binnen de piramide ligt. Daarom wacht hij totdat, door het draaien van de zon, de schaduw van de tentstok loodrecht op een zijde van het basisvierkant staat. Dan blijkt namelijk dat het deel binnen de piramide gelijk is aan de halve lengte van een zijde van het basisvierkant, die hij kan meten. Op dat moment kan Thales de hoogte van de piramide berekenen. Die blijkt uiteindelijk ongeveer 147 meter te zijn, een flink stuk hoger dan de Domtoren in Utrecht.

Met behulp van een gelijksoortig principe bedacht Thales een manier om de afstand van een waarnemer tot een schip in zee te bepalen. Van groot belang is dat Thales het begrip *verhouding* heeft geïntroduceerd en erover heeft geredeneerd. Hij schijnt ook de eerste te zijn die het begrip *hoek tussen twee lijnen* als een wiskundige grootheid behandelde (zie pagina 40 van [2]).

Nu we toch bij Thales zijn, is het moeilijk de volgende twee anekdotes niet te vermelden. De eerste is dat hij een fortuin verdiende door, na een paar mislukte olijfoogsten, alle olijfpersen in de omgeving op te kopen, en die na de oogst van dat jaar, die uitzonderlijk goed was, voor veel geld te verhuren of te verkopen. Door goed de natuur te observeren had hij de oogst van dat jaar kunnen voorspellen. De tweede anekdote is dat Thales eens tijdens een wandeling in een kuil viel omdat hij al zijn aandacht besteedde aan het kijken naar de sterren. Verhalen over verstrooide professoren deden kennelijk ook toen al de ronde.

Regelmatige veelvlakken

We maken nu een sprong, over Pythagoras heen, die behalve wiskundige ook sekteleider en olympisch kampioen in het boksen was, naar de tijd van Plato. Plato leefde van 428 tot 348 voor Christus. Zijn naam is verbonden aan de vijf regelmatige veelvlakken, ook wel platonische lichamen genoemd: het viervlak (ofwel tetraëder), het zesvlak (kubus), het achtvlak (octaëder), het twaalfvlak (dodecaëder) en het twintigvlak (icosaëder).

Van deze veelvlakken is de kubus ongetwijfeld het meest bekend. Denkt u maar aan een flatgebouw dat even breed als diep en hoog is, of aan een dobbelsteen. De kubus bestaat uit zes zijvlakken, allen even grote vierkanten. In ieder van de acht hoekpunten komen drie vierkanten bij elkaar. Het aantal ribben is twaalf: vier in elk van de drie richtingen.

Het viervlak is een piramide, met, in tegenstelling tot die van Cheops, een gelijkzijdige driehoek als basis. Op het middelpunt van deze driehoek zet u dan een tentstok, precies zo hoog dat de afstanden naar de hoekpunten van de basisdriehoek precies gelijk zijn aan de lengte van de zijden van de driehoek. De tent die u zo krijgt is een regelmatig viervlak. Dat heeft dus vier hoekpunten, vier zijvlakken en zes ribben. De zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken, en in ieder hoekpunt komen er drie bij elkaar.

Het achtvlak kunt u zich als volgt voorstellen. U begint met een vierkant op de grond. Dan zet u een tentstok van de goede lengte in het midden van dit vierkant. Dat levert een piramide op. Dan plakt u twee van deze piramides langs hun vierkanten aan elkaar, en daar is dan het achtvlak. Het achtvlak heeft zes hoekpunten en acht gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, waarvan er in elk hoekpunt *vier* bij elkaar komen.

Deze eerste drie van de vijf platonische lichamen zijn zoals u ziet makkelijk te construeren. Hun ontdekking is dan ook geen verrassing, des te minder omdat ze ook in de natuur vanzelf voorkomen als kristallen. De overige twee, het twaalfvlak en het twintigvlak, lenen zich niet voor kristalvorming en komen dus ook niet als kristallen in de natuur voor. Hun bestaan is dan ook veel verrassender. Hermann Weyl schreef: *de ontdekking van de laatste twee regelmatige veelvlakken is één van de mooiste in de geschiedenis van de wiskunde. Het spoor van deze ontdekking leidt met redelijke zekerheid naar Zuid-Italië. De suggestie is gedaan dat dit te maken heeft met de daar voorkomende pyrietkristallen.* De zijvlakken van de pyrietkristallen waar het hier om gaat zijn weliswaar vijfhoeken, maar niet regelmatig.

Zoals gezegd, komen het twaalfvlak en het twintigvlak niet als kristallen in de natuur voor. Wel is het zo dat veel virussen, bijvoorbeeld HIV, de vorm van het twintigvlak hebben. [10] Helaas helpt dat mij nu niet om deze vormen voor u zichtbaar te maken, want virussen zijn met het blote oog zeker niet te zien.

Om nu niet het onmogelijke van uw voorstellingsvermogen te vragen is hier een plaatje van een twaalfvlak. Zoals u ziet, zijn de zijvlakken regelmatige vijfhoeken. Er zijn er twaalf van, namelijk één plus vijf plus vijf plus één, en per hoekpunt komen er drie van deze vijfhoeken samen.

Nu ik u het twaalfvlak heb laten gezien, laat ik u ook maar meteen het twintigvlak zien. De twintig zijvlakken, vier maal vijf als u ze telt, zijn regelmatige driehoeken. Per hoekpunt komen er vijf bij elkaar.

Ieder nieuwsgierig persoon zal, na het zien van deze vijf regelmatige veelvlakken, zich ten eerste afvragen of de laatste twee *echt* bestaan (want misschien zijn de modellen die ik liet zien maar bij benadering kloppend), en ten tweede of er nog *meer* zijn. De wiskunde geeft, na een precieze definitie van het begrip regelmatig veelvlak, hierop een duidelijk antwoord: deze vijf bestaan, en er zijn geen andere.

Een essentieel onderdeel van het bewijs hiervan wil ik u niet onthouden. Uit het feit dat alle punten van een regelmatig veelvlak naar buiten gericht zijn, volgt, bijvoorbeeld door naar een uitklapmodel te kijken, dat in ieder hoekpunt de som van de hoeken in de zijvlakken kleiner is dan 360 graden. Laat ik dit nu voor u demonstreren door het twintigvlak rond één hoekpunt open te snijden en uit te vouwen. De hoek die na uitvouwen overblijft noemen we het hoekdefect. Zoals u ziet, is het hoekdefect in een hoekpunt van het twintigvlak gelijk aan 60 graden: 360 min 5 keer 60. Laten we bijvoorbeeld ook het hoekdefect in een hoekpunt van een de kubus bepalen. Er komen daar drie vierkanten samen, dus is de som van de hoeken gelijk aan drie keer 90 graden, dat wil zeggen, aan 270 graden. Het hoekdefect is dan 360 min 270 is 90 graden.

Stel nu dat we een regelmatig veelvlak willen bouwen waarvan de zijvlakken regelmatige n-hoeken zijn, met n een geheel getal, minstens 3. In ieder hoekpunt moet een vast aantal van deze n-hoeken bij elkaar komen. Dan moet gelden dat dat aantal keer de hoek van de regelmatige n-hoek kleiner is dan 360 graden. Nu moeten we die hoek van de n-hoek uitrekenen. Als we een rondje lopen over de zijden van de n-hoek, dan draaien we in totaal 360 graden rond, dus per hoek draaien we $360/n$ graden. De hoek van de n-hoek is dan $180 - 360/n$ graden, want twee snijdende lijnen, zoals hier twee doorgetrokken zijden van de n-hoek, geven twee hoeken waarvan de som 180 graden is.

Voor n gelijk aan 3 geeft dit $180 - 120$, dus inderdaad 60 graden per hoek voor de driehoek. Als we dus ons regelmatig veelvlak uit driehoeken willen opbouwen, dan kunnen er 3, 4 of 5 per hoekpunt samenkomen, want 5 keer 60 is nog wel kleiner dan 360, maar 6 keer 60 niet meer. Op deze manier ontstaan het viervlak, het achtvlak en het twintigvlak.

Voor $n = 4$ is de hoek gelijk aan $180 - 360/4 = 90$ graden. Als we dus vierkanten gebruiken, dan kunnen er alleen maar 3 in een hoekpunt samenkomen, want 4 keer 90 is al niet meer kleiner dan 360. Hier hebben we dus alleen het zesvlak, de kubus.

Voor $n = 5$ is de hoek gelijk aan $180 - 72 = 108$ graden. Nu is 3 keer 108 gelijk aan 324, dus kleiner dan 360, maar 4 keer 108 is groter dan 360. Als we vijfhoeken gebruiken, kunnen er dus alleen drie per hoekpunt bij elkaar komen, en krijgen we het twaalfvlak.

Voor $n = 6$ is de hoek gelijk aan $180 - 60 = 120$ graden. Aangezien 3 keer 120 gelijk is aan 360, en niet kleiner, kan een regelmatig veelvlak niet opgebouwd zijn uit zeshoeken. Voor nog grotere n is het duidelijk dat de hoek, $180 - 360/n$, steeds dichter bij 180 komt te liggen. Onze berekening laat dus zien dat een regelmatig veelvlak niet opgebouwd kan zijn uit regelmatige n-hoeken als n groter dan 5 is.

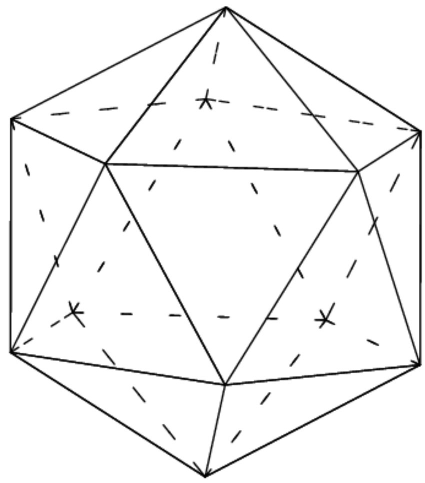
Het is interessant om voor elk van de vijf veelvlakken die er wel zijn de som van de hoekdefecten uit te rekenen. Men constateert dat dat iedere keer precies hetzelfde is, namelijk 720 graden. (Dit heeft natuurlijk te maken met de Eulerkarakteristiek, en de stelling van Gauss-Bonnet, waarvan dit fenomeen een discrete versie is.) Dit betekent dus dat het hoekdefect omgekeerd evenredig is met het aantal hoekpunten. Aangezien het hoekdefect de stompheid van het hoekpunt uitdrukt, betekent dit dat van de regelmatige veelvlakken het twaalfvlak de stompste punten heeft, en niet het twintigvlak. Aan de andere kant is voor het twintigvlak de hoek tussen aangrenzende zijvlakken het stompst. Als men dus de vraag stelt welk van de 5 regelmatige veelvlakken het meest op de bol lijkt, dan hangt het antwoord ervan af of men kijkt naar de stompheid van punten of van de hoeken tussen zijvlakken. Hiermee hoop ik een eerste antwoord te hebben gegeven op een vraag die mijn collega Louis Kroes, recent benoemd tot hoogleraar in de virologie, mij stelde.

René Descartes, uitvinder van coördinaten

We gaan nu terug naar de geschiedenis van de meetkunde. De Griekse wiskunde ontwikkelde zich tot indrukwekkende hoogte. Ongeveer 300 jaar voor Christus gaf Euclides een groots overzicht van wat toen bekend was in zijn *Elementen*, een werk van dertien boeken. Van dit werk bestaan meer dan 800 uitgaven, zodat het op nummer twee staat in de lijst van meest uitgegeven boeken (pagina 187 van [2]). Mijn grootste held uit de Griekse wiskunde is Archimedes, niet zozeer om de oorlogsmachines die hij bouwde, maar omdat hij bewees dat het oppervlak van een bol met een straal van één meter gelijk is aan 4π vierkante meter, dat wil zeggen, vier maal de oppervlakte van een cirkelschijf met dezelfde straal. Archimedes leefde van ongeveer 287 tot 212 voor Christus. Pas na meer dan 1800 jaar later was er weer vooruitgang op dit gebied. (Archimedes kon echt integreren, en maakte geen fouten met het begrip *reëel getal*; zie [3].) De gebruikte techniek, integraalrekening, leert men tegenwoordig in de hoogste klassen van het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs.

De volgende grote sprong voorwaarts in de meetkunde was de uitvinding, door René Descartes, van coördinaten. René Descartes leefde van 1596 tot 1650. Zo'n 20 jaar woonde hij op verschillende plaatsen in Nederland. Daar schreef hij zijn belangrijke boek *Discours de la méthode*, dat in 1637 werd uitgegeven in Leiden. Het schijnt dat hij zijn eerder geschreven boek *Le Monde* niet durfde uit te laten geven uit angst voor de kerk. Na de veroordeling van Galileo in 1633 zat de schrik er kennelijk goed in, zelfs in Nederland.

Het idee van Descartes is, achteraf gezien, verrassend eenvoudig, vooral als men al bekend is met ruitjespapier. In een gegeven vlak kiest men een lengte-eenheid om afstanden in uit te drukken, een lijn, en vervolgens nog een tweede lijn die loodrecht op de eerste lijn staat. Het snijpunt van de twee lijnen heet de oorsprong, de lijnen zelf heten de coördinaatassen. Als deze coördinaat-assen eenmaal gekozen zijn, dan kan ieder punt in het vlak beschreven worden door twee getallen, de zogenaamde coördinaten van het punt. Deze zijn de afstanden, uitgedrukt in de gekozen



lengte-eenheid, die vanuit de oorsprong gelopen moeten worden, in de richting van de coördinaat-assen, om in dat punt te komen. Deze afstanden mogen ook negatief zijn.

Laten we dit bijvoorbeeld eens toepassen op de vloer van deze zaal, waarbij we als lengte-eenheid de meter kiezen. De oorsprong kies ik recht onder mij, de eerste coördinaat-as in de richting van de muur achter mij, dus van mij uit gezien van links naar rechts, en de tweede coördinaat-as in de richting van de zijmuur, van achter naar voren. Het punt recht onder mij heeft dan coördinaten 0 en 0. De coördinaten van het punt recht onder de rector magnificus, herkenbaar aan zijn fraaie ketting, zijn ongeveer 3 en -1: dat wil zeggen, 3 naar rechts en 1 naar achteren.

Descartes laat dan zien dat, met dit soort coördinaten, meetkundige objecten algebraïsch, dat wil zeggen met behulp van vergelijkingen, beschreven kunnen worden. Bijvoorbeeld bestaat de eerste coördinaat-as uit de punten met coördinaten x en 0, waarbij x ieder willekeurig getal mag zijn. Deze lijn bestaat dus precies uit de punten waarvan de coördinaten x en y voldoen aan de vergelijking $y = 0$. Net zo wordt de tweede coördinaat-as beschreven door de vergelijking $x = 0$. De vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ beschrijft de cirkel om de oorsprong met straal één.

Deze algebraïsche beschrijving van meetkundige objecten levert op wat we tegenwoordig modieus een *win-win situatie* noemen: meetkunde en algebra profiteren van elkaar. In de meetkunde kan men ineens de te bestuderen objecten handig manipuleren, en de algebra kan profiteren van ons ruimtelijk inzicht. Zoals Descartes zelf meteen opmerkte, kan door het toevoegen van een derde coördinaat-as ook de drie-dimensionale ruim-

Pagina 26 uit *Le géométricon* van J-P. Petit [6]. Deze Franse wetenschapper en tekenaar heeft over vele onderwerpen uit de wis- en natuurkunde stripverhalen getekend.

te worden beschreven met coördinaten.

Het leven van Descartes eindigde met een longontsteking. Één van zijn leefregels was om niet voor 11 uur 's morgens uit bed te komen, wat in Nederland kennelijk geen probleem was. Maar in 1649 haalde koningin Christina van Zweden hem over naar Stockholm te gaan. Het verhaal gaat dat hij zijn fatale longontsteking opliep tijdens wandelingen naar het paleis, omdat de koningin met hem raaklijnen wilde tekenen, om 5 uur in de ochtend. (Zie de biografie van Descartes in [4].)

Soorten meetkunde en soorten coördinaten

Nu we beschikken over coördinaten, is het mogelijk te vertellen wat we binnen de hedendaagse wiskunde onder meetkunde verstaan. Buiten de universitaire wiskunde en natuurkunde wordt vaak gedacht dat meetkunde altijd Euclidische meetkunde is, waarin het gaat om punten, lijnen en vlakken, en misschien ook nog bollen en kegels en dergelijke, in onze drie-dimensionale ruimte. Hier volgt een citaat uit een email van twee scholieren: *Wij zijn twee 6-VWO leerlingen uit Leiden en we zijn bezig met een profielwerkstuk over meetkunde. Na veel zoeken op internet zijn we nog niet uit de hoofdlijnen van de soorten meetkunde. We gaan er nu van uit dat er twee verschillende soorten meetkunde bestaan, namelijk vlakke en ruimte meetkunde. [...] Er zijn nog veel meer soorten meetkunde (zoals Euclidische meetkunde, elliptische meetkunde e.d.), we weten alleen niet hoe we die in het plaatje moeten passen. Misschien kunt u ons helpen aan een volledig overzicht van hoe de meetkunde in elkaar steekt.* En dan hier een citaat uit mijn antwoord: *Er is veel meer meetkunde dan alleen die van het vlak (twee dimensionaal) en van de ruimte (drie dimensionaal). Ten eerste zijn er nog veel meer mogelijke dimensies, maar nog belangrijker, de verschillende soorten meetkunde die er bestaan hebben meer te maken met de verschillende soorten vergelijkingen die men kan bestuderen. Bijvoorbeeld in het vlak kunnen we kijken naar rechte lijnen (gegeven door vergelijkingen van de vorm* $ax+by=c$*), of cirkels, ellipsen, parabolen, hyperbolen (die gegeven worden door vergelijkingen van graad* 2*). Maar niets houdt ons tegen te kijken naar vergelijkingen van willekeurige graad, of naar vergelijkingen met meer ingewikkelde functies (zoals de e-macht, sinus en cosinus en zo). Ook houdt niets ons tegen om dit soort dingen in een willekeurig aantal variabelen te doen, wat betekent: in willekeurige dimensie. Ook is er een grote variatie in de vragen die men zich kan stellen over de oplossingsverzamelingen van de vergelijkingen die men bekijkt.* In mijn antwoord verwees ik de scholieren nog naar een webpagina ([7]) die een atlas van de hedendaagse wiskunde bevat. De conclusie van het antwoord is dat iedere soort meetkunde wordt bepaald door het soort vergelijkingen dat wordt bestudeerd, en door het soort vragen dat men stelt over de oplossingen van die vergelijkingen. Een belangrijke vraag is ook in hoeverre de oplossingsverzamelingen zelf ook weer gecoördinatiseerd kunnen worden. Bijvoorbeeld vormen lengte en breedtegraden een coördinaatsysteem op de wereldbol.

Het kiezen van geschikte coördinaten

Het belangrijkste aspect van coördinaten in de meetkunde is de vrijheid die men heeft om ze te kiezen. In veel gevallen is het zo dat om problemen zo makkelijk mogelijk op te lossen het van het grootste belang is deze vrijheid tot het uiterste te benutten.

Bij Descartes hadden we de keuze van een lengte-eenheid, en twee loodrechte lijnen in het vlak, of drie loodrechte coördinaat-assen in de ruimte. Om bijvoorbeeld een cirkel in het vlak te bestuderen, is het verstandig als oorsprong het middelpunt te kiezen, en als lengte-eenheid de straal van de cirkel.

Als we echter een probleem over een aantal lijnen en punten in een vlak moeten oplossen, waarbij afstanden en hoeken er niet toe doen, dan mogen we ook een willekeurig tweetal snijdende lijnen als coördinaat-assen nemen. In termen van ruitjespapier betekent dit dat de gebruikelijke vierkantjes ook wel scheefgetrokken mogen worden, tot parallellogrammen.

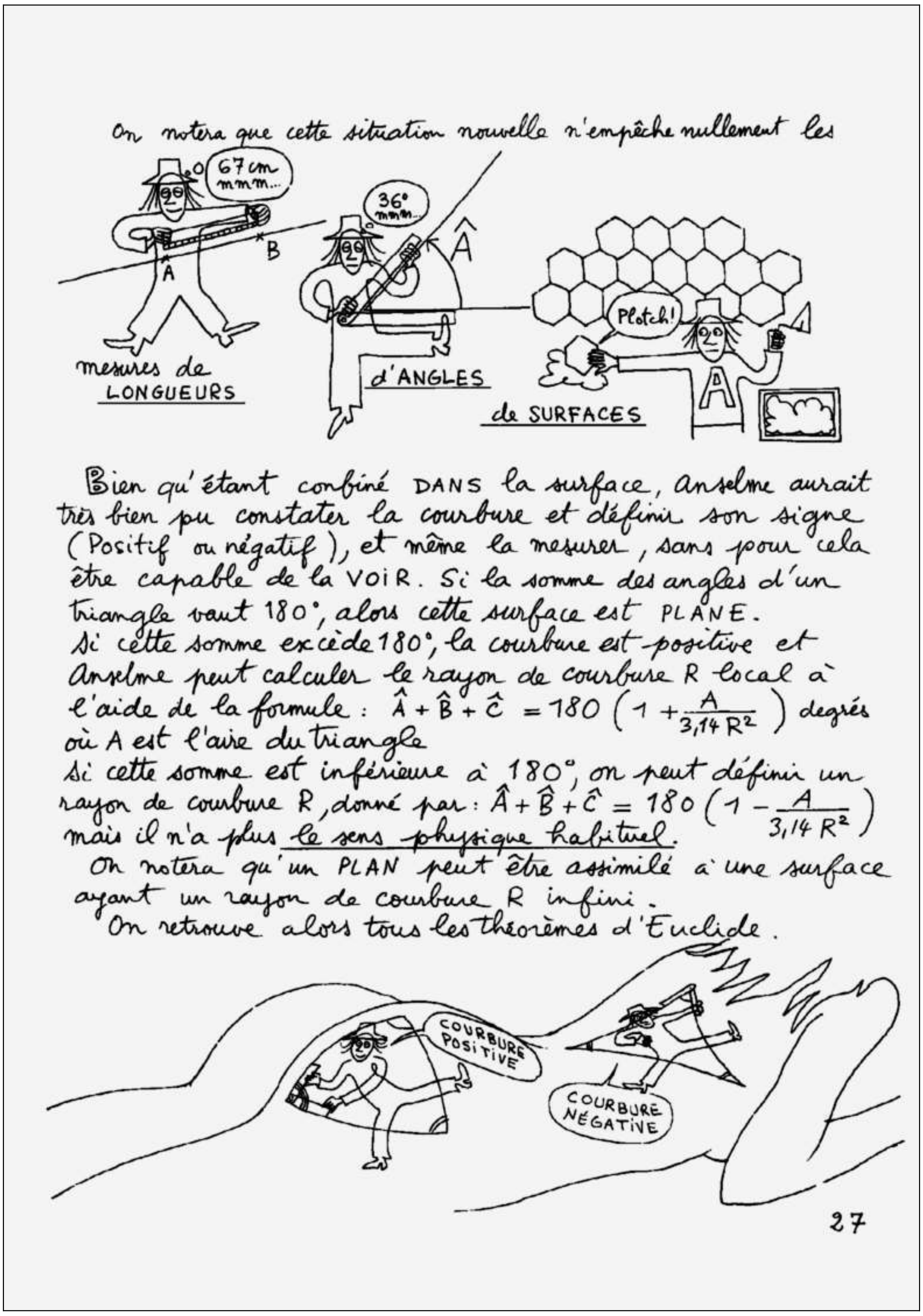
Algemener is het ook mogelijk om bijna willekeurige stelsels van krommen te gebruiken voor coördinaten. Stelt u zich voor dat we een ruitjespatroon hebben op een vlak dat gemaakt is van een rubberachtig materiaal dat we naar believen kunnen rekken of krimpen, op iedere plek en in iedere richting. Dan ontstaan er coördinaatsystemen met gekromde lijnen als coördinaat-assen. De algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein is ontstaan, in het begin van de 20ste eeuw, uit de behoefte juist met dergelijke coördinaatsystemen te kunnen werken.

Het vermoeden van Poincaré

Een laatste sprong van een kleine 100 jaar beëindigt onze reis door de geschiedenis van de meetkunde. We zijn nu weer terug op 9 januari 2004, en we vragen ons af: wat zijn *nu* de belangrijke problemen en vragen in de meetkunde. Ik wil u er één noemen, het zogenaamde Poincarévermoeden in dimensie drie, nu honderd jaar oud, omdat het werk hieraan van Grisha Perelman uit Sint Petersburg al sinds april 2003 door experts wordt onderzocht, zonder dat er echte fouten in zijn gevonden (zie [5], of [9]). Als het uiteindelijk allemaal blijkt te kloppen, dan krijgt Perelman één miljoen dollar van de *Clay Foundation*, want het gaat hier om één van de zogenaamde zeven Millennium Problemen.

Het Poincarévermoeden is een uitspraak in de topologie, het deelgebied van de meetkunde dat alleen gaat over de vorm van objecten, zonder afstandsbegrip. Grof gezegd: topologie is de meetkunde van rubberen objecten, ofwel, topologie is rubbermeetkunde. In deze meetkunde hebben bijvoorbeeld cirkels, ellipsen en vierkanten precies dezelfde eigenschappen, maar een cirkel en een rechte lijn niet, want als we uit een lijn een punt weglaten, dan krijgen we twee stukken, terwijl dat in het geval van de cirkel één stuk geeft.

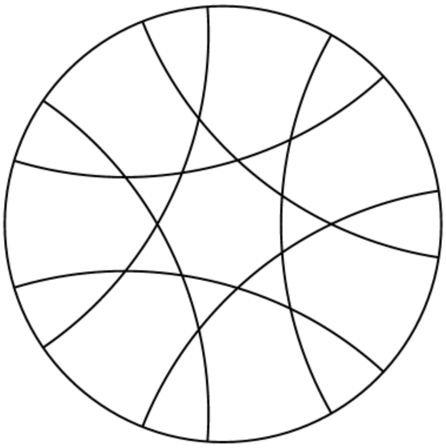
Om u enig gevoel te geven voor het vermoeden van Poincaré in drie dimensies, is het een goed idee om eerst eens in twee dimensies te kijken. We stellen ons daartoe twee rubberen oppervlakken voor: een ballon en een zwemband. De ballon heeft de vorm van een boloppervlak. De vorm van de zwemband heet ook wel een torus. De vraag is nu: hebben de ballon en de zwemband wel of niet precies dezelfde topologische eigenschappen? Let wel, het gaat hier om eigenschappen van deze oppervlakken alléén, en niet van hoe ze in onze drie-dimensionale ruimte liggen. Om een antwoord op deze vraag te vinden moeten we dus doen alsof we ons *in* één van deze oppervlakken bevinden, als twee-dimensionale wezens, zoals de platlanders in het beroemde boek *Flatland* van Abbott (zie [1]). Stel nu dat we in elk van deze twee oppervlakken het volgende experiment doen.



Pagina 27 uit *Le géométricon* van J-P. Petit [6]

Twee platlanders pakken elk één van de twee uiteinden van een lang, elastisch stuk touw. De eerste blijft op zijn plaats, maar de tweede maakt een lange wandeling en nadat hij weer terug is bij de eerste, knopen ze de twee eindjes touw aan elkaar. Daarna proberen ze of ze door trekken en sjorren het touw weer binnen kunnen halen. Als u wilt, kunt u hierbij denken aan een techniek voor deze platlanders om een zee leeg te vissen. Aangezien alles zich binnen het oppervlak afspeelt, moet het touw in het oppervlak blijven.

Het zal u duidelijk zijn dat dit experiment op de ballon zal lukken, maar dat het op de zwemband niet altijd lukt: het hangt er dan vanaf hoe de tweede platlander is gelopen, want als hij bijvoorbeeld helemaal rond het gat is gelopen dan helpt er geen trekken of



Een regelmatige hyperbolische zevenhoek.

sjorren meer aan: het touw kan niet over het gat heen. Er zijn dus lussen op de zwemband die niet kunnen worden samengetrokken tot een punt.

De conclusie van ons gedachtenexperiment is dat de ballon en de zwemband niet dezelfde eigenschappen hebben in de rubbermeetkunde. In wiskundige termen heet de uitkomst van ons experiment: de ballon is enkelvoudig samenhangend, en de zwemband niet.

Twee eigenschappen die de ballon en de zwemband wel allebei hebben zijn samenhang en compactheid. Samenhang betekent dat een platlander van ieder punt naar ieder ander punt kan wandelen. Enkelvoudige samenhang, het begrip dat we net al hebben gezien, betekent dat voor twee gegeven punten dergelijke wandelingen uniek zijn, op trekken en sjorren na. Compactheid betekent dat als een platlander op een willekeurige manier met sprongen door zijn oppervlak gaat, er altijd een punt in dat oppervlak zal zijn waar hij met zijn sprongen oneindig vaak willekeurig dichtbij komt. Het zal u duidelijk zijn dat het gebruikelijke vlak niet compact is, want de platlander kan dan iedere keer één meter springen, steeds in dezelfde richting. Daarentegen zijn de ballon en de zwemband wel compact.

Het vermoeden van Poincaré in dimensie twee is nu als volgt. Stel dat een oppervlak de volgende drie eigenschappen van de ballon heeft: één, het is compact, twee, het is samenhangend, en drie, het is enkelvoudig samenhangend. Heeft dat oppervlak dan alle topologische eigenschappen van de ballon?

Het antwoord hierop was al bekend in de tijd van Poincaré: het luidt “ja”. Zelfs was er toen al meer bekend: een volledige classificatie van compacte samenhangende oppervlakken. Het bewijs hiervan gebruikt vooral combinatorische argumenten. Tegenwoordig kan men dit in een tweede- of derdejaars college wiskunde leren.

We gaan terug naar het Poincarévermoeden in dimensie drie. Nu spelen wij zelf de rol van de platlanders: wij zitten nu in onze drie-dimensionale ruimte. (We negeren hier het feit dat in onze 4-dimensionale ruimtetijd geen natuurlijk begrip van gelijktijdigheid bestaat.) Enkelvoudige samenhang van onze ruimte betekent dat als we een ruimtewandeling maken, vastzittend met een touw aan een ruimteschip, we dit touw na terugkomst bij het ruimteschip altijd weer binnen kunnen halen zonder de twee uiteinden te bewegen. Als u denkt dat het duidelijk is dat onze ruimte enkelvoudig samenhangend is, stelt u zich dan de platlander op de zwemband voor, waarvan het zicht beperkt wordt door wat mist, zodat hij of zij nergens een globaal overzicht heeft (zie [6] voor een beschrijving van dit alles, en nog veel meer, in de vorm van een stripverhaal). Waarom zou onze situatie anders zijn?

Als we nu aannemen aan dat onze ruimte samenhangend en compact is, dan zegt het Poincarévermoeden dat *als* onze ruimte bovendien enkelvoudig samenhangend is, meteen *alle* topologische eigenschappen ervan vast liggen.

Zoals al gezegd: waarschijnlijk heeft Grisha Perelman het Poincaré vermoeden in drie dimensies opgelost. De methoden die hij gebruikt zijn niet alleen topologisch, maar maken gebruik van afstandsbegrippen, metrieken genaamd. Deze metrieken laat hij dan evolueren volgens een principe dat Ricci flow heet, in navolging van Richard Hamilton.

Net als in het geval van dimensie twee, is het Poincarévermoeden nauw verweven met de classificatie van alle compacte samenhangende drie-dimensionale ruimten. Het echte doel van het werk van Perelman is het zetten van de laatste stap in deze classificatie, zoals die was voorzien door William Thurston.

U zult zich nu misschien afvragen of dit soort werk wel ooit afkomt, want na het geval van drie dimensies komt dat van vier, enzovoorts. Maar hier is nu een aangename verrassing: in alle hogere dimensies is het probleem van Poincaré al opgelost. (De belangrijkste namen hierbij zijn Smale en Donaldson.) Een intuïtieve verklaring hiervoor is dat er in hogere dimensie meer ruimte is om te manoeuvreren.

Mijn eigen werk in de wiskunde

Het laatste onderwerp van mijn verhaal van vandaag is mijn eigen werk in de wiskunde. Een belangrijk deel daarvan gaat over modulaire krommen, en bepaalde hogerdimensionale generalisaties daarvan, Shimura variëteiten geheten. *Lang* heb ik nagedacht over het probleem hoe in deze rede uit te leggen wat deze ingewikkelde wiskundige objecten zijn. Uiteindelijk kwam ik tot een geschikte stelling, de enige stelling van deze rede, dus u ziet het belang dat ik eraan hecht. De stelling zegt: modulaire krommen vormen een natuurlijke voortzetting van de vijf regelmatige veelvlakken die we eerder in dit verhaal hebben ontmoet. Om deze voortzetting te vinden, moeten we wel overstappen op een iets ander soort meetkunde: hyperbolische meetkunde.

Voordat we deze stap zetten keren we eerst nog even terug naar de vijf regelmatige veelvlakken. Laten we ons nu zo’n regelmatig veelvlak voorstellen als draadmodel. De ribben zijn dan gemaakt van zeg ijzerdraad, en ze zijn in de hoekpunten aan elkaar gesoldeerd. *Om* dit draadmodel plaatsen we een bolvormige lampenkap, zó dat de middelpunten van het draadmodel en de bol samenvallen. In dat middelpunt zetten we een lampje. De schaduw van het draadmodel op de bol is dan een regelmatig veelvlak, in de zogenaamde *bol-meetkunde*. Deze meetkunde leeft, zoals de naam al zegt, op de bol, of iets preciezer, op het boloppervlak. Het analogon van rechte lijnen uit de gewone meetkunde zijn nu grote cirkels, dat wil zeggen, cirkels verkregen door de bol te doorsnijden met een vlak door het middelpunt, zoals bijvoorbeeld de evenaar of een meridiaan op de aardbol.

De bol-versie van bijvoorbeeld het achtvlak krijgt men door de bol te verdelen in vier parten, zoals u een appel in vier stukken snijdt, en, zonder deze vier stukken uiteen te laten vallen, de appel vervolgens nog eens door te snijden langs de evenaar. Ik hoop dat u zich dit zo voor kunt stellen. Als dat u lukt, ziet u dat elk van de zo verkregen acht stukken boloppervlak een driehoek is, waarvan elke hoek 90 graden is. Dit feit moet u verbazen, want u hebt immers geleerd dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is, en nu komen we uit op 270. De verklaring voor deze schijnbare tegenspraak is dat wat u leerde geldig is voor vlakke driehoeken, maar niet voor bol-driehoeken, zoals we nu zien. In de bol-meetkunde is het zo, dat de som van de drie hoeken van een driehoek altijd groter is dan 180 graden, en dat het verschil evenredig is met de oppervlakte van de boldriehoek. Dit verschijnsel heeft als oorzaak de kromming van het bol-oppervlak. Het feit dat het verschil positief is, betekent dat de kromming positief is. Deze kromming heeft ook direct te maken met de hoekdefecten die we hebben geconstateerd bij de regelmatige veelvlakken.

Als we nu een regelmatig veelvlak willen maken, in een geschikt soort meetkunde, zodat er per hoekpunt bijvoorbeeld drie regelmatige zevenhoeken samenkomen, dan blijkt dat we nodig hebben dat in die meetkunde de som van de hoeken van een driehoek *kleiner* is dan 180 graden, en dat we dus willen dat de kromming *negatief* is. (Tussen de bolmeetkunde en de hyperbolische meetkunde is natuurlijk ook de vlakke meetkunde. Dit wordt mooi geïllustreerd door de betegeling van het vlak door regelmatige zeshoeken.)

Dit alles kan gedaan worden in het zogenaamde hyperbolisch vlak, waarvan u een avontuurlijke beschrijving kunt vinden in het boek *Flatterland*, van Ian Stewart ([8]). Kort gezegd komt het hierop neer. U neemt in het platte vlak alle punten met afstand kleiner dan zeg één kilometer tot de oorsprong. Op deze schijf, die geheel geasfalteerd is, is het rekeningrijden al ingevoerd. De tol per meter neemt toe naarmate we dichter bij de rand komen. Om precies te zijn is deze tol evenredig met één gedeeld door één min r^2, waarbij r de afstand tot de oorsprong is. Het analogon van rechte lijnen in deze meetkunde zijn de paden waarlangs u zo weinig mogelijk tol betaalt. Deze paden blijken cirkelbogen te zijn die de rand van de schijf loodrecht snijden.

Om dit alles niet te abstract te laten, heb ik voor u een plaatje van een regelmatige hyperbolische zevenhoek gemaakt. U ziet de zevenhoek in het midden, de zijden ervan zijn cirkelbogen die elkaar in de hoekpunten snijden onder een hoek van 120 graden, en die de rand loodrecht snijden. Van 24 van deze zevenhoeken kan men nu een regelmatig 24-vlak maken, de modulaire kromme $X(7)$, waarvan ik u de details zal besparen. Laat ik volstaan met de mededeling dat, gezien door de bril van een topoloog, $X(7)$ een boloppervlak met drie handvaten is, en dat, gezien door de bril van een algebraïsch meetkundige, $X(7)$ de bekende kromme van Klein is, gegeven door de vergelijking $x^3y + y^3z + z^3x = 0$.

Wat ik u net vertelde voor de zevenhoek kan gegeneraliseerd worden naar ieder geheel getal n groter dan 7. De modulaire krommen, waar een groot deel van mijn werk over gaat, zijn objecten die zo ontstaan. Deze krommen spelen een belangrijke rol in de getaltheorie. Bijvoorbeeld worden mijn resultaten over een vermoeden van Serre gebruikt door Andrew Wiles in zijn bewijs van de laatste stelling van Fermat. Modulaire krommen, en meer algemeen Shimura variëteiten, spelen een hoofdrol in de vermoedens van Langlands, een zeer centraal onderwerp in de hedendaagse wiskunde.

Mijn belangrijkste onderzoeksproject op dit moment betreft het probleem een efficiënte methode te ontwikkelen om bepaalde objecten in de getaltheorie, zoals getallenlichamen met gegeven Galoisgroep, discriminant en Frobeniuselementen, waarvan het bestaan door Langlands gegeven wordt, expliciet uit te rekenen. De hierbij toegepaste methode is het gebruik van niet-exacte berekeningen, met een voldoende grote precisie, om te lang durende exacte berekeningen te omzeilen. (De reden dat exacte berekeningen omzeild moeten worden is dat de rekentijd die nodig is om systemen veeltermvergelijkingen exact op te lossen exponentiëel groeit in het aantal variabelen, zelfs voor systemen die precies één oplossing hebben.) De benodigde precisie, dat wil zeggen het aantal cijfers waarmee moet worden gerekend, wordt met behulp van de meest geavanceerde technieken in de meetkunde afgeschat, zoals Faltings-Grothendieck-Riemann-Roch en andere stellingen uit de Arakelov theorie.

Als mijn project slaagt, en alles wijst daarop, dan zal deze toepassing van de meetkunde een grote stap voorwaarts betekenen in de algoritmische getaltheorie.

Ik hoop dat u terecht de indruk hebt gekregen dat wiskunde een wetenschap is met een lange en interessante geschiedenis, een wetenschap, waarin alle deelgebieden belangrijk zijn voor elkaar, een wetenschap die ook op dit moment prachtige nieuwe resultaten oplevert, die bovendien op korte of lange termijn nuttig zullen zijn voor de maatschappij.

In de wiskunde bieden in het verleden behaalde resultaten *wel* een garantie voor de toekomst.

Referenties

1 E.A. Abbott. *Flatland, a romance of many dimensions* Project Gutenberg: http://promo.net/pg

2 D. Guedj. *Le théorème du perroquet.* Éditions du Seuil, september 1989. www.seuil.com

3 *Greek mathematical works.* Loeb Classical Library, No. 335 en No 362, Harvard University Press, and William Heinemann Ltd, 1980.

4 The Mac Tutor History of Mathematics archive. www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history

5 J. Milnor. *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds.* Notices of the American Mathematical Society, Volume 50, Number 10, November 2003, p. 1226–1233. http://www.ams.org/notices

6 J-P. Petit. *Le géométricon.* http://www.jp-petit.com

7 The Mathematical atlas. http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/welcome.html

8 Ian Stewart. *Flatterland.* www.panmacmillan.com

9 Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_conjecture

10 Hierbij dank aan mijn collega Louis Kroes, die mij hierop opmerkzaam maakte.