

T.A. Springer

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

springer@math.uu.nl

In memoriam Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003)

Een meetkundekunstenaar

Op 30 maart 2003 overleed op 96-jarige leeftijd de meetkundige Harold Scott Macdonald Coxeter, sinds 1936 verbonden aan de Universiteit van Toronto (Canada). In Nederland had hij vele vrienden, waarvan de graficus M.C. Escher wel de bekendste is. Hij ontving diverse onderscheidingen en acht eredoctoraten. In 1948 werd hij fellow van de Royal Society van Canada en in 1950 van de Britse Royal Society. Sinds 1978 was hij erelid van het Wiskundig Genootschap en in 1974 werd hij benoemd tot buitenlands lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Dit In Memoriam is geschreven door T.A. Springer voor de Levensberichten (2003) van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. De auteur is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

Donald Coxeter werd geboren in Kensington (Londen) in een familie van Quakers. Zijn vader had een familiebedrijf waar chirurgische apparatuur vervaardigd werd, maar in zijn hart was hij kunstenaar. In het gezin was dan ook veel artistieke activiteit: Coxeters vader musiceerde en zijn moeder schilderde.

Al heel vroeg bleek dat Donald wiskundig en muzikaal begaafd was. Als kleuter keek hij graag in de financiële pagina's van de krant, omdat daar zoveel getallen te vinden zijn. Hij wilde eerst componist worden; omstreeks zijn twaalfde had hij al een strijkkwartet en een opera gecomponeerd.

Maar wiskunde ging de boventoon voeren. In 1919 ging hij naar een 'boarding school' (St. George's School te Harpenden ten Noor-

den van Londen). Hij vertelt dat hij daar, toen hij met een kleine aandoening op de ziekenafdeling lag, met zijn buurman John Petrie (zoon van de egyptoloog Sir Matthew Flinders Petrie) aan de praat kwam over regelmatige lichamen (de vijf platonische lichamen), die ze in hun meetkundeboek ontdekt hadden. Donald kreeg de ingeving dat zulke lichamen ook in vier dimensies zouden moeten bestaan en John kon een paar dagen later een realistisch model van zoiets tekenen, waardoor zij de extra dimensie konden zien. Toen wist Donald dat wiskunde, en meetkunde in het bijzonder, zijn toekomst moest zijn. Hij was toen veertien jaar.

Coxeter senior vond dat de school zijn zoon niet voldoende uitdaging bood en bracht Donald in contact met wiskundigen. Hij kreeg het advies zich via privé-onderwijs voor te bereiden op een studie in Cambridge, en dat gebeurde. In 1926 won hij een studiebeurs van Trinity College. Hij kwam er in contact met coryfeeën als G.H. Hardy, J.E. Littlewood (zijn 'director of studies'), L. Wittgenstein. De Ph.D.-graad behaalde hij in 1931, zijn supervisor was de meetkundige H.F. Baker. Het proefschrift gaat — uiteraard — over meerdimensionale regelmatige lichamen.

In de entourage van Baker leerde de jonge Coxeter de groepentheorie kennen, die de wiskundige aanpak belichaamt van meetkundige symmetrieën. De negentiende-eeuwse wiskundigen hadden ingezien dat de symmetrieën van de platonische lichamen in interessante twee- en driedimensionale groepen van lineaire transformaties georganiseerd zijn. Coxeter begreep dat zijn meerdimensionale

regelmatige lichamen samenhangen met interessante meerdimensionale lineaire groepen en hij begon omstreeks 1930 over die groepen na te denken.

Tot 1936 was hij 'research fellow' van Trinity College. Hij bracht ook twee academische jaren (1932–1933 en 1934–1935) door in Princeton in de Verenigde Staten. Daar leerde hij veel van O. Veblen en hij maakte kennis met latere prominenten van zijn generatie als R. Brauer en N. Jacobson. In 1934 publiceerde hij de resultaten van zijn groepentheoretisch werk: de classificatie van 'kaleidoscopen' of spiegelingsgroepen, dat wil zeggen groepen van reële lineaire transformaties voortgebracht door spiegelingen. In dat fundamentele artikel vindt men ook de diagrammen die deze groepen beschrijven (thans Coxeterdiagrammen of Coxeter-Dynkindiagrammen genoemd). Hij gaf een exposé van zijn resultaten in de vermaarde 'notes' van een college van H. Weyl over Liegroepen aan het Institute for Advanced Study in Princeton.

Tegenwoordig komt ieder die in wiskunde of natuurkunde van doen heeft met continue symmetrieën (belichaamd in de Liegroepen) de Coxeterdiagrammen tegen. In genoemd artikel vindt men ook wat nu het Coxeterelement wordt genoemd: het product van de voortbrengers van een spiegelingsgroep.

Een ander artikel uit 1934, dat gaat over groepen met een presentatie $(R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1)$ als die van de spiegelingsgroepen, is het begin van de theorie van de Coxetergroepen.

In 1936 werd Coxeter een assistant professorship aangeboden in Canada, aan de Uni-

versiteit van Toronto. Op advies van zijn vader, die de oorlogswolken al zag hangen, en van G.H. Hardy besloot hij het aanbod aan te nemen. Hij is tot zijn dood in Toronto gebleven.

Ook in 1936 trouwde hij met de Nederlandse Rien (Hendrina) Brouwer, die hij in 1935 in Engeland ontmoet had bij gemeenschappelijke kennissen. Zij was hem vele jaren een trouwe steun; zij overleed in 1999. Het echtpaar had twee kinderen, een zoon en een dochter.

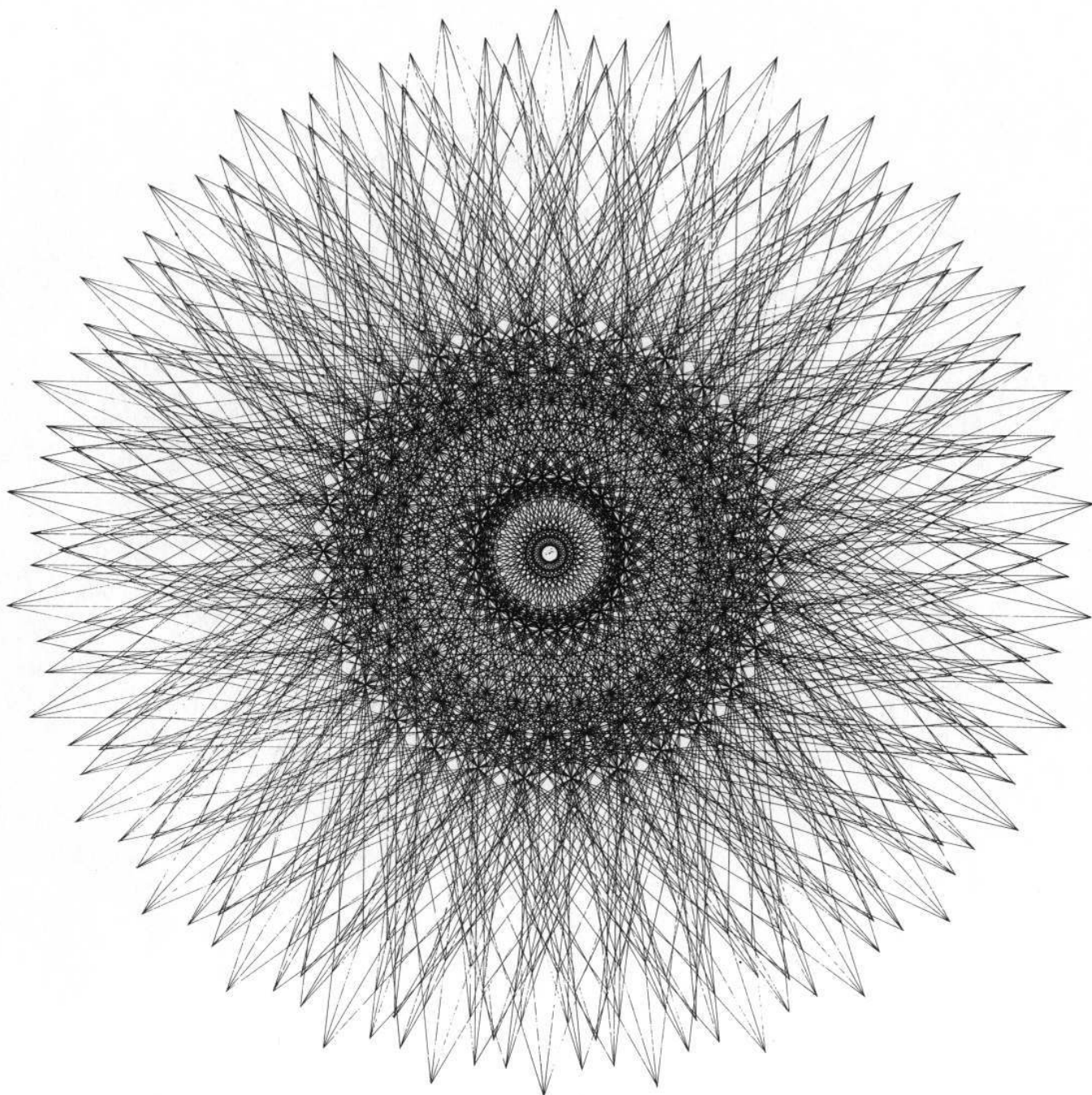
Coxeters academische carrière verliep langzaam, na zeven jaar werd hij associate profes-

sor en pas na twaalf jaar full professor (Coxeter zei dat hij zich voelde als de aartsvader Jacob, die zeven jaren moest werken voor Lea en zeven jaren voor Rachel).

Coxeter was een productieve wiskundige; hij publiceerde ongeveer 200 artikelen. Daarnaast schreef hij verschillende boeken. Een standaardwerk is *Regular Polytopes* (1948, nieuwe uitgave 1973), waar zijn encyclopedische kennis blijkt van de literatuur over regelmatige lichamen. In dat boek komt men ook Coxeter's vriend John Petrie tegen als ontdek-

ker van de Petrie-veelhoeken van een regelmatig lichaam.

In vele talen vertaald is *Introduction to Geometry* (1961/1981). De titel van de Duitse vertaling *Unvergängliche Geometrie* geeft weer wat Coxeter in dat boek voor ogen stond. Naast boeken over meetkundige onderwerpen is er het algebraïsch georiënteerde boek met W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups* (1957/1980). Coxeter zelf was het meest gesteld op zijn boek *Regular Complex Polytopes* (1974/1991) over re-



De *Great grand stellated 120-cell*, een van de vele figuren uit het boek *Regular Complex Polytopes* van Coxeter. Coxeter liet zich graag inspireren door muziek; uit het voorwoord: "This book has occupied much of my time and attention for nearly twenty years. [...] I have made an attempt to construct it like a Bruckner symphony, with crescendos and climaxes, little forestates of pleasure to come, and abundant cross-references. The geometric, algebraic and group-theoretic aspects of the subject are interwoven like different sections of the orchestra."

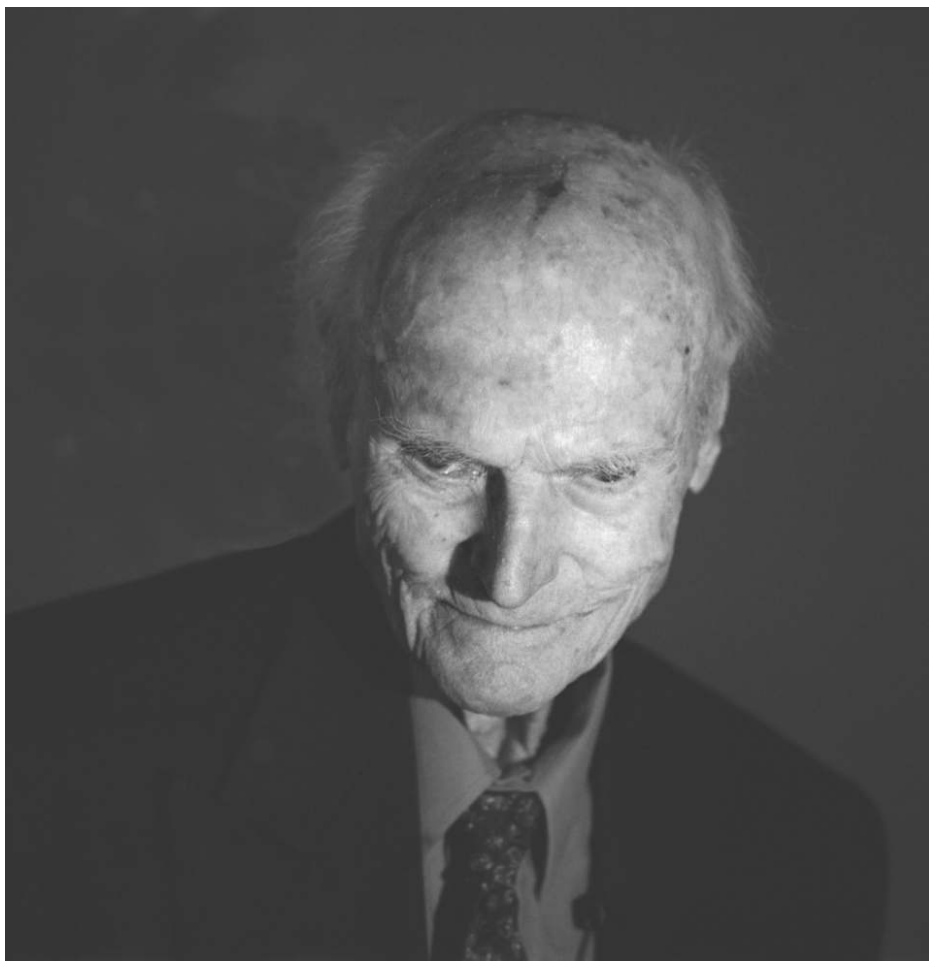
gelmatige lichamen in een complexe ruimte, een boek met spectaculaire illustraties. De bijbehorende symmetriegroepen zijn eindige groepen van complexe lineaire transformaties, voortgebracht door complexe spiegelingen, een soort gegeneraliseerde Coxetergroepen. De belangstelling ervoor is in de loop van de jaren steeds meer toegenomen.

Coxeters publicaties zijn zorgvuldig geredigeerd en helder geschreven; esthetische aspecten waren voor hem belangrijk. Hij was een inspirerend spreker die altijd iets verrassends bracht. Zijn grote meetkundige intuïtie blijkt overal; hij kon meerdimensionale objecten 'zien'. De thema's van Coxeters publicaties zijn al genoemd: regelmatige lichamen, meetkundige symmetrieën en de bijbehorende groepentheorie, thema's waarop vele variaties kunnen worden gemaakt, waaraan hij zelf ook gewerkt heeft. Hier volgen enkele voorbeelden.

In een artikel uit 1951 worden de (reeds genoemde) Coxeterelementen nader bekeken. Coxeter vertelt dat de aanleiding was een voordracht van C. Chevalley over de Bettigetallen van compacte Liegroepen. Coxeter herkende getallen die hij in zijn *Regular Polytopes* was tegengekomen. Dit bracht hem ertoe de eigenwaarden van Coxeter elementen te bepalen. Die bleken een fraaie wetmatigheid te vertonen, later door anderen uitvoerig geanalyseerd (een voorbeeld van wisselwerking tussen Coxeters concrete meetkunde en meer esoterische delen van de wiskunde.)

De icosaeëder (het regelmatig twintigvlak) treft men aan als ruimtelijke configuratie in sommige virussen. Het optreden van regelmatige of halfregelmatige lichamen buiten de wiskunde interesseerde Coxeter zeer. Vice versa was er bij niet-wiskundigen belangstelling voor zijn werk. De Amerikaanse ontwerper en architect Buckminster Fuller droeg één van zijn boeken op aan Coxeter. Fuller maakte in de jaren '40 van de vorige eeuw furor met zijn 'geodesic dome's'. Daarvan is een belangrijk constructie-element de 'buckyball', een afgeknotte icosaeëder met 60 hoekpunten, 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken als zijvlakken, natuurlijk goed bekend aan Coxeter (Leonardo da Vinci had er overigens al een tekening van gemaakt).

In de jaren '80 bleken buckyballs op te treden als bouwstenen van moleculen genaamd fullerenes. Eén ervan is C_{60} , waarvan de moleculen buckyballs zijn met in ieder hoekpunt een koolstofatoom. C_{60} heeft zeer bijzondere chemische eigenschappen. De ontdekkers ervan ontvingen in 1996 de Nobelprijs voor chemie.



copyright: R.V. Moody

Coxeter in Banff, augustus 2001, gedurende een lezing over meetkunde bij Escher.

Coxeter had een speciale relatie met Nederland. Hij kwam regelmatig met zijn vrouw op familiebezoek in Nederland en kreeg contacten met Nederlandse wiskundigen. Er waren ook andere wiskundige connecties. Coxeter was vertrouwd met het werk over meerdimensionale regelmatige lichamen van Nederlandse wiskundigen uit het begin van de twintigste eeuw (onder anderen E.L. Elte, S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wythoff). In Nederland zijn zij wat in het vergeetboek geraakt. Maar hun werk komt uitvoerig aan de orde in *Regular Polytopes*.

Tijdens een bezoek aan Nederland in 1954 nam Coxeter deel aan het vierjaarlijkse Internationale Wiskundecongres dat toen in Amsterdam plaats vond. In het kader van het congres was er een expositie van het grafische werk van M.C. Escher, toen buiten Nederland nauwelijks bekend. Coxeter werd er zeer door geboeid en bezocht Escher in Baarn. Zij raakten bevriend en Coxeter bracht Escher in contact met de symmetrieën van het niet-Euclidische vlak (gevisualiseerd als het inwendige van een cirkel). Deze symmetrieën heeft Escher in zijn latere werk geëxploreerd.

Bijvoorbeeld in zijn houtsnede *Cirkellimiet III* uit 1959 (met vissen die naar de rand toe steeds kleiner worden). Coxeter heeft de trigonometrie die er achter zit geanalyseerd. Hij was geïmponeerd door Eschers intuïtieve gevoel voor de wiskundige details die Coxeter alleen met ingewikkelde trigonometrie kon aanpakken. (Coxeter vertelt dat na afloop van een lezing waarbij Escher ook aanwezig was, deze hem vertelde dat hij er geen woord van begrepen had...) Coxeter heeft veel gedaan voor het bekend maken van Eschers werk buiten Nederland.

Coxeter overleed plotseling op 96-jarige leeftijd, op 30 maart 2003. Hoewel zijn mobiliteit achteruit gegaan was, was zijn geest nog fris. De meetkunde heeft hem tot het laatst beziggehouden.

