Matthijs H. Sitters
Valeriusstraat 62 boven
1071 ML Amsterdam
mhsitters@zonnet.nl

Sybrandt Hansz Cardinael (1578–1647)

Meester in de meetkunde

In het Nieuw Archief van maart 2003 construeerde Jan van Maanen uit zeventiende-eeuwse geschriften een portret van de meetkundige Sybrandt Hansz Cardinael. Het onderstaande artikel, dat zich meer richt op de betekenis van het werk van Cardinael, is in het kader van het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek' geschreven. M.H. Sitters is leraar wiskunde aan het Montessori Lyceum te Amsterdam.

Sybrandt Hansz Cardinael, wiens leven bijna de gehele periode van de tachtigjarige oorlog bestrijkt, was een gerenommeerd rekenmeester en wiskundige uit de eerste helft van de zeventiende eeuw. Hij was afkomstig uit doopsgezinde kringen in Harlingen. Vanaf 1605 woonde hij te Amsterdam en in ieder geval was hij vanaf 1623 werkzaam als vrijgevestigd rekenmeester aldaar. Hoewel hij in zijn tijd de nodige bekendheid genoot, is zijn naam in de vergetelheid geraakt onder meer door de enorme uitstraling van grote geleerden uit zijn tijd zoals Stevin en Huygens. Hernieuwde belangstelling voor zijn werk vinden we in de negentiende eeuw bij Vorsterman van Oijen[1], Bierens de Haan[2] en later in de twintigste eeuw bij Burger[3], Wijnman[4] en Thijssen-Schoute[5]. Tenslotte was het Van Maanen die in zijn proefschrift[6] een lans brak voor nader onderzoek van het werk en leven van deze onderbelichte rekenmeester, meetkundige en tevens zeevaartkundige en sterrenkundige.Deze studie is een poging om de originaliteit van het meetkundig werk van Cardinael te tonen en tevens zijn plaats te bepalen in het culturele en wetenschappelijke leven van zijn tijd.

Cardinael bewoog zich voornamelijk binnen een netwerk van doopsgezinde relaties; de doopsgezinden namen een opmerkelijk prominente plaats in binnen de culturele en economische elite van de Republiek. Wat zijn meetkundig werk betreft valt Cardinael op door zijn afwijzing van algebraïsche methoden in de meetkunde. In plaats daarvan houdt hij vast aan de zuivere meetkunde waaronder de klassieke oppervlakterekening (geometrische algebra), hetgeen vaak leidt tot overtuigender bewijzen en berekeningen dan het domweg oplossen van vergelijkingen met behulp van standaard technieken uit de algebra.

De wiskunde tussen 1550 en 1650

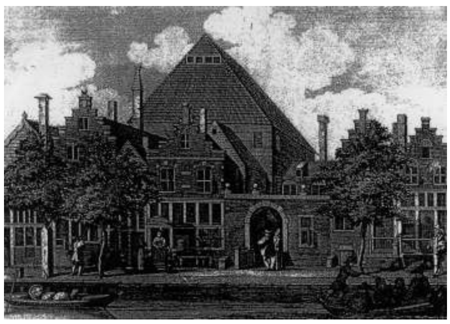
Cardinael leefde in een tijd waarin politieke, staatkundige, godsdienstige, maatschappelijke en wetenschappelijke veranderingen hand in hand gingen. Ontdekkingsreizen en toename van de handel leidden tot nieuwe beroepen en vernieuwing van het onderwijs.

De grote veranderingen op wetenschappelijk gebied, waarbij gebroken werd met de klassieke scholastiek en waarbij het vrije onbelemmerde wetenschappelijke onderzoek het heersende paradigma werd, kunnen we met een beetje goede wil afgespiegeld zien in de wiskunde. Daar vond tijdens het leven van Cardinael een complete Umwertung van waarden plaats, eindigend met Descartes die meetkunde en algebra van rol verwisselde: tot ongeveer 1600 had de meetkunde het laatste woord en werd daarmee de algebra gerechtvaardigd, vanaf ongeveer 1650 is het juist de algebra en later de analyse die dient om nieuwe meetkundige verbanden te ontwikkelen en te bewijzen.

Kort samengevat zou de zeventiende eeuwse wiskundebeoefening gezien kunnen worden als de periode waarin de aanvankelijke schroom om algebraïsche methoden te gebruiken, hetzij als doel op zich (oplossen van vergelijkingen), hetzij als hulpmiddel bij de meetkunde, volledig werd overwonnen. Men werkte aan het eind van die eeuw vrijelijk met formules waarin letters voorkomen voor onbekenden $(x, y, z, \ldots)$ en ook voor bekenden $(a, b, c, \ldots)$ en waarbij de rekenregels toegepast werden die van oudsher golden voor het rekenen met natuurlijke getallen en breuken.

De enige rechtvaardiging was dat deze werkwijze bruikbare resultaten opleverde, want dat woog zwaar in dit tijdperk van ontdekkingsreizen en economische expansie: rekenkunde, Italiaans boekhouden, landmeetkunde, navigatiekunde en sterrenkunde waren de opkomende vakken. Het bleef echter aan het geweten van de meer consciëntieuze wiskundigen knagen dat er voor deze algebra nauwelijks een logische fundering bestond.

Cardinael behoorde ongetwijfeld tot de categorie van wiskundigen, voor wie de meetkunde, die sinds Euclides in hun ogen wel streng gefundeerd was, de ultieme rechtvaardiging moest blijven. De algebra, in die tijd meestal aangeduid als *Regel Coss*, moest daarbij zoveel mogelijk vermeden worden. Met de term "coss", afgeleid van het Italiaans cosa (= zaak, ding) werd in die tijd de onbekende (namelijk: zaak) aangeduid, waarvoor wij tegenwoordig doorgaans de letter x gebruiken. We danken aan zijn meetkundige benadering en in het bijzonder aan de oppervlakterekening een aantal vindingrijke bewij-



Tekening: Caspar Philips Jacobsz (1732–1789)

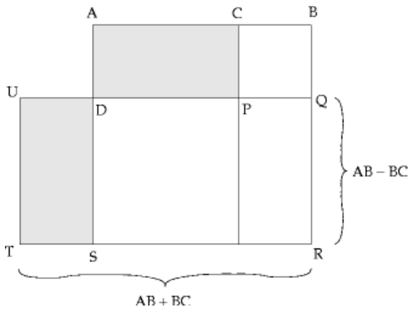
Figuur 1 De door Samuel Coster in 1617 opgerichte Nederduytsche Academie, gezien vanuit de Keizersgracht.

Meetkundige identiteiten I

Uit de tekening blijkt:

$$
\begin{aligned}
AB^2 - CB^2 &= \text{gnomon } ACPQRSA \\
&= \text{rechthoek } UQRT \\
&= (AB - CB) \cdot (AB + CB).
\end{aligned}
$$

Deze identiteit kan meetkundig geïnterpreteerd worden als het roteren en daarna transleren van rechthoek DPCA tot rechthoek SDUT, waarmee het gnomon is getransformeerd tot een rechthoek. In Questie 1 uit de HGQ wordt dit toegepast.



zen die via algebra tot wanstaltige oplossingen zouden hebben geleid

Cardinael als rekenmeester en wiskundige

Nadat Cardinael in 1605 van Harlingen naar Amsterdam was verhuisd en daar in 1607 getrouwd was met Levijntje Panten, dochter van de schoolmeester Lieven Panten, verscheen in 1612 reeds zijn *Hondert Geometrische questien met hare solutiën* (HGQ), het werk waarmee in één klap zijn naam gevestigd was. Deze HGQ vormde een aanhangsel van 127 pagina's bij het standaardwerk voor de landmeter, de *Practijck des Landmetens* van Sems en Dou. De faam verspreidde zich kennelijk zo snel dat reeds in 1617 een door Kurz (Curtium) gemaakte Duitse vertaling verscheen[7].

Ook het feit dat hij in de jaren 1612 tot 1614, op verzoek van de Admiraliteit van Amsterdam, zitting nam in de commissie met onder andere P. Plancius, W.J. Blaeu en later nog aangevuld met S. Stevin, W. Snellius en J.P. Dou ter beoordeling van 'de generale regel' van Jarichs van der Ley[8], wijst op een reeds gevestigde reputatie.

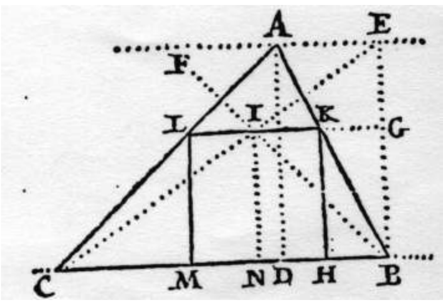
Nog grotere eer viel Cardinael in 1617 ten deel bij zijn benoeming als professor in de Arithmetica aan Coster's Academie, zij het dat de vreugde maar van korte duur was. In 1618 werd deze leerstoel al weer opgeheven. Dit lag niet zozeer aan het onderwijs van Cardinael, want hij schijnt een groot publiek getrokken te hebben. Beslissend was het verzet van de gereformeerde predikanten, voor wie een doopsgezinde professor een doorn in het oog was.

Geruime tijd later, pas in 1635, verschijnt opnieuw een boek van zijn hand: *Mathematische ofte Wisconstige bewijs-redenen, waer mede bewesen wordt, dat de Aerdcloot stil staet. En de Sonne daghelijcx en jaerlijcx sijnen loop doet; naer de leeringhe van Ptolemaeus. Teghens het ghevoelen van N. Copernicus, dat den Aerdcloot sijnen daghelijckschen en jaerlijckschen loop soude doen, en de Sonne stil staen in 't midden vande vaste Sterren-Hemel.*

Deze titel laat geen twijfel bestaan over de mening van Cardinael in het dispuut over het geocentrisch of heliocentrich wereldbeeld. Zijn (ook in die tijd reeds) afwijkend standpunt is kennelijk belangwekkend genoeg om iemand als Descartes te bewegen (tussen 1635 en 1647) in verband hiermee een bezoek aan hem te brengen. We weten dit van D. Rembrandtsz. van Nierop[9], net zoals Cardinael doopsgezind wiskundige en sterrenkundige. Van Nierop schrijft over dit bezoek: "... heeft mij de heer Des Kartes self geseyt, als dat hij bij desen Syb. Hanssen gegaen was, om met hem van wegen dit Boeckjen te spreecken, maer hij sulcks niet van sinne wesende, gaf tot antwoort, dat hij om seeckere oorsaecke alsoo gestelt hadde." Volgens Descartes houdt Cardinael de boot dus af en wordt hij door hem met enkele gemeenplaatsen afgescheept.

Ook zijn rekenboeken die vanaf 1639 met regelmatige tussenpozen verschijnen en tot ver na zijn dood vele heruitgaven beleven getuigen van zijn bekendheid en invloed als rekenmeester.

Maar zijn belangrijkste werk was de HGQ. Zo bestaat er een brief uit 1645 van J.J. Stampioen de Jonge[10] aan Christiaan Huygens. Sinds 1644 was Stampioen op verzoek van Constantijn Huygens wiskunde leraar van diens zoon Christiaan. In de brief staat de



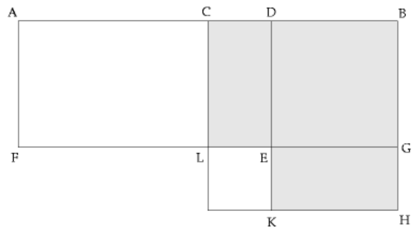
Kopie uit de HGQ, 1614

Figuur 2 Questie 89

Meetkundige identiteiten II

Elliptische aanpassing van oppervlak met een kwadratisch defect: AB wordt door C in gelijke delen verdeeld en door D in ongelijke delen. Dan geldt volgens *Elementen* boek II prop.5 de gelijkheid: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$ waaruit de identiteit volgt: $CB^2 - CD^2 = AD \cdot DB$ of ook:$CB^2 - CD^2 = (CB + CD) \cdot (CB - CD)$ Hier is rechthoek $ADEF$ aangepast aan de gegeven AB met kwadratisch tekort DB^2 (*Elementen* boek II prop. 5). De meetkundige interpretatie van de identiteit is weer als een combinatie van een rotatie en translatie van rechthoek $DBHK$ tot rechthoek $ACLF$, dus van gnomon $CBHKEL$ tot rechthoek $ADEF$. Zie kader IV voor de constructie van D indien:

$$
\begin{cases}
AD \cdot DB = q^2 \\
AD + DB = p
\end{cases}
$$



aanbeveling tot verdere studie in de wiskunde enige geometrische questien te maken "daer toe heel bequam zijn De hondert geometrische quaestien van meester Sibrant hanssen". Van Christiaan Huygens zijn inderdaad verschillende uitwerkingen uit 1645 van vraagstukken uit de HGQ bewaard gebleven[11]. Daaruit blijkt de dan zestienjarige Huygens reeds volledig vertrouwd met de algebra. Mogelijk was de moeilijke Questie 92 nog iets te hoog gegrepen want daarvan ontbreekt de oplossing. De drie andere Questien die Huygens gekozen heeft worden door hem vakkundig opgelost maar missen de charme van de soms verrassende oplossingen van Cardinael. Zo is Questie 48 een mooi voorbeeld van een hyperbolische aanpassing (zie kader III).

Het commentaar in de *Oeuvres complètes* bij Huygens' oplossing van Questie 89 (zie figuur 2), het beschrijven van een vierkant met maximale grootte binnen een driehoek noemt de meetkundige oplossing van Cardinael "minder simpel en minder elegant".

Dat valt niet goed te begrijpen aangezien diens oplossing juist verrassend is in zijn eenvoud. Hij maakt daarbij gebruik, zoals zo vaak

Meetkundige identiteiten III

Hyperbolische aanpassing van oppervlak met een kwadratisch exces: AB wordt door C weer verdeeld in twee gelijke delen maar D ligt nu op het verlengde van AB. In dat geval geldt de gelijkheid

$$AD \cdot BD + CB^2 = CD^2.$$

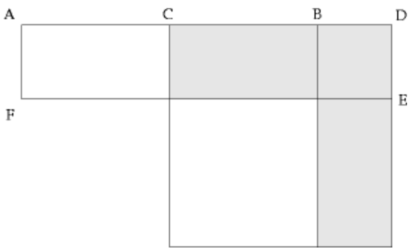
Deze identiteit is equivalent met

$$CD^2 - CB^2 = AD \cdot BD,$$

die weer equivalent is met

$$CD^2 - CB^2 = (CD + CB) \cdot (CD - CB).$$

De rechthoek $ADEF$ is aangepast aan AB met kwadratisch exces BD^2 hetgeen betekent dat de lichtgrijze rechthoek rechtsonder bij E verplaatst is naar A en het gnomon getransformeerd is tot een rechthoek. (*Elementen* boek II prop. 6) Zie voor een toepassing hiervan de HGQ Questie 48.

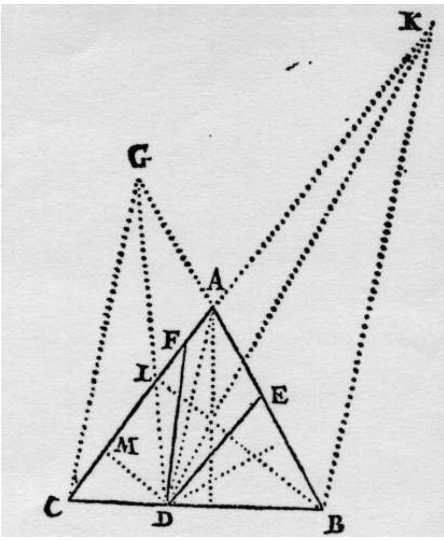


(zie ook Questie 0), van de transformatie van figuren met behoud van hun oppervlakte. De oplossingsmethode ligt dan zo voor de hand dat reeds de aanschouwing van de bijbehorende tekening volstaat om de oplossing te begrijpen (zie figuur 2): eerst wordt driehoek ABC getransformeerd tot rechthoekige driehoek EBC, daarin wordt vierkant GBNI geconstrueerd en de inverse transformatie daarvan geeft het gevraagde vierkant KHML. Ook Cardinael's oplossing van Questie 77 (verdeling van een driehoek in drie gelijke delen door middel van rechte lijnen getrokken vanuit een punt D gelegen op een zijde van de driehoek), eveneens met behulp van transformatie van figuren bij gelijkblijvende oppervlakte, spreekt veel meer tot de verbeelding dan de algebraïsche manier van Huygens, en wederom geldt: de tekening alleen maakt het reeds mogelijk de stappen van de constructie te volgen (zie figuur 3): door het trekken van de lijnen CG en BK evenwijdig aan DA ontstaan de beide driehoeken KDC en GBD met gelijke oppervlakte als driehoek ABC. De gezochte lijnen zijn nu DF en DE met F en E zodanig dat CF en BE gelijk zijn aan een derde deel van respectievelijk CK en BG. De oplossing is bovendien eenvoudig te generaliseren tot een verdeling in een willekeurig aantal gelijke delen.

Ook na zijn dood blijft Cardinael nog geruime tijd de aandacht trekken. In 1915 bespreekt R.C. Archibald[12] een boek van Thomas Rudd[13] (1584–1656), bestaande uit twee delen, waarvan in de hoofdtitel aan het begin van het boek het tweede deel wordt aangekondigd als: "... The second containing A Hundred Geometrical Questions with their Solutions and Demonstrations, some of them being performed Arithmetically, and others geometrically, yet all without the help of Algebra. ... By Captaine Thomas Ruddy, ... London, 1650". Archibald toont aan dat 77 van de "Questions" die Rudd geeft woordelijk met oplossingen en al zijn overgenomen uit de HGQ van Cardinael zonder dat diens naam vermeld wordt.

Ook in de negentiende eeuw doet Cardinael van zich spreken: in 1868 komen we zeven van zijn vraagstukken tegen in een selectie van 144 Vraagstukken van Nederlandse wiskundigen der XVIIe de eeuw[14], temidden van vraagstukken van onder andere Van Ceulen, Dou, Anhaltin, Van Leeuwen, De Graaf, Gietermaker en Van Schooten.

Maar paradoxaal genoeg is de grootste erkenning die hij tenslotte krijgt er een die door slechts weinigen als zodanig herkend is: in een uitvoerig gedocumenteerd artikel uit 1928 van Kokomoor (University of Florida)[15] over het meetkunde-onderwijs in de zeventiende eeuw is het hierboven besproken meetkundeboek van Thomas Rudd uit 1650 opgenomen in de verzameling van de vijftig



Kopie uit de HGQ, 1614

Figuur 3 Questie 77

Meetkundige identiteiten IV

Het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden met behulp van oppervlakterekening, dat wil zeggen de oplossing wordt berekend en daadwerkelijk op zuiver meetkundige wijze geconstrueerd. Stel gegeven het stelsel

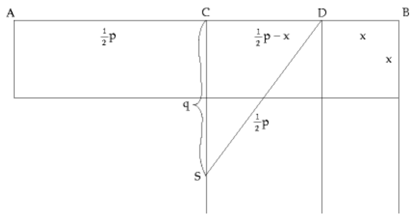
$$\text{stelsel I} \begin{cases} AD \cdot DB = q^2 \\ AD + DB = p \end{cases}$$

dan wordt gevraagd naar de positie van punt D op AB. Door dit stelsel op te vatten als een elliptische aanpassing van oppervlakte aan AB met kwadratisch tekort DB^2 is een meetkundige oplossing direct voor handen. Uit de identiteit van kader II volgt: $AD \cdot DB = CB^2 - CD^2$ Indien we nu stellen: $DB = x$ en $AC = CB = \frac{1}{2}p$ dan is het stelsel

$$\begin{cases} AD \cdot DB = q^2 \\ AD \cdot DB = CB^2 - CD^2 \end{cases}$$

equivalent met

$$\begin{cases} x(p - x) = q^2 \\ x(p - x) = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 \left(\frac{1}{2}p - x\right)^2. \end{cases}$$



Met S zo gekozen dat $CS = q$ en met behulp van een cirkel met S als middelpunt en $\frac{1}{2}p$ als straal kan D op AB gevonden worden. Zie voor de toepassing hiervan de HGQ Questie 5: met

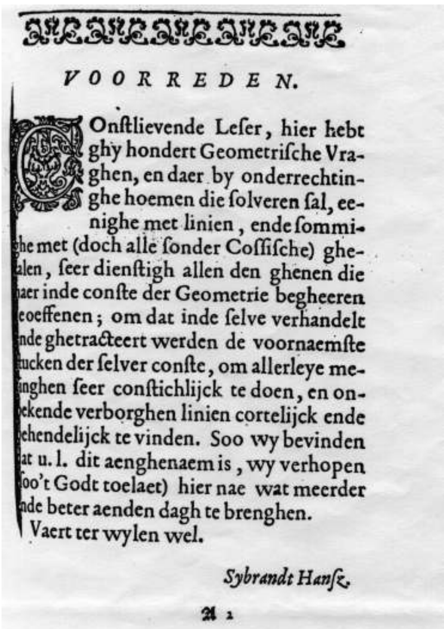
$$\begin{cases} CD + DA = 50 \\ CD \cdot DA = 576 \end{cases}$$

meest invloedrijke en gezichtsbepalende werken uit die tijd. In een vervolgartikel worden met name een aantal smaakmakende opgaven expliciet genoemd om een juiste indruk van deze stijl van meetkunde-onderwijs te geven. Het artikel van Archibald uit 1914 moet Kokomoor ontgaan zijn want anders zou toch zeker Cardinael's HGQ de plaats van Rudd's

Practical Geometry op zijn lijst van meest toonaangevende meetkundeboeken hebben ingenomen.

Enkele algemene kenmerken van de HGQ

De *Hondert Geometrische Questien* bestaat uit honderd uitgewerkte opgaven. Alle behalve de laatste hebben een meetkundig karakter. Hoewel ook zijn rekenboeken gezien de vele herdrukken, zelfs nog tot dertig jaar na zijn dood, tot de bestsellers van die tijd gerekend mogen worden, onderscheidden deze zich qua diepgang, keuze en behandeling van de stof nauwelijks van andere rekenboeken uit die periode. Voor de HGQ ligt dat anders. Behalve de *Hutspot der Geometrya*, een handschrift uit 1600 van J.P. Dou[16] en de *Wisconstighe gedachtenissen* van Simon Stevin uit 1605–08, zijn er nauwelijks boeken uit die tijd bekend die de vlakke meetkunde op een gevorderd niveau aanbieden.



VOORREDEN.

Onſtlievende Leſer, hier hebt ghy hondert Geometriſche Vraghen, en daer by onderrechtinghe hoemen die ſolveren ſal, eenighe met linien, ende ſommighe met (doch alle ſonder Coſſiſche) ghetalen, ſeer dienſtigh allen den ghenen die aer inde conſte der Geometrie begheeren eoeffenen; om dat inde ſelve verhandelt nde ghetracteert werden de voornaemſte ucken der ſelver conſte, om allerleye meinghen ſeer conſtichlijck te doen, en onekende verborghen linien cortelijck ende ehendelijck te vinden. Soo wy bevinden at u. l. dit aenghenaem is, wy verhopen oo't Godt toelaet) hier nae wat meerder nde beter aenden dagh te brenghen.

Vaert ter wylen wel.

Sybrandt Hanſz.

A 2

Figuur 4 De inleiding van *Hondert Geometrische Questien*

Wat de HGQ tot een uniek boek maakt is de uitgebreidheid en tevens grote toegankelijkheid van het materiaal, de oorspronkelijkheid en elegantie van vele oplossingen en daarnaast de toepasbaarheid van het merendeel der "Questien". Daar komt nog bij de speciale charme van menige oplossing als gevolg van Cardinael's wens de Regel Coss (algebra) te vermijden (zie de afgebeelde voorrede bij de HGQ, figuur 4) hetgeen de meetkundige vindingrijkheid ten goede is gekomen en waardoor het boek ook een staalkaart is van de methoden die de oppervlakterekening te bieden heeft. Bij het honderdste vraagstuk gaat hij in zijn voorliefde voor de meetkunde wel erg ver en keert hij de zaken om; een betrekkelijk eenvoudig arithmetisch vraagstuk wordt geforceerd meetkundig (maar wel ingenieus) opgelost. Met trots vermeldt hij: "Volght noch een Arithmetische Questie, om dese hier mede te besluyten, die ick seer konstelijck sonder Cossische ghetalen maecke".

Cardinael baseert zijn bewijzen in principe op de *Elementen* van Euclides en hij verwijst regelmatig naar proposities uit dat werk waarbij opvalt dat hij niet moe wordt te verwijzen naar *Elementen* boek I prop. 47 (Stelling van Pythagoras), maar regelmatig nalaat dit te doen met belangrijke toepassingen van minder bekende proposities uit de *Elementen*. De oppervlakterekening zoals Cardinael die toepast is duidelijk gebaseerd op Euclides' *Elementen* boek II prop.1–11. In plaats van de daarin beschreven identiteiten rechtstreeks te gebruiken geeft hij echter vaak zelf de afleiding van een persoonlijke variant. Omdat Cardinael geen letters gebruikt voor de bekende grootheden mist hij de mogelijkheid om met behulp daarvan algemeen geldende uitspraken af te leiden. Dat Cardinael zich hier tegen verzet heeft valt goed te begrijpen gezien zijn aversie tegen moderne methoden zoals de Regel Coss. Viète (1540–1603) was de eerste die deze lettersubstitutie in de plaats van concrete getallen toegepast heeft en Cardinael kon hiervan op de hoogte zijn geweest maar zijn behoudende instelling zou hem waarschijnlijk belet hebben van dit soort nieuwigheden gebruik te maken. De consequentie daarvan is dat al zijn oplossingen slechts geldigheid bezitten voor dat éne geval hoewel het algemene bereken- of bewijsschema daaruit direct volgt. Een ander aspect is het optreden van een vermenigvuldigingsfactor. Dit is het gevolg van een verkapte toepassing van de Regula Falsi en de Regel Coss: de onbekende grootheid wordt voorlopig gelijk aan 1 of 2 gesteld waar wij tegenwoordig de letter x zouden gebruiken (zie Questie 68).

Oppervlakterekening

Cardinael moet veelvuldig gebruik maken van meetkundige technieken omdat hij consequent de algebra wil vermijden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken. Dat lijkt in moderne ogen omslachtig en onnodig ingewikkeld maar vindt zijn oorzaak in de Griekse ontdekking van onmeetbare grootheden (in de tijd van Pythagoras). De meetkunde bleef over als enige betrouwbare basis voor wiskundige zekerheid. Lijnstukken waarvan bewezen kon worden dat hun lengte niet rationaal in een gekozen eenheid van lengte uit te drukken is (men kende slechts rationale getallen) konden namelijk meetkundig moeiteloos geconstrueerd worden (de hypothenusa van een gelijkbenige rechthoekige driehoek is het bekendste voorbeeld) en daarmee werd vanaf dat moment de meetkunde gezien als een betrouwbaarder grondslag dan de rekenkunde of de algebra. Vanaf de klassieke oudheid is zo de traditie ontstaan om de meetkunde te gebruiken als grondslag voor het geven van bewijzen en berekeningen (zie ook [17]).

Hoewel zich in de tijd van Cardinael in dat opzicht een ommekeer begon te voltrekken bleef de meetkundige traditie nog geruime tijd doorwerken en voelden zelfs 'bekeerden', die zonder enige reserve gebruik maakten van algebraïsche methoden, zich toch nog moreel verplicht hun op algebra gebaseerde bewijzen of berekeningen te rechtvaardigen door een zuiver meetkundige versie van de oplossing toe te voegen. Simon Stevin is hiervan een typisch voorbeeld. Zijn Arithmétique uit 1585 zit vol algebraïsche afleidingen die vervolgens, in onze ogen volkomen overbodig, meetkundig gerechtvaardigd worden.

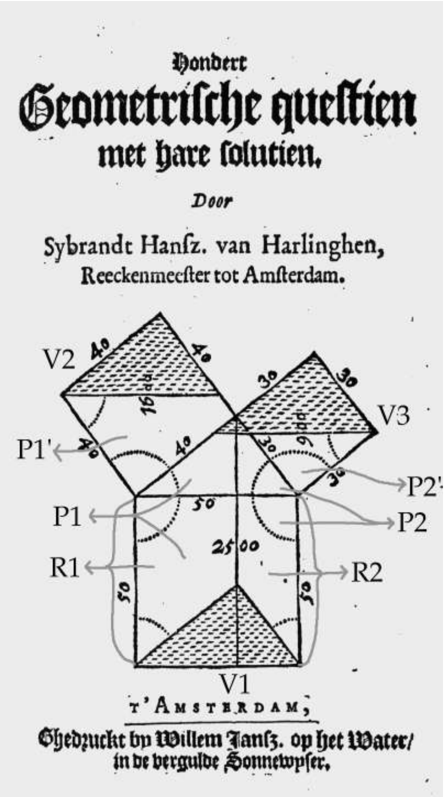
Analyse van de HGQ leidt tot de conclusie dat Cardinael een beperkte serie meetkundige identiteiten hanteerde waarmee de bedoelde transformaties mogelijk zijn. Vier daarvan zijn beschreven in de kaders *Meetkundige identiteiten*.

Enige Questien uit de editie 1614

De volgende selectie is gemaakt om een idee van de HGQ te geven. De oppervlakterekening krijgt er een plaats in en ook komen belangrijke thema's als Koordenvierhoek, Stelling van Ptolemaeus en de Verdeling van de Driehoek aan de orde. De Questies 12 en 23 zijn opgenomen omdat het meten van onbereikbare punten behoort tot de klassieke problemen van de landmeetkunde en ook omdat Cardinael voor Questie 12 door het gebruik van de spiegel in C en de hulplijn EG wel een zeer originele oplossing heeft gevonden.

De Questie 0 komt in de HGQ niet voor, deze begint met Questie 1; maar de illustratie op de titelpagina (figuur 5) kan opgevat worden als het eerste probleem uit het werk. Het bewijs voor de Stelling van Pythagoras dat door de tekening uitgebeeld wordt was te mooi om niet ook (als Questie 0) hier op te nemen. De in figuur 5 aangebrachte pijlen dienen het commentaar.

We zullen de selectie Questien als volgt presenteren: eerst geven we een beschrijving van de Questie, waarbij de tekst van Cardinael zoveel mogelijk wordt gevolgd. Spelling, grammatica en notatie zijn aangepast aan het moderne taalgebruik, maar de tekeningen



Figuur 5 De Questie op het titelblad: questie 0

(behalve die bij het commentaar) zijn copieën uit het oorspronkelijk werk.

Daarnaast is door de auteur bij alle Questien commentaar toegevoegd om het werk van Cardinael te verduidelijken of in een groter verband te plaatsen (vaak is dat de relevante plaats in de *Elementen* van Euclides).

Questie 0: de Stelling van Pythagoras

Commentaar: gegeven een driehoek ABC met hoek C een rechte hoek (zie figuur 5). Op AB, BC en AC zijn beschreven de vierkanten $V1$, $V3$ en $V2$. Gevraagd te bewijzen: vierkant $V1$ = vierkant $V2$ + vierkant $V3$

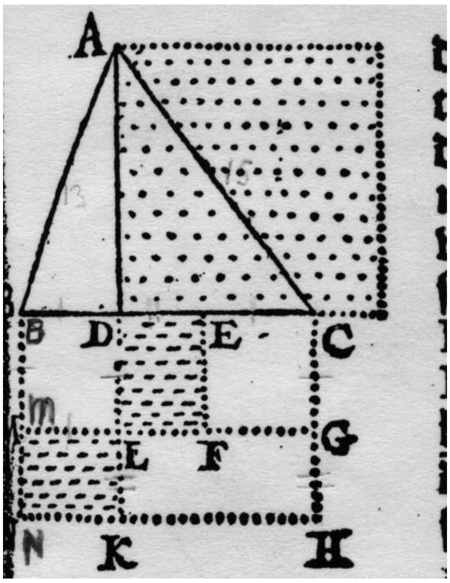
Bewijs: $V1$ wordt gesplitst in de beide rechthoeken $R1$ en $R2$, dus $V1 = R1 + R2$ en vervolgens toont Cardinael aan dat $R1 = V2$ en dat $R2 = V3$ waarmee het bewijs geleverd is. Daartoe worden $R1$ en $R2$ eerst vervormd tot de beide parallellogrammen $P1$ en $P2$ waarvoor geldt: $R1 = P1$ en $R2 = P2$ Op hun beurt worden $P1$ en $P2$ gedraaid (over $90°$) tot $P1'$ en $P2'$ zodat ook nu weer geldt: $P1 = P1'$ en $P2 = P2'$ Tot zover is het bewijs volledig symmetrisch ten opzichte van de rechthoekszijden AC en BC. Deze symmetrie gaat ogenschijnlijk verloren in de laatste stap waarbij aangetoond moet worden dat: $P1' = V2$ en $P2' = V3$ Vooral deze laatste stap is verrassend in zijn eenvoud en vindingrijkheid.

Beschrijving in woorden van het bewijs: De rechthoeken $R1$ en $R2$ worden door middel van vervorming en draaiing over $90°$ in twee stappen naar boven geschoven met behoud van oppervlakte. In de derde en laatste stap wordt aan deze zo ontstane parallellogrammen aan de bovenkant de driehoek ABC vastgeplakt en aan de onderkant er afgehaald waardoor de vierkanten $V2$ en $V3$ ontstaan met dezelfde oppervlakte als $R1$ en $R2$.

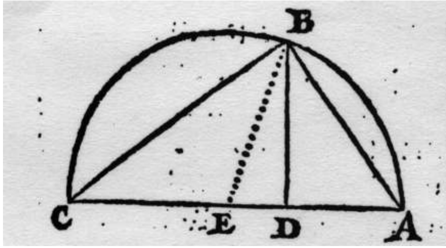
Questie 1: hoogtelijn in een driehoek

Gegeven: de driehoek ABC met $AB = 13$, $AC = 15$ en $BC = 14$ (zie figuur 6). Gevraagd: de lengte van de hoogtelijn AD. Berekening: Kies de punten E, M, L, F, G, N, K, en H zó dat $KHCD$ en $FGCE$ vierkanten zijn en $BD = EC$. Uit Pythagoras volgt: $AC^2 - AB^2 = 225 - 169 = 56 = DC^2 - BD^2$. Indien men nu deze beide laatste kwadraten opvat als de oppervlakten van vierkanten $KHCD$ en $FGCE$ dan volgt hieruit: dat gnomon $KHGFEDK$ oppervlakte 56 heeft, maar omdat ook $LFED = NKLM$ geldt: $NHGM = 56 = NH \times HG = 14 \times DE$, en dus $DE = 4$, waaruit volgt: $2 \times BD = 14 - 4 \Rightarrow BD = 5$. Pythagoras toegepast in $\triangle BDA$ geeft: $AD = 12$.

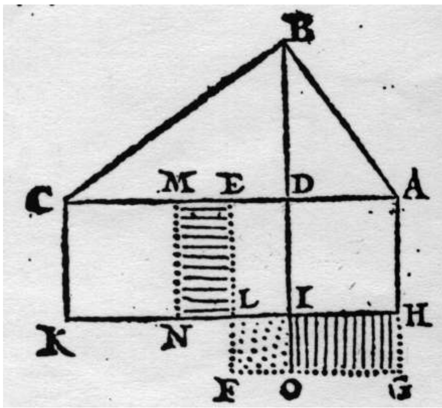
Commentaar: De berekening is karakteristiek voor de geometrische algebra (zie kader I): het verschil van twee kwadraten (meetkundig voorgesteld als vierkanten) geeft altijd een gnomon, hier de figuur $KHGFEDK$, en zo'n gnomon kan door verplaatsing van één van de beide samenstellende rechthoeken getransformeerd worden tot een rechthoek met dezelfde oppervlakte, hetgeen neerkomt op de meetkundige vertaling van de identiteit: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.



Figuur 6 Questie 1



Figuur 7 Questie 5: eerste methode



Figuur 8 Questie 5: tweede methode

Questie 5: het berekenen van stukken waarin bij een rechthoekige driehoek de basis verdeeld wordt door de hoogtelijn uit de top

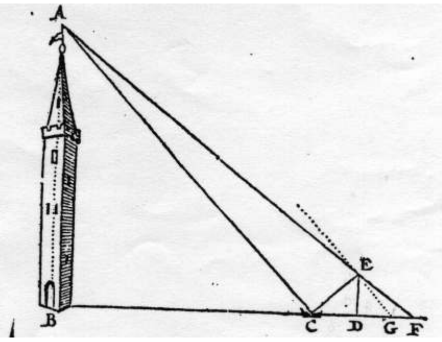
Van de rechthoekige driehoek BAC is gegeven dat hoek B recht is, basis $AC = 50$ en de hoogtelijn BD uit B op AC is 24 (zie figuur 7). Gevraagd: de stukken AD en DC.

Berekening, eerste manier: kies E als midden van AC, dan geldt: $BE = AE = CE = 25$ Met behulp van *Elementen*, boek I, propos. 47 in driehoek BED volgt dan $DE = 7$ en vervolgens $AD = 25 - 7 = 18$ en $DC = 25 + 7 = 32$

Anders, tweede manier (zie figuur 8): in de rechthoekige driehoek ABC geldt: $DB^2 = AD \cdot DC \Leftrightarrow AD \cdot DC = 576$. Uit $AE = 25$ volgt: kwadraat $AEFG = 625$. Daarvan afgetrokken $DIKC = 576$ geeft 49 voor kwadraat $ILFO$ omdat $HIOG$ gelijk gemaakt is aan $LEMN$ en dus de gnomon $AGOILEA$ gelijk is aan $DIKC = 576$. Gevolg: $OF = DE = 7$ en dus $AD = 18$ en $DC = 32$.

Commentaar op eerste manier: Cardinael maakt gebruik van *Elementen* boek III proposities 22 en 31.

Commentaar op tweede manier: De geometrische algebra die hier gebruikt wordt komt neer op een elliptische aanpassing aan AC met kwadratisch defect AD^2: lijnstuk AC wordt verdeeld in ongelijke delen AD en DC met $AC = 50$ en $AD \cdot DC = 576$. Volgens *Elementen* boek II propos. 5 geldt dan de identiteit: $AD \cdot DC + DE^2 = AE^2 \Leftrightarrow DE^2 = 49 \Leftrightarrow ED = 7$ waaruit AD en DC volgen. Cardinael



Figuur 9 Questie 12

heeft van deze identiteit niet zonder meer gebruik willen maken maar leidt deze eerst zelf af.

Questie 12: de hoogte van een toren

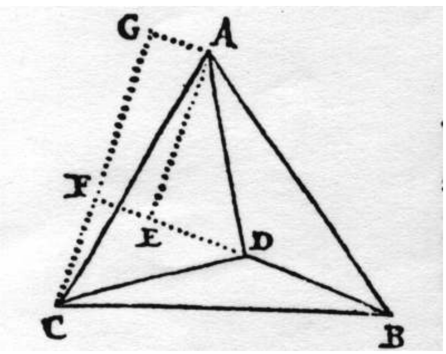
Gegeven: toren AB, spiegel in C, op verlengde van BC ligt D zodat $CD = 8$ en ligt F zodat $DF = 9$ (zie figuur 9). In D staat een verticale stok DE met hoogte 6 zodanig dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E. F is zo gelegen dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Te berekenen: de hoogte van de toren AB.

Berekening: kies punt G op DF zodanig dat $DG = DC = 8$. Nu geldt: $GF = 1$ geeft voor ED de hoogte 6, en: $FC = 17$ geeft voor AB hoogte 102. Dit is een gevolg van de gelijkvormigheid van de beide driehoeken FGE en FCA.

Commentaar: een zeer geraffineerde manier om de hoogte van een toren te meten indien om praktische redenen de voet van de toren niet bereikbaar is, terwijl er bovendien niet één enkele hoek gemeten hoeft te worden. Vooral de keuze van GE als hulplijn is een vondst.

Questie 23: driehoek met onbekende zijde

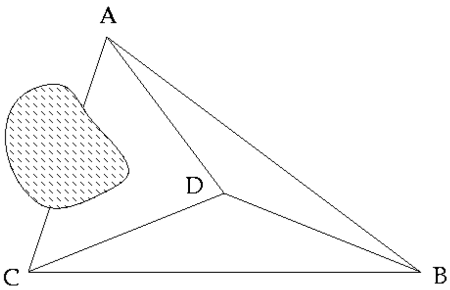
Gegeven: driehoek ABC met $AB = 14$, $BC = 15$ die opgedeeld is door de lijnen DA, DB en DC, zodat $DA = \sqrt{101\frac{1}{4}}$, $DB = \sqrt{45\frac{1}{4}}$ en



Figuur 10 Questie 23

$DC = 8\frac{1}{2}$ (zie figuur 10). Gevraagd: de lengte van AC.

Berekening: volgens Questie 2 kunnen BE en AE berekend worden met als resultaat: $BE = \sqrt{108\frac{52}{181}}$ en $AE = \sqrt{87\frac{129}{181}}$. Op dezelfde manier: $BF = \sqrt{216\frac{108}{181}}$ en $CF = \sqrt{8\frac{73}{181}}$. Telt men nu FG, die even groot is als AE, op bij FC dan volgt daaruit: $GC = \sqrt{150\frac{75}{181}}$. Verder geldt ook: $AG = EF = BF - BE = \sqrt{216\frac{108}{181}} - \sqrt{108\frac{52}{181}} = \sqrt{18\frac{106}{181}}$. In driehoek ACG volgt dan volgens Pythagoras: $AC = \sqrt{150\frac{75}{181} + 18\frac{106}{181}} = 13$.



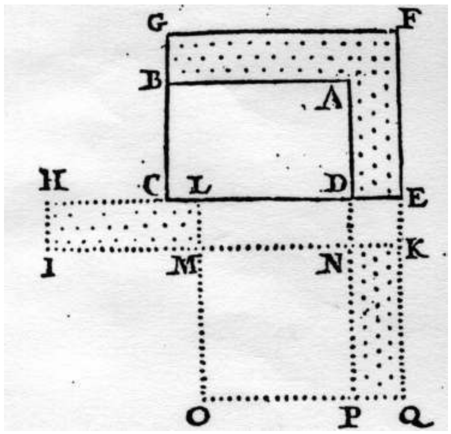
Figuur 11 Het meten van de afstand tussen twee punten als deze gescheiden zijn door een of ander obstakel

Commentaar: een bijzonder praktische toepassing hiervan in de landmeetkunde is het meten van de afstand van twee punten A en C indien deze gescheiden zijn door water of een of ander obstakel (zie figuur 11). Meting van AB, BC, AD, BD en CD maakt het mogelijk op eenvoudige wijze toch de afstand AC te kunnen bepalen. Opm.: Een slimme landmeter zou natuurlijk in een dergelijk geval punt D gekozen hebben op AB of op BC!

Questie 48: een tuin met een gracht van voorgeschreven oppervlakte

Gegeven: rechthoekig stuk land $ABCD$ met $BC = 10$ en $AB = 16$ (zie figuur 12). Gevraagd: indien de gracht $GFEDAB$ een oppervlakte moet hebben van 120, hoe groot moet $BG = DE$, de breedte van de gracht dan zijn indien EF parallel loopt met DA en FG parallel met AB.

Berekening: verleng DC met CH ter lengte AD zodat $DH = 26$ en stel bovendien $ED = EK$, het paralellogram $EHIK$ is dan gelijk aan de gracht $EDABGFE$ en dus is $EHIK$ gelijk aan 120. Verdeel nu $DHIN$ in twee gelijke delen door middel van de lijn LM, dan zijn LD en LH elk 13. Maak nu de rechthoek $KNPQ$ gelijk aan $LHIM$ dan is de gnomon $QPNMLDEKQ$ ook gelijk aan 120 en omdat QK gelijk is aan $LH = 13$ is het kwadraat $NPOM$ gelijk aan 169. Dit opgeteld bij 120 van de gnomon geeft 289 voor de grootte van het kwadraat $ELOQ$, waaruit voor de zijde EQ



Figuur 12 Questie 48

volgt $\sqrt{289} = 17$. Indien de zijde KQ daarvan wordt afgetrokken blijft over $EK = 17 - 13 = 4$ en dus ook $ED = BG = 4$.

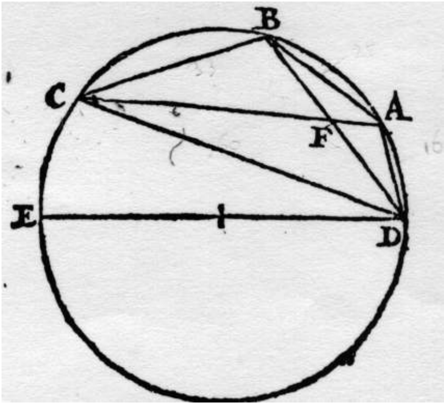
Commentaar: de oplossing van dit vraagstuk kan prachtig geformuleerd worden in termen van aanpassing van een rechthoek met voorgeschreven oppervlakte van 120 aan de zijde $HD = 10 + 16 = 26$, met kwadratisch exces gelijk aan $DEKN$. (dat wil zeggen een hyperbolische aanpassing aan HD) Indien L het midden is van HD dan geldt volgens *Elementen* boek II prop.6: $LE^2 - LD^2 = EHIK \Leftrightarrow LE^2 - LD^2 = 120 \Leftrightarrow LE^2 - 169 = 120 \Leftrightarrow LE^2 = 289 \Leftrightarrow LE = 17$. Gevolg: $DE = 17 - 13 = 4$

Deze opgave is bijna een schoolvoorbeeld voor het gebruik van hyperbolische oppervlakte aanpassing met een kwadratisch exces en toont goed de kracht van deze meetkundige methode.

Cardinael baseert zijn oplossing in essentie hier ook op maar maakt daarbij niet direct gebruik van de voor het grijpen liggende meetkundige identiteiten van *Elementen* boek II prop.6. In plaats hiervan werkt hij een eigen variant daarvan uit.

Questie 68: Gegeven een zijden koordenvierhoek; daaruit te berekenen de beide diagonalen en de diameter van de omgeschreven cirkel

Gegeven: van de koordenvierhoek $ABCD$ zijn bekend de zijden $AB = 25$, $BC = 33$, $DC = 60$ en $AD = 16$ (zie figuur 13). Gevraagd: de lengten der beide diagonalen AC en BD en ook de diameter van de omgeschreven cirkel. Oplossing: Uit Euclides boek III prop 21 volgt dat $DAC = DBC$ en ook dat $ADB = ACB$ en dus zijn de driehoeken AFD en BFC gelijkvormig. Gevolg: $FA : FD = FB : FC$ of ook: $FA : FB = FD : FC$. Daarom, als we stellen $FA = 1$, volgt daaruit $FB = 2\frac{1}{6}, FD = 2\frac{1}{16}$



Figuur 13 Questie 68

en $FC = 4$ zodat $AC = 5\frac{19}{20}$ en $BD = 4\frac{37}{80}$. Volgens de stelling van Ptolemeus is het product van deze diagonalen AC en BD moet nu gelijk aan de som der producten $AD \cdot BC$ en $AB \cdot DC$ van de overstaande zijden. Vanwege de aanname $AF = 1$ geldt nu echter dat: $AC \cdot BD = 5\frac{19}{20} \cdot 4\frac{37}{80} = 26\frac{883}{1600}$ en $AD \cdot BC + AB \cdot DC = 528 + 1500 = 2028$. De vermenigvuldigingsfactor waarmee AF en daarmee alle berekende lengten vermenigvuldigd moeten worden is daarom $\sqrt{\frac{2028}{26\frac{883}{1600}}} = \frac{1040}{119} = 8\frac{88}{119}$ en dus geldt: $AF = 8\frac{88}{119}$ waaruit tevens volgt: de diagonaal AC is 52 en de diagonaal $DB = 39$.

Met de diagonalen bekend geldt nu bijvoorbeeld in driehoek ABC: $AB = 25$, $BC = 33$ en $AC = 52$. Met behulp van Questie 65 volgt daaruit: $DE = 65$.

Deze diagonalen kunnen ook berekend worden met behulp van de Questies 33 en 34 alwaar in een driehoek ABC waarvan de zijden AB en BC bekend zijn evenals de verhouding van BF tot de stukken AF en FC waarin F de zijde AC verdeelt, de lengte van AC en vervolgens de lengten van AF en FC gevonden werden. Als AC bekend is volgt daaruit met behulp van Questie 65 de lengte van de diameter DE van de omgeschreven cirkel en vervolgens kan dan ook de diagonaal DB berekend worden evenals de stukken DF en FB.

Commentaar: door $FA = 1$ te stellen berekent Cardinael met gebruikmaking van de gelijkvormigheid van de driehoeken AFD en BFC en ook van de driehoeken BFA en CFD de lengten van de diagonalen AC en BD. Met behulp van de Stelling van Ptolemaeus wordt dan de vermenigvuldigingsfactor berekend.

Indien op deze wijze AC en BD berekend zijn kan de straal van de omgeschreven cirkel berekend worden met behulp van Questie 65 die het verband geeft tussen de zijden van een driehoek en de straal van zijn omgeschreven cirkel.

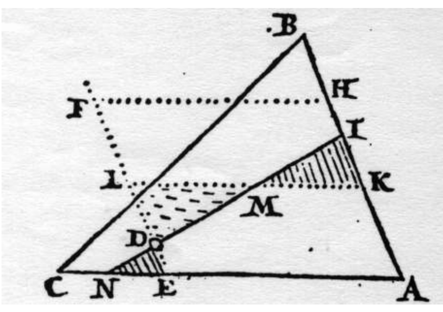
In het bewijs geeft Cardinael ook nog een alternatief voor het gebruik van de Stelling van Ptolemaeus.

De Stelling van Ptolemaeus wordt door Cardinael tenslotte ook nog eens volledig bewezen[18]. Het bewijs van deze stelling is in de meer eigentijdse literatuur te vinden in het mooie *Leerboek der vlakke meetkunde* van P. Molenbroek[19].

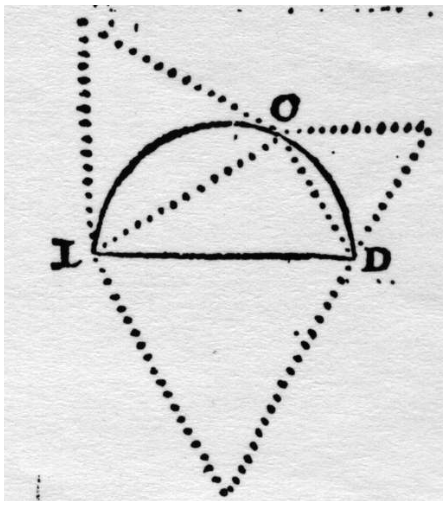
Questie 92: het verdelen van een driehoek in twee gelijke delen vanuit een punt binnen de driehoek

Gegeven: een driehoek ABC met ongelijke zijden en hoeken en met daarbinnen een punt D waardoor men een lijn wenst te trekken die de driehoek ABC in twee gelijke delen verdeelt (zie figuur 14). Gevraagd: hoe zal men dit geometrisch doen? Oplossing: trek eerst een lijn ED door D evenwijdig aan AB (figuur 14) Maak vervolgens het paralellogram $HAEF$ met de zelfde oppervlakte als driehoek ABC (zie commentaar). Neem de helft eraf, dan blijft over het paralelllogram $KLEA$. Trek nu een lijn door D zó dat deze van de vierhoek $KLEA$ de driehoek MDL afsnijdt die even groot is als de beide driehoeken KMI en DEN samen. Dan is de driehoek IAN gelijk aan de vierhoek $KLEA$, dus ook gelijk aan de helft van de gegeven driehoek ABC en is IN de gezochte lijn die de driehoek in twee gelijke delen verdeelt.

Om de lijn NI te kunnen trekken maken we een halve cirkel met DL als middellijn (figuur 15) en trek vanuit het ene einde D de lijn DO net zo groot als DE (in figuur 14) met O op de halve cirkel en verbind O met L. Maak nu in figuur 14 KI gelijk aan OL en trek de lijn ID door tot hij AC snijdt in N. De lijn IN is de gezochte lijn want omdat de driehoeken IKM, MLD en DEN alle gelijkvormig zijn en beschreven kunnen worden op de zijden van de rechthoekige driehoek DOL (zie figuur 15) is ook: driehoek MDL = driehoek IKM + driehoek DEN (dit volgt direct uit Euclides boek VI, prop.31,



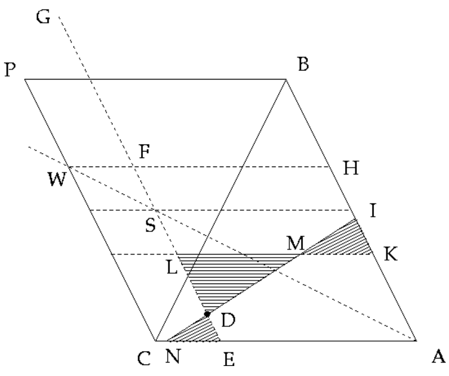
Figuur 14 Questie 92



Figuur 15 Bij het bewijs van Questie 92

een generalisatie en echte uitbreiding van de Stelling van Pythagoras).

Commentaar: om het paralellogram $HAEF$ te construeren kan men als volgt te werk gaan (figuur 16): eerst wordt paralellogram $BACP$ gemaakt dat gelijk is aan tweemaal driehoek ABC. Vervolgens wordt $BAPC$ met de lijn TU in twee gelijke delen verdeeld en de lijn EG getrokken evenwijdig aan AB. Vierhoek $UACT$ is dus gelijk aan driehoek ABC. EG en TU snijden elkaar in S. Het verlengde van AS snijdt CP in W. Trek WH evenwijdig aan CA en noem snijpunt van WH met EG punt F.



Figuur 16 Bij het commentaar op Questie 92

In paralellogram HACW geldt (*Elementen* boek I prop. 43): vierhoek $SECT$ = vierhoek $HUSF$, waaruit volgt: vierhoek $UACT$ = vierhoek $HAEF$ en daarmee is dus het paralellogram $HAEF$ geconstrueerd met dezelfde oppervlakte als driehoek ABC.

Van Schooten jr. geeft in zijn boek [20] de constructie van een lijn die een driehoek volgens een voorgeschreven verhouding verdeelt zowel voor het geval dat het punt binnen als het geval dat het buiten de driehoek ligt. Daarbij gebruikt hij in beide gevallen in wezen de methode van Cardinael maar voor de sleutelidee tot deze constructie verwijst hij daarbij naar Pappus van Alexandrië (ong. 330) die in zijn *Collectionum Mathematicarum*, 7e boek voorstel 164, ook van *Elementen* boek VI prop.31 gebruik maakt voor een constructie analoog aan de onderhavige in figuur 15, dat wil zeggen de constructie van OL in figuur 15 om daarna KI in figuur 14 daaraan gelijk te maken en te concluderen dat ID de gevraagde lijn is. In dit verband zou het interessant zijn om te weten of Cardinael van deze verhandeling in de Collectionum van Pappus op de hoogte was temeer omdat hij in Questie 0 (Stelling van Pythagoras) een bewijs geeft dat gebruik maakt van transformaties van rechthoeken en paralellogrammen op een manier die doet denken aan de methode die Pappus gebruikt bij zijn bewijs van een variant op de Stelling van Pythagoras (Heath 1956, vol.1, p. 366). Hoe het ook zij, op zijn minst komt Cardinael de eer toe deze verrassende toepassing van *Elementen*, boek VI prop.31, als eerste aan de vergetelheid te hebben ontrukt. In zijn Questien besteedt Cardinael veel aandacht aan dit soort verdelingsproblemen: nummer 77 gaat eveneens over de driehoek, maar de nummers 79 t/m 86, 90, 91 en 93 t/m 95 betreffen veelhoeken (meestal vierhoeken).

Het probleem der verdeling van een polygoon, in het bijzonder een driehoek, in twee delen volgens voorgeschreven verhouding door middel van een lijn (transversaal) getrokken vanuit een punt binnen of buiten dat polygoon gelegen, vormde in Cardinael's tijd een geliefd onderwerp van het meetkunde curriculum en dankte zijn populariteit ongetwijfeld aan de hoge vlucht die de landmeetkunde in die tijd genomen had.

Ook directe voorgangers van Cardinael zoals Simon Stevin, Christoph Clavius en Ludolf van Ceulen hebben zich uitvoerig met deze problematiek beziggehouden. Daarbij beroept Clavius zich expliciet op het voorbereidend werk dat door Stevin verricht is[21] en ook Van Ceulen heeft hierover met Stevin in 1582 gecorrespondeerd[22]. Bij die gelegenheid erkent Stevin deze belangrijke problemen niet naar bevrediging te kunnen oplossen. Nadat hij vanaf 1585 kennis heeft genomen van het werk op dit terrein door Nicolas Tartaglia en diens leerling Joannes Baptista Benedictus is hij in staat een algemene theorie over verdelingsvraagstukken van polygonen af te ronden. Publicatie vind pas plaats in de *Wisconstige gedachtenissen 1605–1608*[23]. De aanschouwelijke en zuiver meetkundige oplossing van Cardinael uit 1614 voor het geval van de driehoek is door zijn eenvoud en elegantie echter superieur aan de enigszins gekunstelde (en niet zuiver meetkundige) oplossing van Stevin. Daar staat tegenover dat Stevin in tegenstelling tot Cardinael aandacht geeft aan de vraag welke zijden de gezochte lijn door D snijdt. Interessant is overigens ook de vraag naar het aantal oplossingen: als D bijvoorbeeld samenvalt met het zwaartepunt van de driehoek dan zijn er drie oplossingen, maar als D 'dichtbij' een hoekpunt ligt is er slechts één oplossing!

Nawoord

Het onderhavige onderzoek naar Cardinael vindt plaats in het kader van het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek'. Een apart artikel, meer biografisch van karakter, zal verschijnen in Gewina[24]. Bij het tot stand komen van dit artikel is gebruik gemaakt van de commentaren op eerdere versies door J.A. van Maanen[25] en E.M. de Jager[26].

Referenties

1 G.A. Vorsterman van Oijen, *Honderd vier en veertig vraagstukken van Nederlandsche wiskundigen der XVII de eeuw*, S.E. van Nooten Schoonhoven 1868.

2 D. Bierens de Haan, *Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in Nederland*, Overdruk uit de Verslagen der Kon. Akademie van Wetenschappen Afd. Natuurkunde 2e Reeks en 3e Reeks, Amsterdam 1878, 1887.

3 C.P. Burger, 'Amsterdamsche rekenmeesters en zeevaartkundigen in de zestiende eeuw', A'dam: Van Langenhuysen. 1908. Overdr. Uit: *De Amsterdamsche boekdrukkers en uitgevers*, dl. III.

4 H.F. Wijnman, 'De Amsterdamsche Rekenmeester Sybrandt Hansz Cardinael' in: *Het Boek*, Nieuwe Reeks 22 (1933/4), pp.73–94, en artikel in het NNBW.

5 C. L. Thijssen-Schoute, *Nederlands Cartesianisme*, HES Uitgevers, Utrecht 1954; C.L. Thijssen-Schoute, *Uit de republiek der letteren* M.Nijhoff, 's Gravenhage 1967

6 J.A. van Maanen, *Facts of seventeenth century mathematics in the Netherlands*, proefschrift Utrecht 1987

7 Tractatus geometricus. Darinen hundert schöne ausserlesene liebliche Kunst Quaestiones, Durch welche allerley Longi: Plani: und Solidimetrische Messung seher künstlich zu thun und zu verrichten seind mit beygefüegten auflösungen ausserhalb der Coss oder Algebrae, Vonn Herrn Sybrand Hansz Rechenmaister zu Ambsterdam Niederländisch beschrieben. Jetzt aber ... aus gemelter Niederlän-dischen sprach in Hochteutsch Transferiert, Durch Sebastianum Curtium, Arithmeticum, Geometram, Burgern und verordneten Visitatorn der Teutschen Schulen in Nurnberg. Gedruckt zu Ambsterdam bey Wilhelm Jansz in dem vergülten Sonnenweyser. Anno 1617. Amsterdam W.J. Blaeu, 1617

8 C.A. Davids, *Zeewezen en wetenschap*, De wetenschap en de ontwikkeling van de navigatietechniek in Nederland tussen 1585 en 1815, De Bataafse Leeuw, Amsterdam 1985, pp.285 e.v.

9 D.R. van Nierop, *Bijvoeghsel op des aertrijks beweging en sonne-stilstant*, Amsterdam 1677.

10 Ch. Huygens, *Oeuvres completes*, vol.I, correspondance 1645 no5 (Lisse 1967–77) 5–10.

11 Ibid., vol.XI, 1645 23–27. Het betreft de questien 48, 77, 89 en 92.

12 R.G Archibald, 'Thomas Rudd and Sybrandt Cardinael's "Hondert geometrische Questien", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Tweede Reeks, deel XI, 1915 pp.191–95.

13 Thomas Rudd, *Practical Geometry*, London 1650; Euclides *Elements of Geometry* London, 1651.

14 Vorsterman van Oijen 1868 (n.1)

15 F.W. Kokomoor, 'The Teaching of Elementary Geometry in the seventeenth century', In: *ISIS*, Vol.X, 1928, pp. 21–32 en pp.367–415 (i.h.b.pp.413, 414), Vol XI 1928 pp.85–110

16 'Dold-Samplonius', *Janus, Revue internationale de l'histoire des sciences*, etc., 1968 LV, 4 p. 261.

17 A.W. Grootendorst en A.J. van Zanten, *Caleidoscoop van de wiskunde*, Delftse Universitaire Pers Delft 1995

18 T.L. Heath,*Euclid, the thirteen books of the elements*, Dover Publications New York 1956 Vol.2 p. 225 prop.D.

19 P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke meetkunde*, negende druk, Noordhoff, Groningen 1943, pp.282 en 366.

20 J. van Schooten, Mathematische oeffeningen , begrepen in 5 boecken, t'Amsterdam 1659–1660, p. 105–108

21 *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) 5 (1902) pp.106–191 en ook: H.J.M. Bos: 'Descartes en het Begin van de Analytische Meetkunde', *Vacantiecursus 1989*, Wiskunde in de Gouden Eeuw, pp.79–98.

22 L. van Ceulen, *De arithmetische en geometrische fondamenten*, Leyden 1615, p.211.

23 S. Stevin, *Wisconstighe gedachtenissen*, Leyden, uitg. J. Bouwensz., 1605–1608, p.144.

24 *Gewina*, Tijdschrift voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Natuurwetenschappen, Wiskunde en Techniek.

25 Universitair hoofddocent wiskundedidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen.

26 Emeritus hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam.