Rob Bosch
Koninklijke Militaire Academie
Kasteelplein 10
4811 XC Breda
r.bosch2@mindef.nl

Vakantiecursus 2003

Politieke macht en onmacht

In de wereldpolitiek werken landen op allerlei gebieden samen. Ze moeten wel, in hun strijd om zoveel mogelijk invloed. Het ene land heeft daarbij meer succes dan het andere. Hoe komt dit? En hoe eerlijk is eigenlijk een eerlijke verdeling naar bijvoorbeeld grootte? Rob Bosch, docent wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie, legt uit dat de machtsverdeling op een onverwachte manier afhangt van het totaal aantal stemmen, van het aantal stemmen dat nodig is opdat een besluit wordt aangenomen en van het eventuele vetorecht. Deze tekst verscheen afgelopen jaar in de syllabus van de vakantiecursus voor wiskundeleraren georganiseerd door het CWI.

In de politiek gaat het om *macht*. Politieke macht kan worden uitgeoefend op basis van bijvoorbeeld het aantal zetels in een parlement, het aantal stemmen in een raad met een gewogen stemsysteem of door het gebruiken van een vetorecht. Het ligt voor de hand te denken dat een groter aantal zetels of een groter aantal stemmen ook een toename van de politieke macht betekent. Dit hoeft echter niet altijd het geval te zijn. Ja sterker nog, een toename van het aantal zetels of stemmen kan zelfs gepaard gaan met een dalende politiek invloed.

In dit artikel zullen we de relatie tussen zetelaantal of stemmenaantal en de politieke macht die op basis van dit aantal kan worden uitgeoefend, bespreken. Hiertoe introduceren we voor gewogen stemsystemen de zogenaamde *Shapley-Shubik-index* die als een maat voor de politieke macht kan worden opgevat. Tevens zullen we laten zien dat een systeem waarbij één of meer partijen over een vetorecht beschikken altijd kan worden opgevat als een gewogen stemsysteem zonder vetorecht. We zullen het bovenstaande illustreren aan de hand van de situatie in de Europese Unie en de Veiligheidsraad van de Verenigde Naties.

Een unie van drie landen

In deze paragraaf bekijken we de machtstructuur binnen een unie van drie landen. In deze unie geven we de landen aan met A, B en C. In deunieraad bestaande uit drie vertegenwoordigers van de aangesloten landen wordt over zaken van gemeenschappelijke belang gestemd. Op basis van het aantal inwoners krijgt land A in deze raad 6 stemmen toegewezen, voor land B zijn dat er 4 en het kleinste land C krijgt 1 stem. In het totaal worden er dus 11 stemmen uitgebracht. In de raad worden de besluiten met meerderheid van stemmen genomen. Omdat het aantal uitgebrachte stemmen oneven is hoeft er geen extra regel te worden opgesteld voor het geval de stemmen staken. De vraag die we hier zullen beantwoorden is hoe op basis van deze stemmenverhouding de machtsverhoudingen liggen binnen de unie.

Een oppervlakkige beschouwing zou kunnen leiden tot het idee dat land A anderhalf keer zoveel invloed heeft als land B, immers A heeft anderhalf keer zoveel stemmen als B. Land B heeft vier keer zoveel stemmen als land C en zou derhalve vier keer zoveel invloed hebben als C. Dit is inderdaad een nogal oppervlakkige beschouwing want de besluiten worden immers met meerderheid van stemmen genomen. Er zijn derhalve minstens 6 stemmen nodig om een voorstel aangenomen te krijgen en 6 stemmen zijn ook voldoende om een voorstel te blokkeren. Aangezien A over 6 stemmen beschikt kan hij ieder voorstel dat hem niet zint, blokkeren. De 6 stemmen van A zijn ook voldoende om een voorstel aan te nemen. De landen B en C hebben samen niet genoeg stemmen om een voorstel aan te nemen noch is hun gezamenlijk stemmenaantal voldoende om voorstellen te blokkeren. Land A bepaalt dus welke voorstellen wel of niet worden aangenomen. Met andere woorden A heeft met zijn absolute meerderheid in de raad alle macht.

Als we de macht van een land in een getal willen uitdrukken dan ligt het voor de hand land A honderd procent van de macht toe te kennen. Het is gebruikelijk om als maat voor de macht een index te kiezen, dat wil zeggen een getal tussen 0 en 1. Hierbij geeft 0 aan dat een partij geen enkele macht kan uitoefenen en betekent een 1 dat een partij alle macht heeft. Een dergelijke index wordt *machtsindex* (power index) genoemd. In het bovenstaande voorbeeld wordt de verdeling van de macht dan als volgt:

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	6	4	1	11
machtsindex	1	0	0	1

Zolang land A 6 stemmen houdt, is de verdeling van de overblijvende 5 stemmen tussen B en C voor de verdeling van de macht niet interessant. Land A houdt alle macht en de machtsindices van B en C blijven 0. Een land met een machtsindex van 0 wordt ook wel een *dummy* genoemd.

Het is duidelijk dat de stemmenverdeling $(6, 4, 1)$ voor de landen B en C niet aanvaardbaar is. Het is in dit geval dus onwenselijk de stemmen te verdelen naar evenredigheid van de inwoneraantallen. In de volgende paragraaf bekijken we daarom andere stemmenverhoudingen.

Verschuiving van de macht

De landen van de unie besluiten nu tot de volgende verdeling van de stemmen: land A en land B krijgen beide 5 stemmen en land C krijgt 1 stem. Bij deze verdeling wordt nog enigszins rekening gehouden met de grootte van de lidstaten. Hoe veranderen de machtsindices van de landen in dit geval? Het is duidelijk dat land A die zijn absolute meerderheid kwijt is, macht zal inleveren. Land B zal met de extra stem aan invloed winnen en dezelfde invloed krijgen als land A. Voor land C dat nog steeds maar 1 stem heeft, verandert er ogenschijnlijk weinig of niets.

Nu geen enkel land meer een absolute meerderheid heeft, kan een voorstel slechts worden aangenomen of verworpen door een coalitie van tenminste twee landen. We merken op dat elk tweetal landen over een meerderheid van minstens 6 stemmen beschikt. Ieder tweetal landen kan derhalve een voorstel aannemen of de aanname ervan blokkeren. De meerderheidscoalities of winnende coalities zijn bij deze stemverdeling:

$$AB \qquad AC \qquad BC$$
$$ABC$$

Uit de bovenstaande lijst van winnende coalities blijkt dat ieder land dezelfde rol speelt. Op grond van deze symmetrie kennen we dan ook aan ieder land dezelfde macht toe. De machtsverdeling binnen de unie wordt bij deze stemmenverhouding gegeven door

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	5	5	1	11
machtsindex	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Merk op dat alhoewel aan C geen extra stem is toegekend dit land toch aanzienlijk aan invloed gewonnen heeft. Als kleinste lidstaat met slechts 1 stem heeft het dezelfde invloed als de twee grote lidstaten! Een dergelijke verdeling zal waarschijnlijk op verzet stuiten van de grote landen. Immers, hoe maakt men het de eigen bevolking duidelijk dat de 12 miljoen inwoners van land A dezelfde invloed hebben als de 2 miljoen inwoners van land C? We proberen daarom nog enige andere stemmenverdelingen om zo tot een voor alle partijen aanvaardbare machtsverhouding te komen. We beginnen we met de verdeling van de macht om er vervolgens de stemmenverhouding bij te vinden. Stel dat de landen een machtsverhouding van $m(A) = 1/2, m(B) = 1/3$ en $m(C) = 1/6$ allerzins redelijk vinden. Welke stemmenverhouding bewerkstelligt dit? Met andere woorden: welke getallen moeten we in de onderstaande tabel invullen?

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	?	?	?	11
machtsindex	$1/2$	$1/3$	$1/6$	1

Al snel blijkt dat het niet lukt de stemmen zo te verdelen dat de gevraagde machtsstructuur verkregen wordt. De reden hiervoor is de volgende. Bij 3 landen heeft òf een land de absolute meerderheid òf ieder tweetal landen vormt een winnende coalitie. In het eerste geval levert dat een machtsvector $[1, 0, 0]$ op en het tweede geval geeft weer de egalitaire verdeling $[1/3, 1/3, 1/3]$. In de unie moet men dus kiezen voor een dictatoriaal systeem waarbij een land het voor het zeggen heeft of voor een gelijkwaardigheid van de landen ongeacht de grootte van het land. Zolang men een oneven aantal stemmen verdeelt en bij meerderheid besluiten neemt geldt het bovengenoemde argument.

In een unie van 3 landen waarin bij meerderheid wordt beslist, kan een oneven aantal stemmen alleen zo worden verdeeld dat er of een dictatoriale machtsstructuur of een egalitaire machtsstructuur ontstaat.

Aangezien de twee bovengenoemde machtsstructuren onbevredigend zijn, gaan we in de volgende paragraaf op zoek naar mogelijkheden om een structuur te vinden die meer recht doet aan de grootte van de lidstaten.

Het quotum

Daar het bij meerderheid besluiten nemen tot de twee onbevredigende structuren aanleiding geeft, verlaten we dit principe. Behalve een stemmenverdeling stellen we een aantal stemmen vast dat nodig is voor aanname van een voorstel. Dit aantal stemmen, dat we aangeven met q, heet het *quotum*. Uitgaande van de oorspronkelijke verdeling van $(6, 4, 1)$ kunnen we dit quotum op 6 tot en met 11 stemmen vaststellen. Een quotum van minder dan 6 stemmen levert meerdere disjuncte winnende coalities op, bijvoorbeeld A en BC hetgeen een tegenstrijdigheid in de besluitvorming geeft. We gaan nu de consequenties van de verschillende quota na.

Quotum $q = 11$
In dit geval wordt er besloten bij unanimiteit. Elke lidstaat kan hier een voorstel blokkeren en alleen de *grand coalition* ABC is winnend. Dit geeft uiteraard weer de egalitaire machtsverdeling.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	1/3	1/3	1/3

Tabel 1 quotum=11

Quotum $q = 8, 9, 10$
In deze gevallen hebben A en B het voor het zeggen. Behalve de *grand coalition* is alleen de coalitie AB winnend. Voor de aanname van een voorstel heeft A de steun van B nodig en andersom. De eventuele steun van C is hierbij niet van belang. Beide landen kunnen ook op eigen kracht een voorstel blokkeren. Ook in dit geval is het irrelevant wat C doet. De macht wordt hier dus verdeeld tussen A en B. Land C is bij deze quota een dummy.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	1/2	1/2	0

Tabel 2 quotum=8, 9, 10

Quotum $q = 6$
Dit is het geval van stemmen bij meerderheid waarbij land A alle macht bezat.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	1	0	0

Tabel 3 quotum=6

Quotum $q = 7$
Dit is het meest interessante geval. Land A kan met behulp van B een voorstel doen aannemen. Dit is ook mogelijk als A zich verzekerd weet van de steun van C. A heeft dus de keuze uit twee mogelijke coalitiepartners. Aangezien B en C samen geen meerderheid hebben, is voor hen de enige mogelijkheid A als coalitiepartner te strikken. De landen B en C zijn in deze situatie vergelijkbaar en hebben derhalve dezelfde macht. Op grond van het feit dat A een twee keer zo grote keuze heeft in coalitiepartners als B en C zou men misschien de machtsverhouding $[1/2, 1/4, 1/4]$ verwachten. De machtsindices zoals we die verderop zullen berekenen geven echter het volgende resultaat.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	2/3	1/6	1/6

Tabel 4 quotum=7

Land A blijkt hier dus over vier keer zoveel macht te beschikken als B en C. Vanwaar dit grote verschil? Wel, men kan twee soorten macht onderscheiden; ten eerste de macht om alleen of met anderen een voorstel aangenomen te krijgen en ten tweede de macht om een onwelgevallig voorstel te blokkeren. Alhoewel land A niet op eigen kracht een voorstel kan doen aannemen, beschikt het wel over de macht om voorstellen te blokkeren, de zogenaamde *blocking power*. Geen enkel voorstel dat A niet zint, wordt aangenomen. Anders gezegd: land A heeft hier een vetorecht hetgeen A een sterke machtsbasis garandeert. De landen B en C missen deze blocking power. In het vervolg zullen we op een formele wijze de bovenstaande machtsstructuur berekenen.

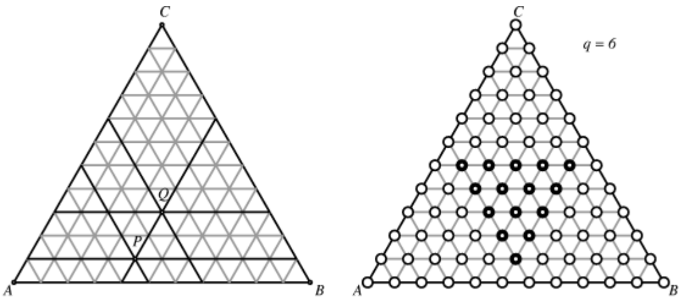
Bij de stemmenverdeling $(6, 4, 1)$ geldt voor $q = 6, 8, 9, 10$ dat een of meer landen een dummy zijn. Dit is zeker geen goede basis voor het vormen van een unie. Blijft over de egalitaire machtsverdeling bij het besluiten bij meerderheid of unanimiteit en de verdeling $[2/3, 1/6, 1/6]$ bij $q = 7$. Geen van deze verdelingen doet volledig recht aan de grootte van de landen zodat we kunnen concluderen dat er geen machtsstructuur bestaat die een goede afspiegeling is van de relatieve grootte van de lidstaten.

Machtsdriehoeken

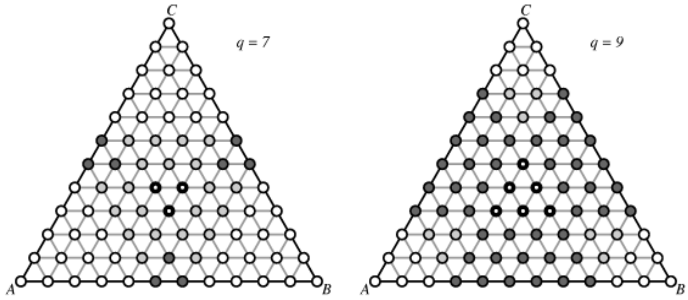
De machtsstructuren die voortvloeien uit de stemmenverdelingen en het quotum kunnen overzichtelijk in een driehoek worden weergegeven. In de driehoek ABC in figuur 1 is de situatie weergegeven van een verdeling van 11 stemmen over drie landen A, B en C. Ieder roosterpunt in de driehoek heeft hier drie coördinaten. Zo zijn de coördinaten van punt $A = (11, 0, 0)$, hetgeen hoort bij een verdeling van 11 stemmen voor A en geen voor B en C. Bij de punten B en C horen respectievelijk de coördinaten $(0, 11, 0)$ en $(0, 0, 11)$. De punten P en Q hebben respectievelijk de coördinaten $(6, 4, 1)$ en $(4, 4, 3)$. De coördinaten van deze punten geven ook hier weer de stemmenverdeling aan. Iedere stemmenverdeling correspondeert met een roosterpunt in de driehoek en ieder roosterpunt in de driehoek geeft een mogelijke stemmenverdeling aan. Merk op dat op lijnen evenwijdig aan de basis AB de C-coördinaat constant is. Evenzo is op lijnen evenwijdig aan de lijn AC de B-coördinaat constant.

Bij ieder punt hoort ook een machtsstructuur. In het geval van stemmen bij meerderheid (quotum=6) krijgen we de machstructuur uit figuur 1. De witte punten zijn de punten waarbij de stemmenverdeling resulteert in de dictatoriale machtsstructuur $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ of $[0, 0, 1]$, terwijl de zwarte punten horen bij stemmenverdelingen die leiden tot de egalitaire machtstructuur $[1/3, 1/3, 1/3]$. Kortom, in deze driehoek geven punten van gelijke kleur eenzelfde machtsstructuur aan.

In figuur 2 zijn voor diverse quota de machtsstructuren weer-



Figuur 1 Links: $\triangle ABC$ met $P(6,4,1)$ en $Q(4,4,3)$; rechts: de machtsverdeling bij $q = 6$.



Figuur 2 Machtsverdeling bij $q = 7$ en $q = 9$.

gegeven. De witte punten geven weer een dictatoriale structuur aan, terwijl de zwarte punten horen bij een egalitaire machtsstructuur. De donkergrijze punten geven de machtsstructuur $[1/2, 1/2, 0]$, $[1/2, 0, 1/2]$ of $[0, 1/2, 1/2]$ aan. Tenslotte hoort bij de lichtgrijze punten de structuur $[2/3, 1/6, 1/6]$, $[1/6, 2/3, 1/6]$ of $[1/6, 1/6, 2/3]$.

Twee paradoxale voorbeelden

Bij een unie van drie landen zijn de in de vorige paragraaf besproken vier machtsverdelingen de enig mogelijke verdelingen. De volgende twee voorbeelden laten zien dat de combinatie van de stemmenverdeling en het quotum tot paradoxale situaties kan leiden.

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	49	49	1	99
machtsindex	1/3	1/3	1/3	1

Tabel 5 quotum=50

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	8	8	7	23
machtsindex	1/2	1/2	0	1

Tabel 6 quotum=16

In het eerste voorbeeld hebben A en B bijna 50 keer zoveel stemmen als C. Bij een besluitvorming bij meerderheid hebben de drie partijen echter alle evenveel macht.

In het tweede voorbeeld hebben de drie landen alle bijna evenveel stemmen. Het quotum van 16 zorgt er echter voor dat C een dummy wordt.

Alvorens de situatie te bekijken voor 4 of meer landen besteden we nog even aandacht aan de blocking power of vetomacht. Wellicht is het mogelijk andere machtsstructuren te krijgen door een of meer landen een vetorecht te geven.

Vetomacht

Het toekennen van een vetorecht aan een of meer leden kan wellicht tot machtsstructuren aanleiding geven die bij een stemmenverdeling met quotum niet kunnen worden verkregen. Stel we geven de drie landen allemaal 5 stemmen en kennen bovendien aan het grootste land A een vetorecht toe. Tot welke machtsstructuur leidt dit bij een quotum van 9?

	A	B	C	totaal
	veto			
aantal stemmen	5	5	5	15
machtsindex	?	?	?	1

Tabel 7 quotum=9

Vanwege het vetorecht is voor de aanname van een voorstel altijd de steun van A nodig. De winnende coalities zijn hier derhalve AB, AC en ABC. Alhoewel B en C samen meer stemmen hebben dan het vereiste quotum is hun samenwerking vanwege het vetorecht van A niet voldoende om een voorstel te doen aannemen. Wel kunnen zij samen de aanname van een voorstel blokkeren. Bovendien heeft A de steun van minstens een van de andere partijen nodig. Men gaat gemakkelijk na dat dezelfde machtsstructuur ook opgaat voor de volgende stemmenverdeling zonder vetorecht.

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	3	1	1	5
machtsindex	2/3	1/6	1/6	1

Tabel 8 quotum=4

Bovendien zijn B en C samen in staat een voorstel te blokkeren en heeft A minstens een van de andere partijen nodig om een voorstel aangenomen te krijgen. Het systeem met vetorecht geeft dus dezelfde machtsstructuur als de bovenstaande verdeling. We vinden derhalve niets nieuws. De bovenstaande stemmenverdeling kunnen we op de volgende wijze vinden. Ken aan B en C 1 stem toe. Stel het quotum op q en geef A x stemmen. Aangezien de coalitie BC niet winnend is moet gelden $q > 2$. De coalities AB en AC zijn winnend en derhalve geldt $x + 1 \geq q$. Tenslotte heeft A een van de partijen B of C nodig voor een winnende coalitie waaruit volgt $x < q$. We zoeken nu gehele waarden van x en q die voldoen aan de bovenstaande ongelijkheden. Een van de mogelijke oplossingen wordt gegeven door $x = 3$ en $q = 4$.

Op deze wijze kunnen we elk systeem met vetorecht vertalen naar een zogenaamd gewogen stemreglement. In de veiligheidsraad van de Verenigde Naties hanteert men een reglement met vetorecht. De Veiligheidsraad van de VN bestaat uit 15 leden. China, Engeland, Frankrijk, Rusland en de Verenigde Staten zijn de zogenaamde permanente leden van de raad. De andere 10 leden hebben slechts gedurende een beperkte periode zitting in de raad.

Voor de aanname van een voorstel zijn 9 van de 15 stemmen nodig. De vijf permanente leden hebben echter een vetorecht. Een tegenstem van één van deze leden blokkeert de aanname van een voorstel. Om dit systeem te vertalen naar een gewogenstemreglement gaan we weer als volgt te werk. Ken aan de tien niet permanente leden een gewicht van 1 toe. Stel het gewicht van de permanente leden op x en het quotum op q. De vijf permanente leden tezamen met vier niet permanente leden vormen een winnende coalitie. Er geldt dus $5x+4 \geq q$. Anderzijds is een coalitie met minder dan 4 niet-permanente leden niet winnend dus geldt: $5x+3 < q$. Conclusie: $q = 5x+4$. Als één van de permanente geen deel uitmaakt van de coalitie is deze niet winnend, zelfs niet als alle niet permanente leden tot de coalitie behoren. Daaruit volgt dat $4x+10 < q = 5x+4$, dus $x > 6$. De kleinste gehele waarden voor x en q die hieraan voldoen zijn x=7 en q=39. Het is niet moeilijk om na te gaan dat het reglement met vetorecht gelijkwaardig is met het op deze manier gevonden gewogen stemreglement.

Voor de machtsverdeling binnen de veiligheidsraad mogen we dus uitgaan van een stemmenverdeling $(7, 7, \ldots 7, 1, 1 \ldots 1)$ en een quotum van 39.

Iedere gewogen systeem waarbij bovendien een aantal leden een vetorecht hebben, kan worden vertaald naar een simpel gewogen systeem. Zo kunnen we een vergadering van n personen waarvan k personen een vetorecht hebben en waarbij p stemmen nodig zijn voor de aanname van een voorstel, opvatten als een gewogen systeem. Ken aan de leden met vetorecht het gewicht $n+1$ en aan de andere leden een gewicht van 1 toe en stel het aantal stemmen nodig voor een geldige meerderheid op $kn+p$.

Een systeem met vetorecht geeft, zoals we hebben gezien, geen andere machtsstructuren dan gewogen stemreglementen.

De Shapley-Shubik-index

Bij een unie van drie landen geven de diverse stemmenverdelingen aanleiding tot 4 verschillende machtsstructuren, waarvan slechts 2 zonder dummy's. Als we het aantal landen in de unie uitbreiden, neemt ook het aantal mogelijke machtsstructuren toe. De volgende voorbeelden geven een aantal mogelijke machtsstructuren.

quotum=9	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	9	4	3	1	17
machtsindex	1	0	0	0	1

quotum=13	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	7	6	3	1	17
machtsindex	1/2	1/2	0	0	1

quotum=10	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	5	4	4	2	15
machtsindex	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Tabel 9 Machtsstructuren met 4 landen

De bovenstaande voorbeelden leveren weinig problemen op, maar hoe bepalen we de machtsstructuur in het volgende voorbeeld?

	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	7	4	3	1	15
machtsindex	?	?	?	?	1

Tabel 10 quotum=11

Om hier de machtsstructuur te vinden, introduceren we het begrip van de *spil* of *pivot*. Stel dat de coalitie ACB wordt gevormd in de aangegeven volgorde, dat wil zeggen C sluit zich aan bij A waarna B toetreedt tot de inmiddels gevormde coalitie AC. De aansluiting van C bij A geeft de coalitie AC weliswaar een sterkere positie maar winnend is ze nog niet, dat wil zeggen de coalitie heeft nog geen gekwalificeerde meerderheid. Pas na het toetreden van B wordt de coalitie winnend. In die zin is B de belangrijkste partij. Zo'n partij wordt de spil genoemd. Als we de coalitie vormen in de volgorde BCA dan wordt de coalitie pas winnend na de toetreding van partij A. In dit geval is partij A de spil. De macht van een partij wordt nu bepaald door de mogelijkheid om als spilpartij op te treden. Een dummy is in dit verband een partij die nooit een spilfunctie heeft. Voor het berekenen van de machtsindex schrijven we alle permutaties van de partijen of landen op. Vervolgens gaan we na hoe vaak een partij als spil optreedt. De index wordt dan berekend door het aantal malen dat een partij de spil is te delen door het totaal aantal permutaties van de partijen. Dat we de berekening uitvoeren over alle mogelijke permutaties reflecteert het feit dat we alle mogelijke coalities even waarschijnlijk achten. De op de bovenstaande wijze berekende index wordt de *Shapley-Shubik-index* genoemd [1]. De berekening van de index voor ons voorbeeld gaat als volgt.

A**B**CD	B**A**CD	CA**B**D	DA**B**C
A**B**DC	B**A**DC	CA**D**B	DA**C**B
AC**B**D	BC**A**D	CB**A**D	DB**A**C
AC**D**B	BCD**A**	CBD**A**	DBC**A**
AD**B**C	BD**A**C	CD**A**B	DC**A**B
AD**C**B	BDC**A**	CDB**A**	DCB**A**

In bovenstaande lijst hebben we alle vierentwintig permutaties opgeschreven. Het vetgedrukte land is in de volgorde de spil. Zoals uit de bovenstaande tabel is af te lezen is A 14 keer de spil terwijl dat aantal voor B gelijk is aan 6. C en D treden beide 2 keer als spil op. De Shapley-Shubik-indices zijn dus

$$m(A) = \frac{7}{12} \quad m(B) = \frac{3}{12} \quad m(C) = m(D) = \frac{1}{12}.$$

We zien dat de hier berekende machtsverhoudingen beduidend anders liggen dan de stemmenverhoudingen. De ene stem die B meer heeft dan C levert hem 3 keer zoveel macht op.

Een verandering van het quotum geeft ook hier weer een verschuiving van de macht. Als we besluiten bij meerderheid te stemmen geeft dat de volgende situatie.

A**B**CD	B**A**CD	C**A**BD	D**A**BC
A**B**DC	B**A**DC	C**A**DB	D**A**CB
A**C**BD	BC**A**D	CB**A**D	DB**A**C
A**C**DB	BC**D**A	CB**D**A	DB**C**A
A**D**BC	BD**A**C	CD**A**B	DC**A**B
A**D**CB	BD**C**A	CD**B**A	DC**B**A

De Shapley-Shubik-indices zijn nu gelijk aan

$$m(A) = \frac{12}{24} = \frac{3}{6}$$
$$m(B) = m(C) = m(D) = 4/24 = \frac{1}{6}.$$

In dit geval zijn de drie kleine partijen dus gelijkwaardig. De lezer kan gemakkelijk nagaan dat de machtsindices die we tot nu toe zijn tegengekomen overeenkomen met de Shapley-Shubik-index.

De Europese Gemeenschap

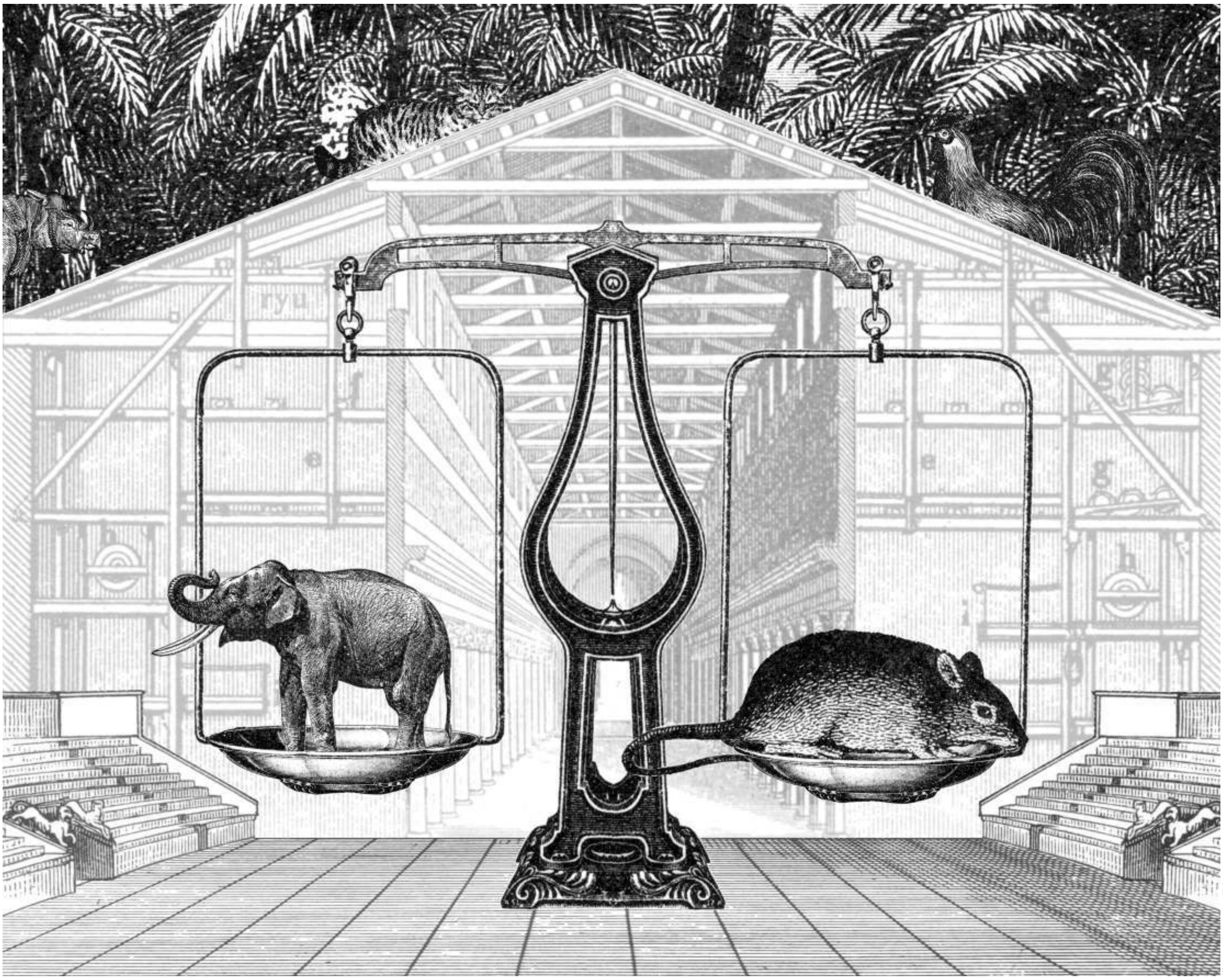
Bij de oprichting van de voorloper van de Europese Unie in 1958 werd in het verdrag van Rome de stemmenverdeling binnen de unie vastgelegd (zie tabel 11). Het quotum werd vastgesteld op 12 van de 17 stemmen.

Italië	4	Nederland	2
Frankrijk	4	België	2
Duitsland	4	Luxemburg	1

Tabel 11 Europese Unie 1958

Hoe groot is de Shapley-Shubik-index van Nederland bij deze verdeling? Nederland vervult een spilfunctie in een volgorde van landen als in die volgorde 10 of 11 stemmen aan Nederland voorafgaan.

In een volgorde met 10 voorafgaande stemmen staan België en twee van de grote lidstaten voor Nederland, en Luxemburg en de resterende grote staat achter ons land. Het totaal aantal permuta-



illustratie: Ryu Tajiri

ties dat hieraan voldoet, is $\binom{3}{2} \cdot 3! \cdot 2! = 36$. In een volgorde waarin 11 stemmen aan Nederland vooraf gaan, komt alleen een van de drie grote lidstaten na ons land. Dit levert $\binom{3}{2} \cdot 4! = 72$ mogelijke permutaties. In totaal is Nederland de spil in $36 + 72 = 108$ volgordes.

De Shapley-Shubik-index van Nederland is derhalve $108/720 = 3/20$. Uiteraard geldt hetzelfde voor België. Luxemburg kan in een volgorde alleen dan een spilfunctie vervullen als de aan Luxemburg voorafgaande landen tezamen precies 11 stemmen hebben. Daar alle landen behalve Luxemburg een even aantal stemmen hebben is dit onmogelijk. Met andere woorden, Luxemburg vervult nooit een spilfunctie en de Shapley-Shubik-index van Luxemburg is derhalve gelijk aan 0. De index voor de grote landen kan nu eenvoudig berekend worden als $(1 - 2 \cdot 6/20)/3 = 14/60$. In overzicht van de machtstructuur vindt men in tabel 12.

Land	Stemmen		Index	Percentage van de macht
Italië	4	23,5%	14/60	23,3
Frankrijk	4	23,5%	14/60	23,3
Duitsland	4	23,5%	14/60	23,3
Nederland	2	11,8%	9/60	15,0
België	2	11,8%	9/60	15,0
Luxemburg	1	5,9%	0	0

Tabel 12 Europese Unie 1958

Zoals uit tabel 12 blijkt, geeft de stemmenverdeling een redelijk beeld van de machtstructuur.

Bij de eerste uitbreiding van de Europese Unie in 1973 met drie landen besloot men tot de volgende stemmenverdeling.

Frankrijk	10	Nederland	5	Engeland	10
Italië	10	België	5	Denemarken	3
Duitsland	10	Luxemburg	2	Ierland	3

Tabel 13 Europese Unie 1973

Het quotum werd vastgesteld op 41 van de 58 stemmen. We merken op dat het aantal stemmen van de oorspronkelijke leden van de Unie met $2\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd is behalve voor Luxemburg dat slechts 2 keer zoveel stemmen kreeg toebedeeld. De onderlinge verhoudingen bleven dus gelijk met uitzondering van Luxemburg dat er wat op achteruitgaat. In 1973 werd het quotum gesteld op 70,7% van de stemmen hetgeen ongeveer gelijk is aan het quotum van 1958 dat uitkomt op 70,6% van de stemmen. Men mag verwachten dat door de toetreding van drie landen de macht van de oorspronkelijke leden enigszins verwatert. De berekening van de diverse indices is hier een tijdrovende bezigheid vandaar dat tabel 14 met behulp van een computer tot stand gekomen is [2].

In tabel 14 valt op dat de macht van Luxemburg, zoals gemeten door de Shapley-Shubik-index, is toegenomen. Dit komt omdat er in de nieuwe situatie minstens één volgorde van de landen is waarvoor Luxemburg de spil is. De macht van Luxemburg is toegenomen ondanks het feit dat Luxemburg er qua stemmenaantal relatief op achteruitgegaan is. Dit fenomeen staat in de literatuur bekend als de *nieuwe-ledenparadox*.

Land	Stemmen		Index
Frankrijk	10	17,9%	0,178571
Duitsland	10	17,9%	0,178571
Italië	10	17,9%	0,178571
Engeland	10	17,2%	0,178571
Nederland	5	8,6%	0,080952
België	5	8,6%	0,080952
Denemarken	3	5,2%	0,057143
Ierland	3	5,2%	0,057143
Luxemburg	2	3,4%	0,009524

Tabel 14 Europese Unie 1973

Machtsblokken

Met de uitbreidingen van de EU verwatert de macht van de individuele lidstaten. Hierdoor wordt het met name voor de kleine lidstaten aantrekkelijk om als één blok te opereren. Een dergelijke blokvorming heeft uiteraard gevolgen voor de machtsposities binnen de EU. We illustreren dit aan de hand van de situatie in 1973. Stel dat de Beneluxlanden een onderlinge afspraak maken om in de vergaderingen van de Unie als één blok te stemmen. Hoe verandert hierdoor de machtspositie van de drie Beneluxlanden? De situatie zou in dit geval worden als in tabel 15.

Land	Stemmen		Index	Percentage van de macht
Benelux	12	20,7%	88/420	21,0
Italië	10	17,2%	81/420	19,3
Frankrijk	10	17,2%	81/420	19,3
Duitsland	10	17,2%	81/420	19,3
Engeland	10	17,2%	81/420	19,3
Denemarken	3	5,2%	4/420	1,0
Ierland	3	5,2%	4/420	1,0

Tabel 15 Europese Unie 1973

De bundeling van de krachten van de Beneluxlanden leidt tot een gezamenlijke macht van 21% terwijl de landen tezamen een macht van 17% hadden. Zoals uit de tabel is af te leiden, gaat de samenwerking tussen de Beneluxlanden vooral ten koste van Denemarken en Ierland.

De Veiligheidsraad

Bij de oprichting van de Verenigde Naties en de instelling van de Veiligheidsraad in 1945 kwam men de volgende verdeling overeen. De raad zou bestaan uit vijf permanente leden met een vetorecht en zes niet permanente leden. Voor de aanname van een motie waren de vijf permanente leden en minstens twee niet permanente leden nodig. Een niet permanent lid kan derhalve alleen dan als spil optreden als het wordt voorafgegaan door de vijf permanente leden en één niet permanent lid. Een niet permanent is dus de spil in $\binom{5}{1} \cdot 6! \cdot 4! = 86400$ permutaties. Daar er 11! permutaties van de landen zijn, is de machtsindex van een niet permanent lid gelijk aan $(5 \cdot 6! \cdot 4!)/(11!) = 0,0022$. De totale macht van de niet permanente leden was in 1945 dus gelijk aan $6 \cdot 0,0022 = 0,0132$ terwijl de gezamenlijke macht van de permanente leden gelijk was aan $0,9868$.

Leden	Permanent lid	Tijdelijke leden
index	$0,1974$	$0,0022$

Tabel 16 Veiligheidsraad 1945

Om aan deze wel erg scheve verhouding een einde te maken, besloot de raad in 1965 op voorstel van een hervormingscommissie meer invloed toe te kennen aan de tijdelijke leden. Hiertoe werd het aantal niet permanente leden uitgebreid met vier leden. Voor de aanname van een motie waren nu behalve de vijf permanente leden minstens vier niet permanente leden nodig. De nieuwe samenstelling levert de volgende machtsverhoudingen op.

Leden	Permanent lid	Tijdelijke leden
index	$0,196$	$0,0018$

Tabel 17 Veiligheidsraad 1965

De totale macht van de niet permanente leden is van $0,0132$ gestegen tot $10 \cdot 0,0018 = 0,018$. De leden van de Algemene Vergadering waren zeer ingenomen met het voorstel van de hervormingscommissie!

Slotopmerkingen

In dit artikel hebben we een vaak gebruikte machtsindex besproken. Deze index kwantificeert op een formele wijze de macht die een partij kan uitoefenen. In de literatuur komen behalve de Shapley-Shubik-index nog enkele andere indices voor. Bekende indices zijn onder andere de Banzhaf-index, de Johnston-index en de Deegan-Packel-index. Welke van deze indices het beste de werkelijke macht van een partij reflecteert is niet zo eenvoudig te zeggen. Bij het onderzoek met betrekking tot machtsindices stelt men vaak vooraf een aantal eisen of axioma's op waaraan een goede index moet voldoen. Vervolgens gaan we na welke index aan de axioma's voldoet. Het blijkt echter dat zelfs een gering aantal voor de hand liggende axioma's tot een onmogelijkheid leidt. Deze situatie is vergelijkbaar met de onmogelijkheidsstelling van Arrow[7] uit 1951.

Noten en referenties

1 Martin Shubik en Lloyd Shapley zijn beide wiskundigen en economen met een grote verdienste op het gebied van de speltheorie.

2 Een programma voor het berekenen van diverse powerindices kan gevonden worden op www.uni-konstanz.de/FuF/Verwiss/koenig.

3 R.Bosch, 'Gewogen stemsystemen', *Euclides* 73-6, 1997/98

4 P.C. Ordeshook, *Game Theory and Political Theory*, Cambridge University Press, 1986

5 A. Rapoport, *N-person Game Theory*, Dover Publications Inc, 2001

6 D.G. Saari, *Chaotic Elections*, American Mathematical Society, 2001

7 J.W.S. Cassels, *Economics for mathematicians*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 62. Cambridge University Press, 1981.