

## Bernd Krauskopf

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit  
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam  
Department of Engineering Mathematics  
University of Bristol  
Bristol BS8 1TR, United Kingdom  
B.Krauskopf@bristol.ac.uk



Bernd Krauskopf

### Inaugurele rede

# Chaos en licht

Bernd Krauskopf is hoogleraar in de toegepaste niet-lineaire wiskunde aan de Universiteit van Bristol. Van 2001 tot 2006 is hij Advanced Research Fellow voor het Engineering and Physical Sciences Research Council (EPSRC). Op 1 september 2002 is hij benoemd tot bijzonder hoogleraar mathematische fysica aan de Vrije Universiteit. Zijn inaugurele rede, uitgesproken op 13 maart 2003, handelt over de rol die het vakgebied dynamische systemen speelt bij het ontrafelen van ingewikkelde dynamica van lasersystemen.

De moderne samenleving maakt steeds meer gebruik van licht, bijvoorbeeld voor het opslaan en lezen van data op cd's en voor het snel overdragen van grote hoeveelheden informatie door middel van glasvezels. In deze technische toepassingen wordt het benodigde licht gemaakt door halfgeleiderlasers — kleine, efficiënte lasers van nog geen millimeter groot. Wanneer deze lasers blootgesteld zijn aan externe optische invloeden, zoals reflecties aan een cd of glasvezel, kunnen zij zeer ingewikkeld gedrag vertonen, en dit houdt de mogelijkheid in dat het laserlicht chaotisch is!

Maar wat is chaotisch laserlicht en hoe ontstaat het? Deze vraag stond en staat centraal aan mijn onderzoek naar de niet-lineaire dynamica van halfgeleiderlasersystemen. Ik wil proberen u hier een indruk van te geven.

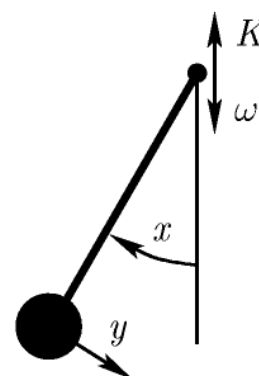
#### Chaos

Wat is chaos eigenlijk? U zult zelf wel een idee hebben wat chaos is. Het Van Dale woordenboek [17] definieert het woord 'chaos' als

“1) toestand van ongeordendheid of verwarring  $\Rightarrow$  wanorde, bende, rotzooi, ordeloosheid; 2) de ordeloze massa voor de schepping  $\Rightarrow$  baaierd.” Ik wil hier echter preciezer zijn en een indruk geven van wat men onder chaos verstaat in de theorie van dynamische systemen [18]: het gaat om *deterministische chaos*. Om dit begrip duidelijk te maken ga ik beginnen met een voorbeeld van een klassiek mechanisch systeem: de aangedreven slinger met wrijving [19].

Een aangedreven (geïdealiseerde) slinger is een massapunt aan een massaloze staaf die kan draaien rond een vast ophangpunt onder invloed van de zwaartekracht (zie figuur 1). Het is toegestaan dat de slinger over de kop gaat, vandaar dat hij niet aan een touw hangt maar aan een staaf. De slinger wordt periodiek aangedreven, bijvoorbeeld door het ophangpunt periodiek op en neer te bewegen met een amplitude  $K$  en een frequentie  $\omega$ . De toestand van dit systeem wordt bepaald door twee grootheden: de positie  $x$  van de slinger, die wordt gemeten als een hoek, en de

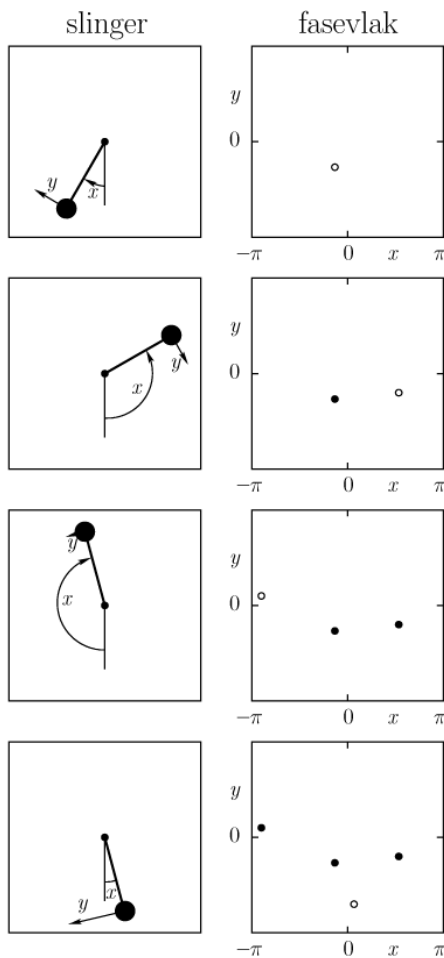
(hoek)snelheid  $y$  van de slinger, die is gegeven als de tijdsafgeleide van de positie. Door middel van Newtons wetten is het nu mogelijk een differentiaalvergelijking af te leiden die het gedrag beschrijft. Geschreven in de vorm van een vectorveld is dit dynamisch systeem gegeven door drie vergelijkingen (zie figuur 1): één voor de positie  $x$ , één voor de snelheid  $y$  en één voor de tijd  $t$  (die expliciet in de  $y$ -vergelijking voorkomt). De aange-



**Figuur 1** De aangedreven slinger wordt beschreven door het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -[1 + K \sin(\omega t)] \sin(x) - cy, \\ \dot{t} &= 1.\end{aligned}$$

Hierbij is  $x$  de positie,  $y$  de snelheid,  $K$  de amplitude van de aandrijving,  $\omega$  de frequentie van de aandrijving en  $c$  de hoeveelheid demping.



**Figuur 2** We laten een slinger los in een donkere ruimte en 'flitsen' het experiment met een stroboscopische lamp die precies de frequentie van de aandrijving heeft. Op dat moment noteren wij de positie  $x$  en de snelheid  $y$  van de slinger in het  $(x, y)$ -vlak, het zogenaamde fasevlak.

gedreven slinger is een voorbeeld van een *drie-dimensionaal continu dynamisch systeem*.

De twee hoofdparameters die gemakkelijk tijdens een experiment kunnen worden veranderd, zijn de amplitude  $K$  en de frequentie  $w$  van de aandrijving. De positieve parameter  $c$  geeft aan hoeveel wrijving de slinger onder vindt door de stroefheid van het medium waar hij doorheen beweegt.

In de afwezigheid van de aandrijving, dat wil zeggen voor  $K = 0$ , zal elke beweging van de slinger uitdampen naar de rustpositie: de slinger hangt uiteindelijk recht naar beneden.

De situatie is echter heel anders wanneer de slinger periodiek wordt aangedreven. Voor een juiste combinatie van amplitude  $K$  en frequentie  $\omega$  van de aandrijving vertoont de slinger chaotische dynamica.

Om dit zichtbaar te maken laten we de slinger los in een donkere ruimte en 'flitsen' we het experiment met een stroboscopische lamp die precies de frequentie van de aandrijving heeft —bijvoorbeeld telkens wanneer het

ophangpunt op zijn hoogste stand is. Op dat moment noteren wij de positie  $x$  en de snelheid  $y$  van de slinger in het  $(x, y)$ -vlak, het zogenaamde fasevlak. Van flits tot flits lijkt de slinger gek heen en weer te springen, net als een danser in een discotheek, en we noteren steeds meer punten in het fasevlak, zoals is te zien in figuur 2.

Als we meer en meer punten van deze stroboscopische procedure in het fasevlak noteren ontstaat er uiteindelijk een duidelijke structuur, namelijk de chaotische aantrekker in figuur 3.

Het gaat om een aantrekker omdat voor (bijna) elke begintoestand (positie  $x$  en snelheid  $y$ ) uiteindelijk hetzelfde plaatje verschijnt. De aangedreven slinger (en de bijbehorende aantrekker) is chaotisch in de volgende zin. Twee begintoestanden die willekeurig dicht bij elkaar liggen zullen tot tijdsevoluties leiden die er na verloop van niet al te lange tijd heel anders gaan uitzien. Dit gebeurt nadat in de ene evolutie de slinger net over de kop gaat terwijl dit in de andere evolutie niet gebeurt.

Omdat een begintoestand in de praktijk nooit met 100% zekerheid te bepalen is, betekent dit dat de aangedreven slinger als het ware onvoorspelbaar is. Desalniettemin is het systeem wel deterministisch: *dezelfde* begintoestand zal altijd *hetzelfde* gedrag tot gevolg hebben. Er is hier dus geen toeval in het spel, en toch is het gedrag van de slinger niet te voorspellen en *lijkt* het daarom toevallig!

Deze schijnbare tegenstrijdigheid is precies het kenmerk van deterministische chaos: de begintoestand bepaalt eenduidig het toekomstige gedrag, maar twee verschillende begintoestanden, hoe dicht bij elkaar dan ook, leiden na verloop van tijd tot totaal uiteenlopend gedrag. Men spreekt van *gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden*.

De ontdekking van chaotische dynamica gaat terug naar de Franse wiskundige Henri Poincaré. Hij toonde in 1889 aan dat chaotische dynamica mogelijk is in Newton's vergelijkingen voor drie of meer lichamen en won hiermee een internationale prijsvraag van koning Oscar II van Zweden over de stabiliteit van het heelal (zie [1], hoofdstuk 5). Dat zeer eenvoudige systemen, zoals een aangedreven slinger, chaotisch gedrag kunnen vertonen is een van de grote ontdekkingen van de laatste eeuw. Een belangrijke bijdrage hieraan werd in 1963 geleverd door de Amerikaanse meteoroloog Edward N. Lorenz, die gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden vond in een simpel model van de atmosfeer [20].

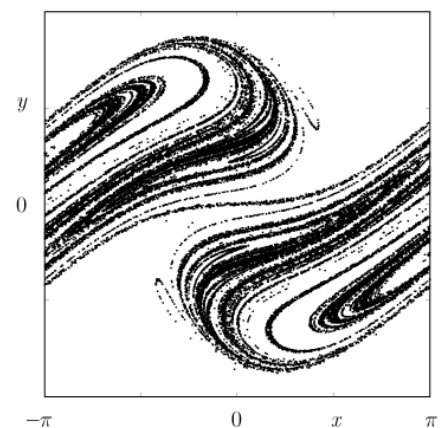
Dit wordt vaak verwoord door het inmiddels welbekende vlindereffect: een vleugelslag van een vlinder in Brazilië kan een onweersbui in Florida veroorzaken (zie [1], hoofdstuk 7). Het vlindereffect wordt nogal eens verkeerd geïnterpreteerd. Bijvoorbeeld wordt er niet bijgezegd dat een andere vlinder, waar dan ook ter wereld, deze onweersbui juist weer kan voorkomen.

Ook wat chaos en zijn bestudering inhoudt wordt helaas vaak verkeerd begrepen. Bijvoorbeeld definieert de Van Dale het woord 'chaostheorie' als "*wiskunde die de afwijking van empirische verschijnselen berekent ten opzichte van de voorspellingen daarvan door natuurwetten.*" Dit is jammer, want het was juist een belangrijke ontdekking dat *de natuurwetten zelf* chaos tot gevolg (kunnen) hebben. Ik ben trouwens geen liefhebber van het woord 'chaostheorie' en heb het liever over de theorie van dynamische systemen.

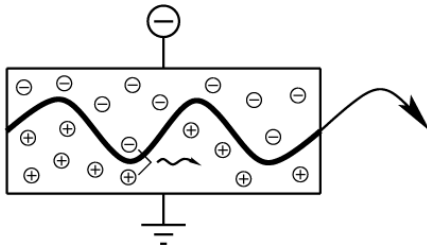
Het vakgebied dynamische systemen is vandaag de dag in ieder geval erg levendig. Hoewel er nog veel interessante theoretische vragen open zijn, kan men toch stellen dat de aandacht zich steeds meer is gaan richten op het bestuderen van ingewikkelde dynamica en chaos in toepassingen.

Dit komt vooral omdat onderzoekers in andere vakgebieden, zoals natuurkunde, biologie en ingenieurswetenschappen, zich meer en meer realiseren dat methoden uit de dynamische systemen veel te bieden hebben in onze niet-lineaire wereld. Bijvoorbeeld trok de conferentie *Applications of Dynamical Systems* van de Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM) in mei 2003 bijna 700 deelnemers [21].

Wat deze theorie bijzonder aantrekkelijk maakt is het feit dat het nu mogelijk is in detail uit te zoeken wanneer en hoe een systeem



**Figuur 3** Het resultaat van de procedure in figuur 2: een chaotische aantrekker van de aangedreven slinger.



**Figuur 4** Het halfgeleidermateriaal van een halfgeleiderlaser is aan een electriciteitsbron aangesloten waardoor elektron-gatparen ontstaan, die bij recombinitie elk een foton uitzenden. De twee uiteinden van de laser werken als spiegels die een deel van het licht terugkaatsen. Wanneer er voldoende elektron-gatparen worden aangemaakt, leidt dit tot een staande golf van heen en weer reflecterende fotonen die de elektron-gatparen stimuleert tot recombinitie. Er wordt coherent licht geproduceerd dat de laser verlaat door een van de spiegels.

chaotisch wordt wanneer parameters (bijvoorbeeld de amplitude van de aandrijving) worden veranderd. Ik wil hier een voorbeeld van geven.

**Laserlicht**

Tijdens de voorbereiding van deze rede heb ik ontelbare malen gebruik gemaakt van laserlicht, bijvoorbeeld voor het opslaan van informatie, het overhalen van bestanden via het internet en het uitprinten van de tekst op een laserprinter. Ik overdrijf niet als ik zeg dat het moderne leven haast onvoorstelbaar is zonder laserlicht, en u zult dan ook wel een of meerdere lasers thuis hebben, bijvoorbeeld in uw cd- of dvd-speler.

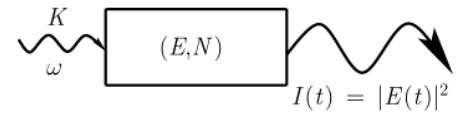
In de meeste gevallen wordt het laserlicht opgewekt door een halfgeleiderlaser, een kleine laser van ongeveer 1 mm lengte die gemaakt is van halfgeleidermateriaal op een siliciumschijf, net als een microchip voor computers. Zoals geschetst is in figuur 4 is het halfgeleidermateriaal aan een electriciteitsbron aangesloten en daardoor ontstaan elektron-gatparen, die bij recombinitie elk een foton uitzenden. De twee uiteinden van de laserwerken als spiegels die (een deel van) het licht terugkaatsen. Wanneer er voldoende elektron-gatparen worden aangemaakt, leidt dit tot een staande golf van heen en weer reflecterende fotonen die de elektron-gatparen stimuleert tot recombinitie. Er wordt coherent licht geproduceerd dat de laser verlaat door een van de spiegels. Men spreekt van *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, vandaar de naam *laser*[7].

Halfgeleiderlasers zijn efficiënt, en zo klein dat deze zich gemakkelijk laten inbouwen in allerlei technische apparaten. Hun belangrijkste toepassingen op dit moment zijn dataopslag en telecommunicatie via glasvezels.

Halfgeleiderlasers hebben echter ook een

paar eigenschappen die vaak vervelend zijn in toepassingen. Omdat het halfgeleidermateriaal zeer efficiënt is, worden spiegels gebruikt die typisch maar 30% van het licht reflecteren. Met andere woorden, maar liefst 70% van het licht wordt doorgelaten. Daarom zijn halfgeleiderlasers gevoelig voor externe optische invloeden, zoals het licht van een ander laser, of hun eigen licht dat na reflectie aan bijvoorbeeld een cd weer in de laser terecht komt. Het halfgeleidermateriaal zelf heeft bovendien een zeer niet-lineair gedrag: wanneer de lichtsterkte toeneemt, verandert de frequentie sterk —de laser ‘zingt vals’.

Door de combinatie van deze eigenschappen zijn halfgeleiderlasers zeer interessante dynamische systemen. Bijna elk interessant fenomeen in de theorie van dynamische systemen, en dit houdt ook chaotisch gedrag in, kan men vinden in een of ander lasersysteem [9]. Aan de andere kant heeft de wiskundige theorie van dynamische systemen, met name de *bifurcatietheorie*[22] —de studie naar kwalitatieve veranderingen van de dynamica— veel te bieden wanneer het gaat om het ontrafelen van ingewikkelde dynamica van lasersystemen. Halfgeleiderlasers opereren namelijk op zulke korte tijdschalen dat het (vandaag de dag) onmogelijk is om hun intensiteit als functie van de tijd direct te meten. Daarom kunnen alleen optische spectra gemeten worden, en dat maakt het moeilijk om een onderscheid te maken tussen verschillende, gecompliceerd gedrag van de laser. Hier moet de theorie uitkomst bieden.



**Figuur 6** Een wiskundig model voor een injectielaser wordt gegeven door het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{E} = K + \left[ \frac{1}{2}(1 + i\alpha)N - i\omega \right] E,$$

$$\dot{N} = -2\Gamma N - (1 + 2BN)(|E|^2 - 1).$$

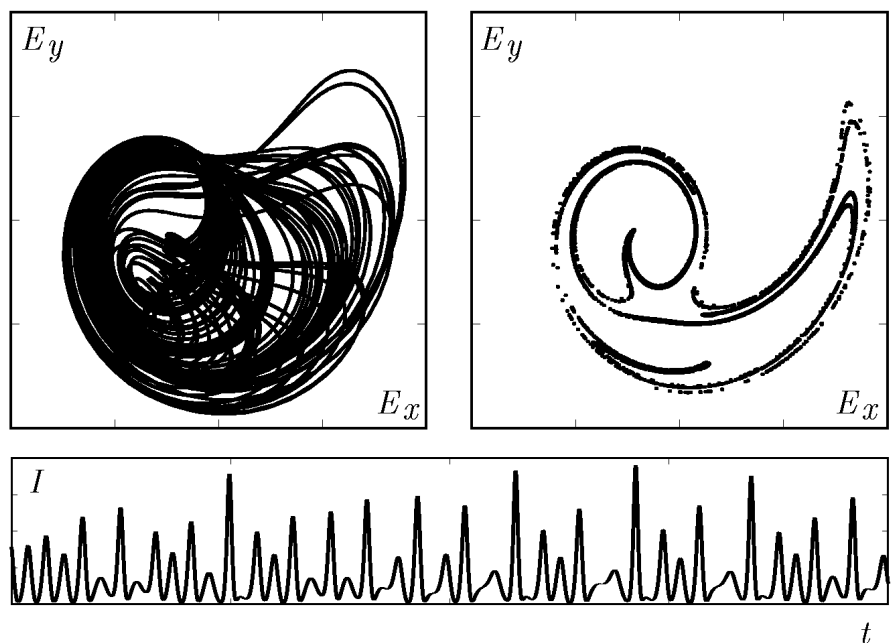
Hierbij is  $E$  het complex-electrische veld,  $N$  de inversie,  $K$  de sterkte van het geïnjecteerde licht,  $\omega$  de frequentie van het geïnjecteerde licht, en  $\alpha, \Gamma, B$  zijn materiaaleigenschappen van de laser.

**Chaotisch laserlicht**

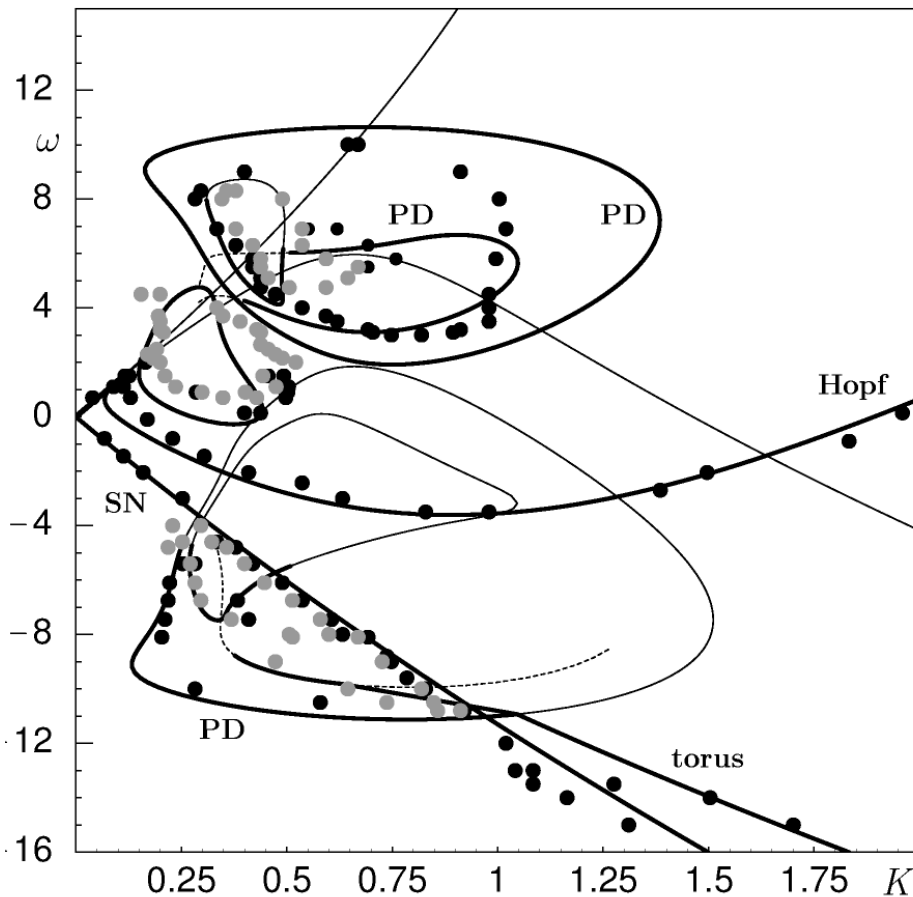
Als voorbeeld van een chaotische laser wil ik een klassiek lasersysteem bespreken: de *injectielaser* —een halfgeleiderlaser met optisch geïnjecteerd licht van sterkte  $K$  en frequentie  $\omega$  [14]. (Ik merk even op dat ‘klassiek’ in de laserdynamica betekent dat dit systeem wordt bestudeerd sinds de jaren 80.)

Evenals de aangedreven slinger kan de injectielaser worden gemodelleerd door een stelsel differentiaalvergelijkingen; zie figuur 6. In dit geval is er één voor het complexe *electricisch veld*  $E$  en één voor het aantal electron-gatparen  $N$ , ook wel de *inversie* genoemd. Het inkomende licht heeft invloed op het electricisch veld  $E$  via de experimenteel veranderbare parameters  $K$  en  $\omega$ . De andere parameters  $\alpha, \Gamma$  en  $B$  beschrijven materiaaleigenschappen van de laser en blijven onveranderd tijdens een experiment. De laserintensiteit  $I$  van het laserlicht is gegeven als  $|E|^2$ .

Wat is nu het gedrag van dit model van de injectielaser? In de afwezigheid van



**Figuur 5** De chaotische aantrekker van de injectielaser bovenaan leidt tot een chaotische tijdreeks van de intensiteit.



**Figuur 7** Bifurcatiekrommen en meetpunten in het  $(K, \omega)$ -vlak van de injectielaser (reprinted from [15], Copyright (2002) by the American Physical Society).

geïnjecteerd licht, dus voor  $K = 0$ , gedraagt de halfgeleiderlaser zich net als de (onaangedreven) slinger: onafhankelijk van de begintoestand dempt de dynamica uit naar een vaste toestand van het systeem, namelijk het produceren van laserlicht van een vaste intensiteit. (Ik veronderstel hier dat de laser daadwerkelijk aan is zonder geïnjecteerd licht.)

Echter, voor de juiste waarden van amplitude  $K$  en frequentie  $\omega$  is de laser chaotisch, dat wil zeggen, de intensiteit  $I$  van het laserlicht schommelt op en neer op een chaotische en onvoorspelbare manier, zoals is te zien in de tijdreeks onderaan in figuur 5. Hier hoort de chaotische aantrekker linksboven bij, die nogal lijkt op een garenklosje en hier geprojecteerd is op het complexe  $E$ -vlak. De afstand van een punt op deze baan tot de oorsprong van het complexe vlak in het kwadraat geeft de intensiteit van het laserlicht.

Om een betere indruk te krijgen van de structuur van de aantrekker kijken wij naar zijn doorsnijding met het vlak waar de inversie gelijk is aan nul. Dit levert de wolk punten rechtsboven in figuur 5 op: een chaotische aantrekker waar punten op heen en weer

springen. Het kijken naar de gereduceerde dynamica in een goed gekozen vlak is een constructie die teruggaat naar Poincaré. Het analogon hiervan voor de aangedreven slinger is de besproken stroboscopische procedure. De structuur van de zo verkregen aantrekker is typisch voor een chaotische tweedimensionale afbeelding.

De vraag is nu: voor welke waarden van  $K$  en  $\omega$  vindt men chaos? Of nog beter: maak een plattegrond in het  $(K, \omega)$ -vlak van de gebieden van verschillend gedrag, chaotisch of niet, van het model van de injectielaser. En tenslotte is er nog een belangrijke vraag: Hoe goed komt deze plattegrond overeen met experimentele resultaten?

Deze vragen kunnen worden beantwoord met het, toegegeven, vrij ingewikkelde plaatje van het  $(K, \omega)$ -vlak in figuur 7. Het is het resultaat van een samenwerking over de laatste vier jaren met Daan Lenstra en Sebastian Wieczorek aan de Vrije Universiteit, en met de experimentator Tom Simpson van Jaycor in San Diego. Deze resultaten, betreffende de overeenkomst tussen theorie en experiment en hier samengevat in figuren 7 en 8, zijn ge-

publiceerd in [15–16].

De krommen geven grenzen aan tussen gebieden met verschillend gedrag van het lasermodel. Om zo een kromme te verkrijgen moet men eerst een waarde van  $K$  en  $\omega$  vinden waar de dynamica kwalitatief verandert, een *bifurcatie* genoemd. Dit is een punt op de grens tussen twee gebieden in het  $(K, \omega)$ -vlak. Het is vervolgens mogelijk om de bijbehorende grens- of bifurcatiekromme tussen deze twee gebieden te volgen met behulp van normaalvormtheorie in combinatie met gespecialiseerde computerprogramma's. Dit levert dan een sluitend beeld op van het gedrag van een gegeven dynamisch systeem, in dit geval van het model van de injectielaser.

Verschillende krommen staan voor verschillende types bifurcaties. Wanneer krommen dikker zijn getekend gaat het om bifurcaties van aantrekkers, en die zijn direct in een experiment terug te vinden.

De experimentele meetpunten zijn opgenomen tijdens zeer nauwkeurige metingen van optische spectra van een zogeheten *distributed feedback* laser met optische injectie. Een grijs punt geeft aan dat de gemeten spectra een overgang naar ingewikkeld gedrag van de laser, waarschijnlijk chaos, laten zien.

De overeenkomst tussen theorie en experiment is opvallend goed over een heel groot gebied van het  $(K, \omega)$ -vlak. Ik wil hier benadrukken dat het theoretische plaatje niet 'geoptimaliseerd' is, maar dat vaste waarden voor de laserparameters  $\alpha$ ,  $\Gamma$  en  $B$  zijn gebruikt, zoals door Tom Simpson gemeten aan zijn gebruikte laser.

Er zijn verschillende gebieden waar de laser chaotisch is. In feite was het mogelijk bepaalde overgangen naar chaos te voorspellen die vervolgens daadwerkelijk in het experiment gemeten konden worden.

Een voorbeeld hiervan is een plotselinge overgang van en naar chaos, die is weergegeven in figuur 8. De linker kolom toont de experimentele optische spectra van steeds twee opeenvolgende metingen, en de middelste kolom de berekende spectra van het model. Het eerste spectrum is van chaotisch gedrag: het spectrum bevat als het ware alle frequenties tegelijk, een veelgebruikt kenmerk van chaos. Het tweede spectrum is genomen bijna op het moment van bifurcatie, en men ziet dat er pieken verschijnen bij bepaalde frequenties. Ook is er plotseling een verschil tussen de twee achterelkaar gemeten spectra, hetgeen een verandering van het gedrag van de laser aankondigt. Het derde spectrum, tenslotte, is helemaal anders en toont alleen maar pieken op een paar vaste frequenties.

De laser produceert hier licht van een periodiek veranderende intensiteit.

De rechter kolom in figuur 8 laat zien wat het gedrag is van de bijbehorende aantrekker. Deze bifurcatie is dus een dramatische overgang van een chaotische aantrekker naar een periodieke baan (die het gekozen vlak in twee punten doorsnijdt), of andersom.

De goede overeenstemming tussen theorie en experiment voor dit lasersysteem is nogal opmerkelijk en ligt niet voor de hand. Tijdens de afleiding van het model van de injectielaser zijn namelijk nogal wat aannames gemaakt. Bijvoorbeeld wordt alle ruimtelijke dynamica van het elektrisch veld en de inversie in de laser zelf verwaarloosd. Verder wordt de spontane emissieruis in de laser, een altijd aanwezig element van toeval net als radioactief verval, niet meegenomen. Het model is dus volledig deterministisch, terwijl een echte laser dit nooit is.

Ondanks deze bedenkingen is gebleken dat het mogelijk is met methoden uit de theorie van dynamische systemen niet alleen kwalitatieve maar ook kwantitatieve voorspellingen te doen over het gedrag van dit lasersysteem.

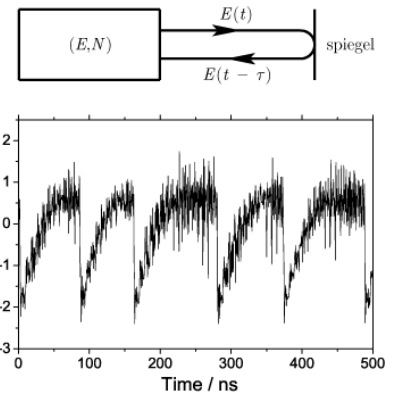
**Enkele vooruitzichten**

U vraagt zich nu misschien af wat er eigenlijk nog te doen valt in de komende jaren op het gebied van de niet-lineaire dynamica van

lasersystemen? Door verworven kennis in een nette vorm te presenteren kan gemakkelijk de indruk ontstaan dat alles al gedaan is en men beter op een ander gebied kan gaan werken. Helaas heeft de wiskunde veel last van dit effect. Alles lijkt al door de oude Grieken of uiterlijk in de 19de eeuw te zijn bedacht. Ik weet eerlijk gezegd zelf niet zo goed waarom ik uiteindelijk voor wiskunde heb gekozen, maar één reden was zeker dat er op school in latere jaren wel degelijk uitdagingen werden gepresenteerd en niet alleen feiten. Ik wil hier dan ook een korte indruk geven van een paar uitdagingen.

Ik heb het gehad over het, wiskundig gezien, eenvoudigste geval van een lasersysteem dat goed beschreven wordt door een dynamisch systeem van een lage dimensie. Zoals is gebleken is dit systeem al verbazingwekkend ingewikkeld, maar men kan wel bestaande methoden toepassen. Het gaat als het ware om het uitzoeken van een ingewikkelde puzzel. Ik merk wel op dat sommige puzzelstukjes nog niet bekend zijn: bepaalde bifurcaties die in de injectielaser optreden zijn theoretisch nog niet uitgezocht. (Een ervan is onderwerp van een onderzoeksproject in Bristol.)

Een belangrijk en spannend onderzoeksgebied op dit moment is de dynamica en het soort chaos dat men kan vinden in halfgeleiderlasers met optische terugkoppeling [23].



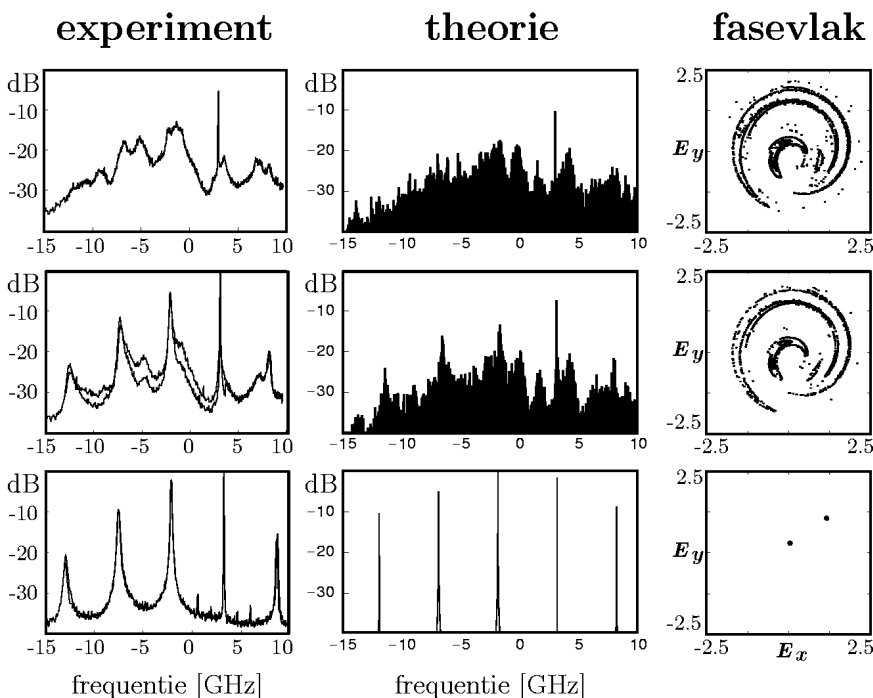
**Figuur 9** De laser met optische terugkoppeling; de tijdreeks is gemeten door Ingo Fischer aan de Technische Universität Darmstadt.

In het eenvoudigste geval 'ziet' een laser met enige vertraging zijn eigen licht na reflectie aan een externe spiegel, zoals is te zien in figuur 9. Dit is een lasersysteem van groot technisch belang omdat reflecties kunnen optreden in cd-spelers of bij het inkoppelen van laserlicht in glasvezels. Het is allang bekend dat zelfs een terugkoppeling van minder dan 1% van het uitgezonden laserlicht tot ingewikkelde dynamica kan leiden: de laser gaat op onregelmatige afstanden helemaal uit en dan geleidelijk weer aan, tot hij zijn maximale intensiteit weer heeft bereikt. Dit is duidelijk te zien in de tijdreeks in figuur 9 die is gemeten door Ingo Fischer met een 1 GHz oscilloscoop. In verwijzing naar de Griekse mythologie spreekt men ook van het *Sisyphus effect*, zie [13] en [9], hoofdstuk 5.

Andere lasersystemen met terugkoppeling zijn lasers met fasegeconjugeerde of optoelectronische terugkoppeling, of lasers die onderling verbonden zijn en elkaars licht ontvangen. Echter, het effect van terugkoppeling is ook erg in de belangstelling binnen andere gebieden van toepassingen, zoals in de regeltheorie, de biologie en de scheikunde.

Het is een van de grote open problemen om in detail te begrijpen hoe halfgeleiderlasersystemen zich gedragen afhankelijk van de hoeveelheid teruggekoppeld licht en andere parameters.

Wiskundig leidt terugkoppeling tot een beschrijving van het systeem door een differentiaalvergelijking met vertraging, oftewel een *delay-vergelijking*. Delay-vergelijkingen hebben een oneindig-dimensionale faseruimte: het is niet genoeg om de toestand op dit moment te kennen, men moet ook het stuk van het verleden kennen tot en met de delay-tijd geleden. Daardoor kunnen delay-vergelijkingen zeer ingewikkeld gedrag vertonen. Ook de wiskundige analyse is veel moei-



**Figuur 8** Spectra bij een overgang van en naar chaos in de injectielaser (reprinted from [16], Copyright (2003), with permission from Elsevier).

lijker dan voor eindig-dimensionale dynamische systemen [2, 6].

Gelukkig is er recentelijk heel wat gebeurd, met name op het gebied van geavanceerde software voor de bifurcatieanalyse van delay-vergelijkingen [24]. Lasers met terugkoppeling spelen hier een belangrijke rol als motivatie, maar ook als testvoorbeelden. Ik verwacht veel activiteit op dit gebied in de volgende jaren en zal zelf betrokken zijn bij projecten in Bristol en op de VU. Hier gaat het zowel om het verder ontwikkelen van de methodes als om het uitzoeken van de dynamica van concrete lasersystemen, liefst weer in samenwerking met experimentatoren.

Een ander gebied dat veel belangstelling trekt, is de dynamica van andere types lasers, in het bijzonder *vertical cavity surface emitting lasers*, oftewel VCSEL's. Voor deze lasers is de plaatselijk uitgebreide dynamica binnen de laser erg belangrijk, en dit leidt tot

wiskundige modellen in de vorm van partiële differentiaalvergelijkingen. Ook deze modellen hebben een oneindig-dimensionale fase-ruimte met alle problemen van dien, zie [9], hoofdstukken 7 en 14.

Ik hoop dat ik u kon overtuigen dat dit een uitstekend moment is voor onderzoek naar de dynamica van lasersystemen. Ik zal er natuurlijk hier op de VU en ook in Bristol verder mee doorgaan. Maar ik hoop ook nieuwe jonge onderzoekers voor de dynamica van lasers, en voor dynamische systemen en mathematische fysica in het algemeen, te kunnen winnen. Goede, ambitieuze en enthousiaste mensen kunnen direct aan de slag —leuke projecten zijn er in ieder geval genoeg. Het is weliswaar niet altijd gemakkelijk om de geldschieters hiervan te overtuigen, maar er zijn best mogelijkheden, zeker voor het financieren van promotieonderzoek. Zoals velen van u misschien wel weten lijkt het op dit moment

moeilijker om goede promovendi te vinden dan promotieplaatsen.

De theorie van dynamische systemen is abstract in de positieve zin. Het maakt bijvoorbeeld niet uit of men een bepaalde bifurcatie vindt in een lasersysteem, een biologisch systeem of een model van een chemische reactie. De ideeën en methoden zijn hetzelfde. Verder is deze theorie behoorlijk meetkundig: het is mogelijk een gevoel te ontwikkelen voor wat men kan verwachten aan dynamisch gedrag. Het is mijn ervaring dat dit veel studenten aanspreekt, ook studenten die eigenlijk altijd een beetje bang waren voor abstractie.

Dit is een echte kans om studenten te interesseren voor de wiskunde. Het is weliswaar flink wat werk om de theorie te leren, maar daar staat tegenover de kracht van de verworven methoden voor de studie van welk dynamisch systeem dan ook! Ik hoop dat u mij deze lichte overdrijving zult vergeven. ☞

## Referenties

- H.W. Broer, J. van der Craats, F. Verhulst, *Het einde van de voorspelbaarheid?*, Aramith Uitgevers en Epsilon Uitgaven 1995.
- O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.O. Walthers, *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag 1995.
- K. Engelborghs, T. Luzyanina, G. Samaey, *DDE-BIFTOOL v2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations*, <http://www.cs.kuleuven.ac.be/~koen/delay/ddebiftool.shtml>
- J. Gleick, *CHAOS: Making a New Science*, Viking Press 1987.
- J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag 1983.
- J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag 1993.
- J. Hecht, *Laser Pioneers*, Academic Press 1992.
- B. Krauskopf, K. Green, Computing unstable manifolds of periodic orbits in delay differential equations, *J. Comp. Phys.* **186** (2003) p. 230–249.
- B. Krauskopf, D. Lenstra (Eds.), *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*, AIP Conference Proceedings **548**, AIP Publishing 2000.
- Yu.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag 1995.
- E.N. Lorenz, 'Deterministic nonperiodic flow', *J. Atmospheric Science* **20** (1963) p. 130–141.
- S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus 1994.
- G.H.M. van Tartwijk, A.M. Levine, D. Lenstra 'Sisyphus effect in semiconductor lasers with optical feedback', *IEEE J. Quant. Electronics* **1**(2) (1995) p. 466–472.
- S. Wiczorek, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection', *Optics Commun.* **172**(1-6) (1999) p. 279–295.
- S. Wiczorek, T.B. Simpson, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'Global quantitative predictions of complex laser dynamics', *Phys. Rev. E* **65**(4) 045207(R) (2002).
- S. Wiczorek, T.B. Simpson, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'Bifurcation transitions in an optically injected diode laser: theory and experiment', *Optics Commun.* **215**(1-3) (2003) p. 125–134.
- <http://www.blindsupport.be/vandale.htm>
- Een Nederlandse inleiding op algemeen niveau is [1]; een vakboek is bijvoorbeeld [12].
- De aangedreven slinger wordt in bijna elk boek over dynamische systemen besproken, bijvoorbeeld ook in [1, 12].
- Het originele artikel van Lorenz is [11]; zie ook het verhaal van zijn ontdekking in [4].
- <http://www.siam.org/meetings/dso3>
- Hoofdstuk 1 in [9] is een inleiding in de meest belangrijke bifurcaties; vakboeken zijn bijvoorbeeld [5, 10].
- Zie hoofdstukken 5 en 11 in [9] voor een inleiding in de dynamica van een halfgeleiderlaser met optische terugkoppeling
- De belangrijkste ontwikkeling is het beschikbaar komen van het pakket DDE-BIFTOOL [3] voor de bifurcatieanalyse van delay-vergelijkingen. Het is nu ook mogelijk om zogenaamde een-dimensionale globale variëteiten te berekenen [8].