

## Ger Koole

Faculteit der Exacte Wetenschappen,  
Afdeling Wiskunde,  
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081 a,  
1081 HV Amsterdam  
koole@cs.vu.nl

## Alex van den Brandhof

Vossiusgymnasium,  
Messchaertstraat 1,  
1077 WS Amsterdam  
alex@pythagoras.nu

# Het wiskunde B1,2-examen

Sinds de invoering van de nieuwe Tweede Fase in het middelbare onderwijs volgen alle leerlingen van het vwo één of meer wiskunde vakken. Er zijn vier profielen waar de leerlingen uit kunnen kiezen: cultuur en maatschappij, economie en maatschappij, natuur en gezondheid en natuur en techniek. Voor het profiel natuur en gezondheid is het vak wiskunde B1 bedoeld en voor het profiel natuur en techniek wordt het vak wiskunde B1,2 gegeven. Op donderdag 22 mei werden voor het vwo de examens wiskunde B afgenomen. Wat vonden de vwo-ers ervan? Ger Koole en Alex van den Brandhof interviewden leerlingen van het Amsterdamse Vossiusgymnasium over het examen. Ger Koole is hoofdredacteur van dit blad en Alex van den Brandhof is wiskundeleraar aan het Vossiusgymnasium en eindredacteur van het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras.

Wiskunde B is onderdeel van de profielen Natuur en Techniek (NT) en Natuur en Gezondheid (NG). Beide bevatten wiskunde B1, Natuur en Techniek tevens wiskunde B2. Vossiusleerling Arie Peterson karakteriseert het verschil als volgt: "B2 is heel anders, hele andere wiskunde. Het is creatiever. B1 is veel invullen, algemene handigheid. Je weet steeds waar je naar toe moet werken. Dat is niet zo bij de wiskunde B2. Bij bewijsvragen moet je echt zoeken."

De examens wiskunde B1 en B1,2 vonden gelijktijdig plaats. Ze bestaan respectievelijk uit zes en zeven opgaven, elk onder-

verdeeld in een of meerdere vragen. De examens hebben drie gemeenschappelijke opgaven (*Zomertarwe*, *Osteoporose* en *Twee scharnierende vierkanten*). Deze opgaven bevatten typische B1-vragen. De overige opgaven van het B1,2-examen (*Periodiek*, *Conflict tussen twee punten en een lijn*, *Twee ellipsen met een gemeenschappelijk brandpunt*, *Constante booglengte*) zijn karakteristieke B2-opgaven.

We hebben enkele leerlingen NT en NG direct na afloop van het examen gevraagd wat zij van de examens vonden. De algemene teneur was positief bij NT-leerlingen, alhoewel men het soms wel wat veel vond. NG-leerlingen vonden het beduidend moeilijker.

Mareijn Willems (NT): "Het examen was wel te doen." Samir Ourahma (NT): "Ik vond het veel." Armelle Verrips (NG): "Het was erg moeilijk." H el ene Smits (NG): "Ik wist op alles wel wat in te vullen: een antwoord dat zou kunnen kloppen." Bo Blanckenburg (NT): "Er zaten een heleboel dingen in die je even moet zien. Als je niet het ene kleine stapje bedenkt waar je mee moet beginnen, kan je het niet maken. Dat is een beetje oneerlijk." Maarten van het Reve (NT): "Het examen was goed te doen, het was aanzienlijk gemakkelijker dan de schoolonderzoeken." Victoria Lazic (NT): "De bewijsommen waren goed te doen."

### Een foute vraag in het examen

In de eerste opgave van het B1,2-examen, *Periodiek*, is een fout geslopen in de tekst boven

de derde vraag. De Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven (CEVO) heeft daarom besloten elke kandidaat voor deze vraag vijf punten te geven. Waren de studenten uit het veld geslagen door deze misser? Jochem Kaas (NT): "Het verhaaltje voor vraag drie is gewoon niet waar. De daaropvolgende term is dan 1. Je kon de vraag verder wel maken." Samir Ourahma: "Deze opgave viel wel mee, behalve het einde ervan."

De tweede opgave, *Zomertarwe*, kwam in beide examens voor. Anders dan vroeger bevat het wiskunde B-examen contextrijke opgaven. *Zomertarwe* is daar een voorbeeld van. Helaas is de context weinig realistisch: je verwacht een differentieerbare functie voor de groeisnelheid. Tevens is de formulering niet helder en kan tot verwarring aanleiding geven. Dorota Hempel (NG): "Deze opgave was een beetje onduidelijk, want de ene vraag ging over de snelheid van het groeien van de planten, de andere over het gewicht." Arie Peterson: "Het getal  $a$  vind je door te differentiëren en  $b$  kun je dan berekenen door nul in de vergelijking in te vullen." Bo Blanckenburg: "Vraag acht bouwde voort op vraag zeven. Als je vraag zeven niet goed hebt gedaan, kan je vraag acht ook niet doen, en dus vraag negen ook niet." Arie Peterson: "Ik vraag me af of je vraag negen algebraïsch of numeriek moet doen. Deze hele opgave is lastig. Je moet goed opletten dat je de juiste formule gebruikt. Flink wat rommelen."

De opgave *Conflict tussen twee punten en een lijn* kwam alleen in het wiskunde B1,2-

examen voor en leverde weinig problemen op. Bo Blanckenburg: "Dit is echt peanuts."

Strikt genomen is de tekst bij de volgende gemeenschappelijke opgave, *Osteoporose*, ook niet juist geformuleerd. Doordat er "bij een aantal vrouwen osteoporose geconstateerd wordt", is hier sprake van een voorwaardelijke kans: er zijn zeker meer dan nul vrouwen met osteoporose. Met name bij vraag 13 heeft dit consequenties. Dit was niet de bedoeling van de vraag. De examenkandidaten hebben zich hier echter niet door laten misleiden. Mareijn Willems: "Ik heb stomme fouten gemaakt, ik wist de formule voor de binomiale verdeling niet meer. Hij stond wel op de formulekaart, maar dat wist ik niet." Arie Peterson: "De kansberekeningvraag over osteoporose vond ik lastig omdat je jezelf heel moeilijk kan controleren. Je hebt geen idee of je het goed doet of niet." Dorota Hempel: "Opgaven met kansrekening zijn altijd wel te doen, maar vraag 16 was heel onduidelijk, ik wist niet wat die risicogroep betekende."

Leah Goudsmit (NG): "Ik ben slecht in wiskunde. Kansberekening vind ik het gemakkelijkste onderdeel. Bij kansberekening kan je alles invullen."

De opgave *Twee scharnierende vierkanten* is ook wat slordig geformuleerd. Vraag 15 had als volgt gesteld moeten worden: "Toon aan dat de formule geldt voor elke waarde van  $t$  tussen 0 en  $\frac{1}{2}\pi$ ." Arie Peterson: "Deze opgave was goed te doen, voor de tekenvraag hoefde je geloof ik alleen maar te spiegelen, dat was heel makkelijk." Leah Goudsmit: "In elke opgave zat wel een bewijsvraag. Bij deze opgave ook. Het B1-examen had daardoor een hoog B2-gehalte." Dorota Hempel: "De afgeleide nemen bij vraag 17 ging wel, maar ik kwam niet uit op 3." Samir Ourahma: "Vraag 17 vond ik heel gemakkelijk."

### Bewijsommen

De laatste twee opgaven, *Twee ellipsen met een gemeenschappelijk brandpunt* en *Constante booglengte*, waren typische wiskun-

de B2-bewijsommen. De leerlingen waren opvallend positief over deze opgaven. Samir Ourahma: "Opgave 18 was best lastig, 19 vond ik wel meevallen. Het ziet er overigens wel ingewikkeld uit. Allemaal rare lijntjes." Bo Blanckenburg: "Vraag 18 en 19 heb ik allebei wel goed. Die heb ik toevallig allebei gezien. Dat is wel vet." "Hoe meer lijntjes, hoe meer je kan prutsen. Als je maar weinig lijntjes hebt, raak je snel vast, als je het niet meteen ziet." Mareijn Willems: "Ik was niet op tijd klaar, daardoor heb ik vraag 19 niet kunnen maken. Maar ik weet niet of ik hem anders had gekund." Arie Peterson: "Ik vond het jammer dat er geen limieten in zaten, dat hebben we uitgebreid geoefend." H  l  ne Smits: "De dingen die je kon controleren, heb ik allemaal wel goed."

Slechts twee van de leerlingen die hier aan het woord zijn geweest, zijn al ingeschreven voor een vervolgstudie. Twee leerlingen overwegen wiskunde te gaan studeren. ◀



De aula van het Vossiusgymnasium na afloop van het examen wiskunde B


**Examen VWO**

Vorbereidend  
Wetenschappelijk  
Onderwijs

20 | **03**

Tijdvak 1  
Donderdag 22 mei  
13.30 – 16.30 uur

**Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 10, 11, 15, 16, 18 en 19 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

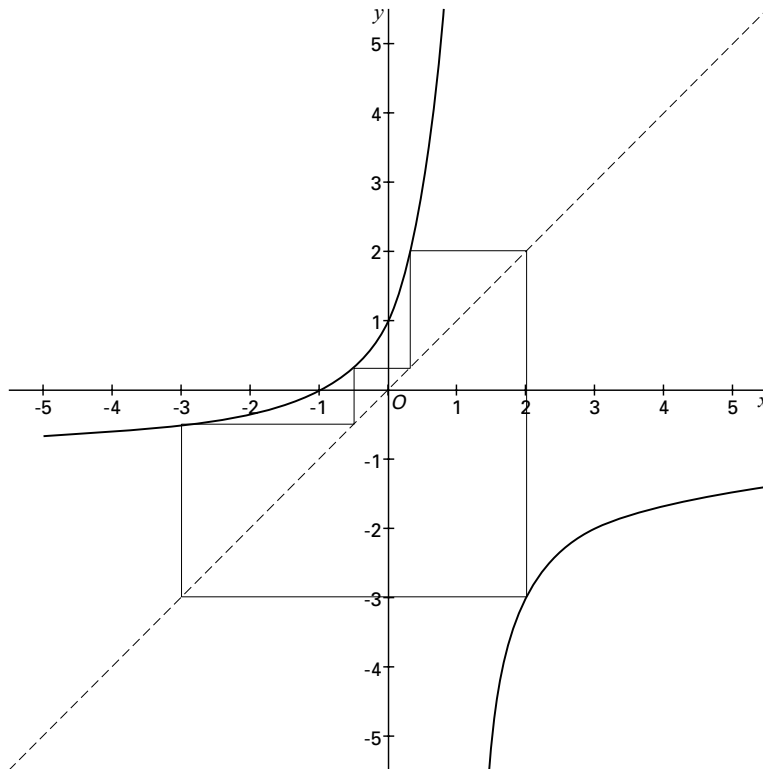
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Periodiek

Gegeven is de rij: 
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = \frac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \end{cases}$$

In de volgende twee vragen kiezen we de startwaarde  $a = 2$ .  
In figuur 1 staat de webgrafiek van de rij bij deze startwaarde.

figuur 1



4p **1**  Bereken  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  en  $u_4$ .

5p **2**  Bereken  $u_{999999}$ . Licht je antwoord toe.

We kunnen ook andere startwaarden  $a$  nemen dan 2. Als we  $a = 0$  nemen, heeft de rij maar twee termen:  $u_0$  en  $u_1$ ; dan is de term  $u_2$  namelijk niet gedefinieerd.

Behalve  $a = 0$  zijn er nog twee startwaarden waarbij één van de termen in de rij  $u_n$  gelijk is aan 0. De daaropvolgende term in de rij is dan niet gedefinieerd.

5p **3**  Welke twee startwaarden zijn dat? Licht je antwoord toe.

In de rest van deze opgave werken we met startwaarden waarbij  $u_1$ ,  $u_2$  en  $u_3$  wél gedefinieerd zijn. Bij zo'n startwaarde  $a$  kun je achtereenvolgens  $u_1$  en  $u_2$  bepalen.

6p **4**  Toon langs algebraïsche weg aan dat de uitdrukking die je voor  $u_2$  krijgt kan worden vereenvoudigd tot  $\frac{-1}{a}$ .

Nu je  $u_2$  gevonden hebt, kun je  $u_4$  ook bepalen.

4p **5**  Toon aan dat  $u_4 = a$ .

## Zomertarwe

Een akker wordt op 1 april ingezaaid met zomertarwe. De tarwe wordt geoogst op 30 juli. In de 120 dagen tussen zaaien en oogsten groeien de planten niet steeds even hard.

Aanvankelijk groeien de planten steeds sneller. Als de planten groter worden gaan ze elkaar meer hinderen, waardoor de groeisnelheid nagenoeg constant wordt. Tegen het einde van het groeiseizoen gaan de tarweplanten steeds langzamer groeien.

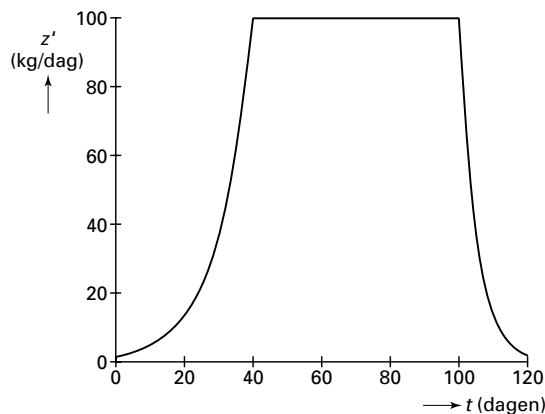
Het gewicht van de tarweplanten in kilogrammen noemen we  $z$ . De tijd in dagen noemen we  $t$ ;  $t = 0$  op 1 april,  $t = 120$  op 30 juli.

$z'(t)$  is de snelheid waarmee  $z$  groeit op tijdstip  $t$  (in kg/dag). Biologen hanteren voor de drie groeifasen wel het volgende model:

- fase 1: exponentiële groei voor  $0 \leq t < 40$  geldt:  $z'(t) = 100 \cdot e^{0,1(t-40)}$
- fase 2: lineaire groei voor  $40 \leq t < 100$  geldt:  $z'(t) = 100$
- fase 3: tanende groei voor  $100 \leq t < 120$  geldt:  $z'(t) = 100 \cdot e^{-0,2(t-100)}$

In figuur 2 staat de grafiek van  $z'$ .

figuur 2



Bij elk tijdstip  $t_1$  in fase 1 is er een tijdstip  $t_3$  in fase 3 waarop de tarweplanten even snel groeien als op  $t_1$ .

- 4p **6**  Bereken  $t_3$  exact als  $t_1 = 18$ .

De hoeveelheid zaaigoed is 30 kg. Dus  $z(0) = 30$ .

Er zijn getallen  $a$  en  $b$ , zo dat voor fase 1 geldt:  $z(t) = a \cdot e^{0,1(t-40)} + b$

- 4p **7**  Bereken  $a$  en  $b$ . Rond de waarde van  $b$  af op twee decimalen.

Op elk tijdstip  $t$  is het gewicht te bepalen met  $z(t) = z(0) + \int_0^t z'(s) ds$

Er geldt:  $z(100) \approx 7011,68$ .

- 6p **8**  Toon dit aan.
- 3p **9**  Bereken het gewicht van de tarweplanten op 30 juli.

## Conflict tussen twee punten en een lijn

Gegeven zijn een lijn  $k$  en twee punten  $A$  en  $B$  op gelijke afstand van  $k$  en aan dezelfde kant van  $k$ . Zie figuur 3. Deze figuur staat ook twee keer op de bijlage.

figuur 3



We verdelen het vlak waar  $A$ ,  $B$  en  $k$  in liggen volgens het naaste-buur-principe. De grenslijnen van deze verdeling zijn conflictlijnen.

Het punt  $D$  is het 'drielandenpunt', dat is het punt op gelijke afstand van  $A$ ,  $B$  en  $k$ .

4p **10**  Teken in de figuur op de bijlage het drielandenpunt  $D$ . Licht je werkwijze toe.

4p **11**  Teken in de figuur op de bijlage de conflictlijnen. Licht je werkwijze toe.

## Osteoporose

Osteoporose of botontkalking is een kwaal die vooral bij oudere mensen optreedt en verergert naarmate men ouder wordt. Bij het ouder worden maakt het lichaam minder bot aan dan er afgebroken wordt. Het gevolg is dat botten poreuzer worden en de kans op botbreuk dus toeneemt.

In deze opgave beperken we ons tot de risicogroep, personen van 55 jaar en ouder.

Onderzoek wijst uit dat 1 op de 4 vrouwen aan osteoporose lijdt.

Bij mannen is dat 1 op de 12.

Bij een controle op osteoporose onder 100 aselekt gekozen vrouwen wordt bij een aantal vrouwen osteoporose geconstateerd.

3p **12**  Bereken de kans dat dit aantal 30 is.

Bij een controle onder vijf aselekt gekozen mannen en vijf aselekt gekozen vrouwen wordt bij een aantal van hen osteoporose geconstateerd.

7p **13**  Bereken de kans dat dit aantal 2 is.

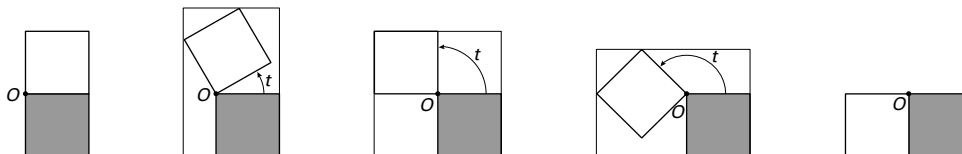
In 1998 bestond in Nederland de risicogroep voor 55,6% uit vrouwen.

4p **14**  Bereken hoeveel procent van de osteoporose-patiënten uit de risicogroep vrouw was.

## Twee scharnierende vierkanten

Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt  $O$  gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om  $O$  gedraaid;  $t$  is de draaihoek in radialen. In figuur 4 zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.

figuur 4

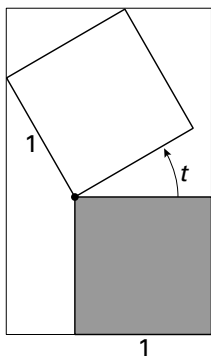


De oppervlakte  $R$  van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek  $t$ .

Voor elke waarde van  $t$  tussen  $0$  en  $\frac{1}{2}\pi$  geldt:  $R(t) = (1 + \sin t)(1 + \sin t + \cos t)$ .

In figuur 5 en op de bijlage is de situatie getekend voor een waarde van  $t$  tussen  $0$  en  $\frac{1}{2}\pi$ .

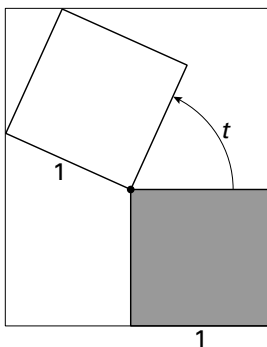
figuur 5



- 4p **15** □ Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van  $t$  tussen  $0$  en  $\frac{1}{2}\pi$ .

Er zijn tussen de begin- en de eindstand twee posities van de vierkanten waarvoor  $R(t)$  maximaal is. In figuur 6 en op de bijlage is één van die posities getekend.

figuur 6



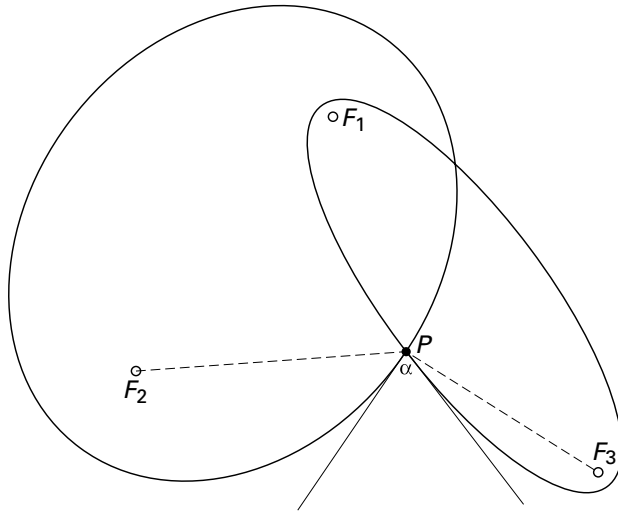
- 4p **16** □ Teken in de figuur op de bijlage de andere positie van de vierkantjes waarvoor  $R(t)$  maximaal is. Licht je werkwijze toe.
- 3p **17** □ Toon met behulp van differentiëren aan dat  $R'(0) = 3$ .

*Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.*

## Twee ellipsen met een gemeenschappelijk brandpunt

Twee ellipsen hebben het brandpunt  $F_1$  gemeenschappelijk; de andere twee brandpunten zijn  $F_2$  en  $F_3$ . De ellipsen snijden elkaar in een punt  $P$ . Zie figuur 7. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 7



De raaklijnen in  $P$  aan de twee ellipsen maken vier hoeken met elkaar. De hoek tussen de twee halve raaklijnen die geheel buiten de ellipsen liggen, noemen we  $\alpha$ .

op 18 □ Bewijs dat geldt:  $\angle F_2PF_3 = 2\alpha$ .

## Constate booglengte

Twee cirkels  $c_1$  en  $c_2$  snijden elkaar in de punten  $A$  en  $B$ .

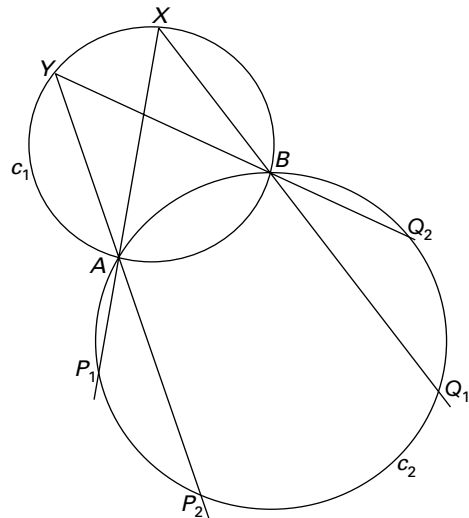
$A$  en  $B$  verdelen  $c_1$  in twee bogen: de ene boog ligt binnen  $c_2$ , de andere boog ligt buiten  $c_2$ .

Op de boog van  $c_1$  buiten  $c_2$  liggen de punten  $X$  en  $Y$ . De lijnen  $AX$  en  $BX$  snijden  $c_2$  nog in de punten  $P_1$  en  $Q_1$ . De lijnen  $AY$  en  $BY$  snijden  $c_2$  nog in de punten  $P_2$  en  $Q_2$ .

Zie figuur 8. Deze figuur staat ook op de bijlage.

op 19 □ Bewijs dat de bogen  $P_1Q_1$  en  $P_2Q_2$  even groot zijn.

figuur 8



Einde