

Esther Moet

Afdeling Wiskunde & Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
e.j.moet@student.rug.nl

Simulatie van fileverschijnselen

De file op de autoweg is voor velen een dagelijks terugkerende ergernis. Het is een politiek gevoelig probleem waarvoor zeer uiteenlopende oplossingen worden aangedragen. Esther Moet, student aan de Universiteit Groningen, geeft een overzicht van de verschillende modellen en beschrijft enkele simulaties. Het artikel is gebaseerd op een eerder verschenen artikel in editie 81 van de MUON, het faculteitsblad van de Faculteit Wiskunde & Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen.

De afgelopen jaren hebben verschillende ministers van Verkeer en Waterstaat uitvoerig gezocht naar een oplossing voor het fileprobleem. Zij bleken niet echt succesvol. Voordat je een oplossing kunt vinden voor dit probleem, moet je eerst het fenomeen zelf begrijpen. Het probleem is in het verleden al veel bestudeerd en nog steeds doet een aanzienlijk aantal wetenschappers uit verschillende vakgebieden hier onderzoek naar. Al in de jaren vijftig werd er gepubliceerd over de dynamiek van het verkeer. Het aantal auto's nam vooral in de Verenigde Staten explosief toe (zie figuur 1) en de toenmalige snelwegen waren niet meer toereikend. Momenteel staat de gemiddelde Europeaan toch al gauw een paar dagen per jaar in de file. Met een roerig politiek jaar achter de rug is het fileprobleem opnieuw een *hot issue*. Sommige mensen in de politiek beweren dat extra asfalt geen zin heeft, de files zouden toch wel blijven bestaan. Toch worden er steeds weer plannen gemaakt om vele wegen extra aan te leggen. Reden genoeg om te onderzoeken of deze mensen gelijk hebben! In dit artikel zullen we verschillende modellen vergelijken, die voor het onderzoek naar filevorming worden gebruikt.

Meten

Allereerst kijken we naar wat er door de jaren heen is gemeten aan fileverschijnselen, want een goed model moet uiteraard wel overeenkomen met de werkelijkheid. Een manier van meten waar in het verleden veel mee gewerkt is, is het maken van luchtfoto's om de vele auto's en hun interacties (versnellen, van rijbaan wisselen) te bestuderen. Ook is het mogelijk om een auto te voorzien van meetapparatuur om alle acties en het rijtraject van deze ene auto te volgen. Maar verreweg de goedkoopste methode (die te-

vens de meeste data oplevert) is het plaatsen van detectors langs de snelweg. Hiermee kan het aantal passerende auto's N in een tijdsinterval T gemeten worden, maar ook de momenten dat de k -de auto de detector binnenrijdt en deze weer verlaat (t_k^0 en t_k^1 , respectievelijk). Met deze gegevens kunnen weer andere grootheden berekend worden, zoals de tijd tussen twee opeenvolgende auto's, ook wel *traffic headway* genoemd $t = t_k^0 - t_{k-1}^1$ en de *traffic flow* $Q(x, t) = \frac{N}{T}$.

Door de gemiddelde snelheid van de auto's V te berekenen, kan ook de *traffic density* ρ berekend worden

$$\rho(x, t) = \frac{Q(x, t)}{V(x, t)},$$

zie bijvoorbeeld [1]. Het is eenvoudig te begrijpen dat de dichtheid hoog is bij een lage snelheid (de auto's staan stil of rijden langzaam) en laag als de snelheid hoog is (er kan lekker geseheid worden). De traffic flow uitgezet tegen de traffic density levert het *fundamentele diagram* van een traject (figuur 2). Empirisch blijkt dat de relatie tussen flow en density aan de volgende eigenschappen voldoet:

1. Bij lage dichtheden is er een min of meer lineaire relatie tussen de flow en de density.
2. De toename duurt tot een maximale flow, Q_{max} is bereikt.
3. Vervolgens neemt de flow af tot het verkeer stil staat bij de density ρ_{file} (rond de 150 auto's per kilometer weg) Over hoe de curve er echter precies uit moet zien verschillen de meningen (en de data).

Chronologie

Helbing geeft in [1] een chronologisch overzicht van relevante publicaties over verkeersmodellen en -simulaties. Begin jaren vijftig startte het onderzoek naar de traffic flow. Aanvankelijk modelleerde men de golfbeweging die in een file te ontdekken is en naar achteren propageert — niemand staat ooit in het begin van een file — met een vloeistofdynamisch model. Dit model bleek toch tekortkomingen te hebben, dus eind jaren vijftig ging men naar elk voertuig afzonderlijk kijken, de zogenaamde *follow-the-*

leadermodellen waren geboren. In de jaren zeventig hield men zich toch weer meer bezig met de macroscopie en ontwikkelde men gas-kinetische modellen (de zogenaamde Boltzmann-achtige modellen). Ook in de jaren tachtig ging men verder met macroscopische vloeistofdynamische modellen, inmiddels met een gevorderde theorie in verhouding met de jaren vijftig. In de jaren negentig pakte men het weer totaal anders aan; men ging weer microscopisch werken, dit keer met discrete cellulaire automaten. Toen betere meetmethoden betere data opleverden, werd er meer gedaan aan experimentele studies en vergelijking met oudere modellen. Ik zal in de volgende paragrafen twee macroscopische modellen (het vloeistofdynamische en het gas-kinetische model) met twee microscopische modellen (het follow-the-leadermodel en een model op basis van cellulaire automaten) vergelijken.

Macroscopische modellen: het vloeistofdynamische model

De macroscopische modellen behoren alle tot de groep van de zogenaamde *fluid-dynamics*-modellen. Het is wat misleidend 'fluid dynamics' als 'vloeistofdynamica' te vertalen, omdat het niet alleen de dynamica van vloeistoffen, maar ook van gassen betreft.

De theorie van vloeistofdynamische modellen is gebaseerd op het behoud van voertuigen. Dit leidt tot de continuïteitsvergelijking

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} + \frac{dQ(x,t)}{dt} = 0,$$

waarbij

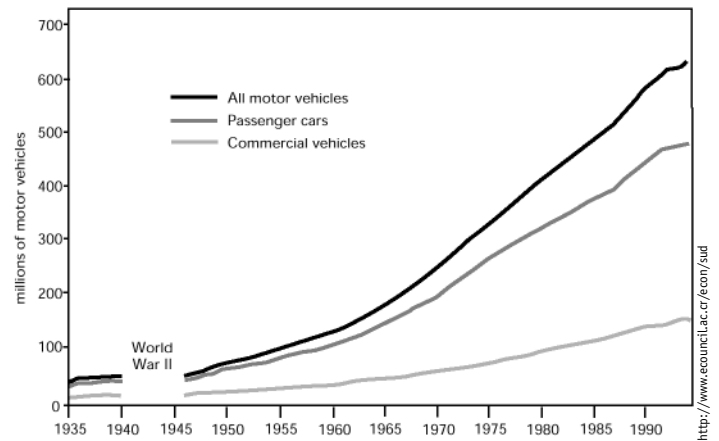
$$Q(x,t) = \rho(x,t) \cdot V(x,t)$$

de traffic flow, het product van de dichtheid en de gemiddelde snelheid voorstelt [2]. Essentieel in de modellering is de 'constitutieve relatie', dat wil zeggen het verband tussen de snelheid V en de dichtheid ρ . Hoe ingewikkelder deze relatie gekozen wordt, des te complexer de evaluatie van het model zal zijn. Realistische modellen bevatten gewoonlijk een aantal parameters die geschat moeten worden door de modeluitkomsten te vergelijken met data.

In veel resultaten van simulaties met vloeistofdynamische modellen is de verwachte golfbeweging goed waar te nemen, inclusief de eerder genoemde propagatie naar achteren. Ook het fundamentele diagram kan goed voorspeld worden.

De bekendste modellen van deze soort zijn het Lighthill-Witham model (de basis van vele shock-wave theorieën, zie [2]), het model met de Burgers-vergelijking (de simpelste vergelijking met niet-lineaire propagatie en diffusie, zie [3]), het model van Phillips (waarin een dichtheidsafhankelijke relaxatietijd gebruikt wordt, zie [4],[5]) en Payne's model (waarin een dynamische snelheidsvergelijking geïntroduceerd wordt, zie [6],[7]). Uiteraard bestaan er vele varianten op het basisidee, die verschillen in bijvoorbeeld efficiëntie, gedetailleerdheid of stabiliteit. Het is kenmerkend voor vloeistofdynamische modellen dat ze veel ontwikkeltijd nodig hebben en toch vaak een ontoereikende beschrijving van de praktijk opleveren.

Aan de andere kant kunnen ze goed gefit worden aan empirische waarden, zijn ze numeriek vrij efficiënt. Ook is het gemakkelijk om dingen toe te voegen. Op- en afritten kunnen in het model opgenomen worden (er stroomt vloeistof naar binnen of weg) en het inhalen op meerbaanswegen kan gesimuleerd worden door



Figuur 1 Waarom het zo druk is op de weg.

een eenbaansweg te gebruiken waarbij de weggebruikers met positieve kans kunnen inhalen.

Macroscopische modellen: het gas-kinetische model

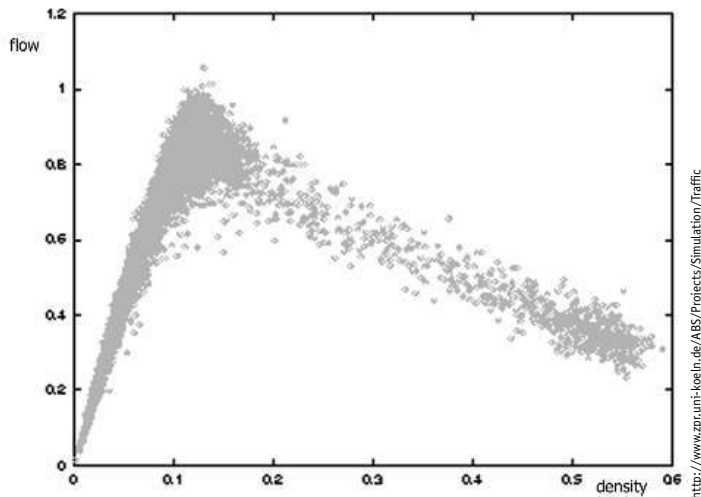
De theorie van gas-kinetische modellen is gebaseerd op een vergelijking voor de *fase-ruimte dichtheid* (zie [1])

$$\tilde{\rho}(x, v, t) = \rho(x, t) \tilde{P}(v; x, t),$$

het product van de dichtheid van voertuigen $\rho(x, t)$ en de waarschijnlijkheidsdistributie $\tilde{P}(v; x, t)$ van snelheden v op plaats x en tijd t . Behoud van voertuigen leidt tot

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)_{acc} + \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)_{int}.$$

Let op, dat de rechterkant hier niet nul oplevert zoals het geval zou zijn in een incompressibele vloeistof. De meebewegende afgeleide kan in deze beschrijving veranderen ten gevolge van het acceleratiegedrag van de automobilisten en de interactie tussen de auto's, aangeduid met 'acc' en 'int'. Wederom zal ik de verdere theoretische uitwerking van dit model hier achterwege laten. Met deze (Boltzmann-achtige) theorie is het mogelijk om wiskundige relaties voor de modelfunctie \tilde{P} en de evenwichtssnelheid af te leiden, waar eerder alleen naar gegist kon worden met behulp van empirische waarden. In de eerste modellen kon dit alleen voor lage dichtheden gedaan worden, maar inmiddels zijn er nieuwe, soortgelijke modellen voor hogere dichtheden ontwikkeld. Prigogine vond dat er zich in het verkeer een soortgelijke overgang van vrij verkeer naar een file voordeed, net zoals de overgang van een gas naar een vloeistof [8]. Hij deed dit via de introductie van voertuigcorrelaties tussen opeenvolgende voertuigen. De bekendste modellen zijn het model van Prigogine (het eerste gas-kinetische model, zie [8]) het model van Phillips (hetzelfde model met enkele aanpassingen, zie [4],[9]), het model van Pavari-Fontane (zij onderscheiden verschillende typen bestuurders, zie [10]) en het non-local gas-kinetic model (op dit moment het meest geavanceerde gas-kinetische model, zie [11]). De gas-kinetische modellen zijn net als de vloeistofdynamische modellen goed af te stemmen op empirische data, maar het grootste voordeel is dat er een relatie mogelijk is tussen de beschrijvingen op micro- en de macro-niveau [1]. Er is alleen geen analytische oplossing bekend, zodat alleen met de numerieke benadering gewerkt kan worden.



Figuur 2 Een voorbeeld van een fundamenteel diagram.

Microscopische modellen: het follow-the-leadermodel

De ontwikkeling van dit model begon al in de jaren vijftig. Bij dit model wordt ervan uitgegaan, dat de snelheid van een voertuig voornamelijk wordt bepaald door zijn voorganger, de *leading vehicle* of *leader*. De verandering in snelheid van de betreffende auto wordt ondermeer bepaald door

1. de relatieve snelheid

$$v_k(t) = [v_k(t) - v_{k-1}(t)],$$

2. de eigen snelheid $v_k(t)$,

3. de *headway* (eventueel aangepast met de snelheid van het leading vehicle).

Helaas geeft een dergelijk model geen verklaring voor de geobserveerde dichtheidsgolven. Om dit wel te krijgen, moet er rekening gehouden worden met de reactietijd van bestuurders die gegeven wordt door $t \sim 1.3s$. Dan krijgen we het volgende model:

$$\frac{dv_k(t+t)}{dt} = \lambda(v_{k-1}(1) - v_k(t)),$$

ook wel het stimulus-response model genoemd (zie [1]). De parameter λ is de gevoeligheid voor de stimulus, die afhankelijk is van de headway en de snelheid van de voorligger. In dit model zal een auto dus afremmen als hij dicht op de voorligger zit of als hij sneller rijdt dan deze. Als de auto langzamer rijdt dan de voorligger, zal hij accelereren. Voor grote waarden van t is de oplossing van deze differentiaalvergelijking instabiel. Daarom is er een generaliseerde gevoeligheidsfactor λ ingevoerd met parameters m_1 en m_2 :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{[v_k(t+t)]^{m_1}}{[x_{k-1}(t) - x_k(t)]^{m_2}}.$$

De meeste van de follow-the-leadermodellen zijn een speciaal geval van dit model. Doorgaans zijn m_1 en m_2 geen gehele getallen. Om die reden heet dit model ook wel het non-integer car-followingmodel. Omdat het uitgaat van de snelheid van een leading vehicle, zou de snelheid van een auto die alleen op de weg is onbepaald zijn. Andere variaties op dit model bepalen de acceleratie op basis van de afstand tot de voorganger. Als er geen

voorganger is, zal het voertuig zo hard mogelijk gaan rijden (het Newell of *optimal velocity* model).

Het meest uitgebreide follow-the-leadermodel is op dit moment het intelligent driver model (zie [12]) van Treiber en Helbing, dat tevens rekening houdt met de gewenste snelheid, gewenste headway (de overbekende 2-secondenregel), minimale headway (om botsingen te voorkomen) en het gedrag van de bestuurder bij het optrekken en afremmen (over het algemeen gaat het eerste in kortere tijd dan het tweede). Dit leidt tot de volgende parameters:

v_0	de gewenste snelheid
T	de gewenste afstand (in tijd) tot de voorganger
a	de maximale versnelling
b	de gewenste deceleratie (anticipatie)
s_0	minimale afstand tot de voorganger
δ	acceleratie-exponent (voor realistisch gedrag)

Het model van Treiber en Helbing luidt

$$\frac{dv}{dt} = a \left(1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*}{s} \right)^T \right) \text{ met}$$

$$s^* = s_0 + (vT + \frac{vv}{2\sqrt{ab}}).$$

Door deze parameters te variëren (zo mogelijk naar aanleiding van empirisch gevonden waarden) kunnen vele verschillende fundamentele diagrammen gevonden worden, die vaak karakteristiek vertonen van andere (micro- of macroscopische) modellen. Het intelligent driver model is makkelijk te kalibreren, robuust, ongeluk-vrij en numeriek efficiënt en daarmee momenteel het beste follow-the-leadermodel.

Microscopische modellen: cellulaire automaten

Omdat er bij de follow-the-leadermodellen behoorlijk wat rekenwerk komt kijken (er moeten voor elke auto afzonderlijk, voor elke tijdstap niet-triviale berekeningen gedaan worden), zijn de cellulaire automaat-modellen ontwikkeld (zie [13],[14],[15],[16]). Deze simulatietechniek is enorm efficiënt omdat ze zeer geschikt zijn voor parallele computers. Dit komt onder andere door de volgende eigenschappen:

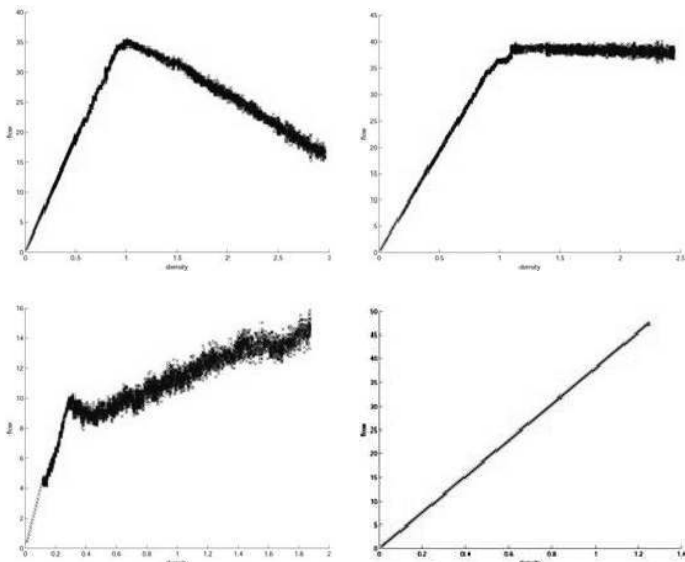
1. De weg wordt opgedeeld in een aantal (j) gelijke delen (*sites*)
2. Er is een eindig aantal mogelijke staten waarin elke site kan verkeren
3. De evaluaties van de tijdsevoluties van de sites kunnen parallel worden uitgevoerd
4. De *update*-regels, waarmee de positie en snelheid van een auto op het volgende tijdstip wordt berekend, worden globaal toegepast
5. Alleen de interacties tussen aangrenzende sites worden meegenomen.

Elke site is leeg of wordt bevolkt door één auto met een discrete snelheid v . Deze snelheden zijn dusdanig geschaald, dat er per tijdstap slechts veranderingen ter grootte van -1 , 0 of 1 optreden. Veel cellulaire automaat-modellen maken ge-

Foto rechts Knooppunt Kleinpolderplein in Rotterdam waar de A13 en de A20 samenkomen. Dit is het drukste stuk snelweg van Nederland.



foto: Pieter Hiltz/Hollandse Hoogte



Figuur 3 Fundamentele diagrammen van de vier gesimuleerde modellen. Boven: twee follow-the-leadermodellen, links onder het intelligent-drivermodel van Treiber en Helbing, rechts onder het non-integer-car-followingmodel. Bron:[21].

bruik van een kansproces in de bepaling van de nieuwe snelheid. Er wordt een waarschijnlijkheid $prob$ ingevoerd, die het eventuele remmen of versnellen van een auto beschrijft. Dit komt in feite heel goed overeen met de werkelijkheid omdat niet iedereen hetzelfde rijgedrag heeft en men niet altijd even goed oplet. Gegeven de positie van een auto (p), de huidige snelheid (v), de maximumsnelheid (v_{max}) en het gat g (aantal lege sites tussen deze auto en de voorligger) worden de nieuwe posities en snelheden per tijdstap als volgt bepaald:

1. Acceleratie/Deceleratie: $v_{n+1} := \min(v_n + 1, v_{max}, g - 1)$,
2. Fluctuatie (toegepast met kans $prob$): $v_{n+1} := \max(v_n - 1, 0)$,
3. Beweging: $p_{n+1} := p_n + v_n$.

Regel (1) beschrijft dat auto n zal versnellen, behalve als daarvoor de maximumsnelheid v_{max} overschreden zou worden of de auto op de voorganger zou botsen doordat het gat te klein wordt. Regel (2) geeft aan dat de auto afremt met een waarschijnlijkheid $prob$ ten opzichte van de onder (1) berekende snelheid, behalve als hij al stilstaat (vandaar $\max(v_n - 1, 0)$). Dit zorgt voor de benodigde fluctuaties en weerspiegelt de verschillende rijstijlen van de weggebruikers. De keuze van de waarschijnlijkheid verschilt per model. Regel (3) geeft de nieuwe positie aan.

Als uitbreiding op dit standaardmodel kan de zogenaamde *slow-to-start* regel geïntroduceerd worden, die het optrekken van een stilstaande auto vertraagt, met name als het gat met de volgende auto maar één site is. Andere bestaande uitbreidingen zijn *cruise control* (geen fluctuaties bij de maximale snelheid) en een gewenste snelheid (bijvoorbeeld 120 km/uur). Ook bestaat er een discrete variant van het *optimal velocity* model [17].

Het grootste verschil tussen cellulaire automaten en de follow-the-leadermodellen is dat de eerste aanpak een stochastische component (en dus fluctuatie) bevat. Deze is nodig om files te simuleren (als $prob \rightarrow 0$ zullen er geen files voorkomen). Daarom rijst momenteel de vraag in hoeverre deze modellen wiskundig te rijmen zijn met andere modellen. Om een goede benadering van een continu model te krijgen, moet de discretisatie heel fijn worden en verdwijnt het voordeel van efficiëntie. Bekende voorbeelden van cellulaire automaten zijn de modellen van Nagel-Schreckenberg [18], Takayasu-Takayasu [19] en Fukui-Ishibashi [20].

Eigen simulatie

In het kader van het derdejaars vak *Inleiding Computational Science* aan de Rijksuniversiteit Groningen hebben Ralph Keegstra en ik enkele modellen getest [21]. Bij deze simulatie hebben wij verder gewerkt met een eerdere simulatie van Tsjipke Wijbenga en Gijs de Vries.

Zij hadden twee modellen geïmplementeerd. Deze modellen zijn microdynamische follow-the-leadermodellen, houden rekening met een gewenste snelheid, proberen te voorkomen dat er meer dan 30% van de remkracht gebruikt wordt en zijn op de waarden van enkele parameters na gelijk. In totaal hebben wij vier verschillende (microdynamische) modellen getest:

- Een eerste model opgezet door Wijbenga en De Vries
- Een tweede model opgezet door Wijbenga en De Vries
- Het intelligent driver model van Treiber en Helbing [12]
- Het non-integer car-followingmodel [1]

In figuur 3 zijn de resultaten van deze simulaties gegeven. Aan de ene kant is te zien dat een zelf geconstrueerd model al snel een goed fundamenteel diagram kan opleveren (modellen 1 en 2), aan de andere kant blijkt dat niet elk model gemakkelijk te fitten is (model 3). In het non-integer car-followingmodel (model 4) wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde delay-differential equation, waardoor waarschijnlijk numerieke problemen een totaal onjuist fundamenteel diagram veroorzaken.

Vergelijking

Macroscopische modellen zijn over het algemeen minder rekenintensief dan car-followingmodellen, maar de cellulaire automaten zijn het 'snelst' [1]. Door het aanpassen van parameters van macroscopische modellen zijn ze goed te fitten aan empirische resultaten. De geobserveerde golfbeweging kan op deze manier gesimuleerd worden.

Toch sluiten deze modellen vrij moeilijk aan bij de (intuïtieve) werkelijkheid, omdat op de weg een groep auto's bestaat uit afzonderlijke, 'intelligente' objecten, dit in tegenstelling tot de situatie in een vloeistof of gas. Bovendien is het bij deze modellen lastig na te gaan welke situaties files veroorzaken en oplossen. Dit is met name omdat het model en het grid steeds aangepast moeten worden.

In microscopische modellen wordt elke auto als een (intelligent) object op zich gezien. De golfbeweging is hier minder direct zichtbaar, maar er kunnen makkelijk verschillende situaties gesimuleerd worden (bijvoorbeeld een tweede baan of obstakels op de weg). Bovendien zijn deze modellen doorgaans zeer goed geschikt voor parallelisatie.

Een moeilijk punt is het maken van een goede keuze voor het gebruikte kansproces. De microscopische modellen lijken de toekomst voor deze tak van wetenschap te zijn. De laatste jaren is het meeste onderzoek naar deze modellen gedaan en zijn er goede resultaten mee geboekt. Voor meer informatie over simulaties verwijs ik met name naar [18] en [22], waar ook Java-applets te vinden zijn voor enkele genoemde modellen. In [1] zijn ook modellen te vinden die voetgangersverkeer beschrijven.

Toepassingen

Na deze vergelijking van modellen is het natuurlijk interessant om je af te vragen in hoeverre deze verkeersmodellen al in de praktijk gebruikt worden. Navraag wijst uit dat macrodynamische

sche modellen het meest toegepast worden. De reden hiervoor is dat de berekeningen die met deze modellen gedaan worden heel grootschalig zijn en micro-modellen meer gericht zijn op kleinere gebieden. Hieronder licht ik de toepassingen toe.

Verkeersmodellen zijn al veelvuldig in omloop. De toepassing die bij veel mensen als eerste opkomt is de adviessnelheid die tijdens de spits boven de weg wordt aangegeven. Deze wordt met behulp van een algoritme berekend dat gebaseerd is op het gemeten gemiddelde van de snelheden; maar hier ligt niet een compleet verkeersmodel aan ten grondslag.

Lokale berekeningen met betrekking tot de doorstroom van bepaalde wegsegmenten gebeurt veel met online macro-modellen. Het sturen van het verkeer op basis van berekeningen met verkeersmodellen is nog niet breed in omloop, hoewel er in het buitenland wel enkele steden zijn (onder andere Zürich en Berlijn) waar dit al wel gebeurt.

In programma's die reistijden voorspellen wordt momenteel al op grote schaal gebruikt gemaakt van verkeersmodellen, vooral van online macro-modellen.

Er zijn verschillende adviesbureaus die planstudies doen in opdracht van Rijkswaterstaat. Zij maken voornamelijk gebruik van offline macrodynamische modellen om voorspellingen te doen, bijvoorbeeld of het leggen van meer asfalt een goede keuze zou zijn. Helaas zijn concrete resultaten hiervan mij onbekend.

Slot

De oorzaken van files zijn veel onderzocht, maar een systematisch onderzoek is er helaas nog niet geweest. Wel is uit simulaties gebleken dat bijvoorbeeld een ongeluk (oftewel een obstakel op een rijbaan) als gevolg kan hebben dat het weggebied opgedeeld kan worden in een vrij en een verstopt gedeelte en dat er een golfbeweging van de verstopping naar achteren plaatsvindt. Bij meerdere rijbanen zouden, volgens sommige simulaties, door het wisselen van rijbaan de situaties op de verschillende banen zich synchroniseren en zou een extra rijbaan dus niet de oplossing zijn voor een file (onder andere [1] en [23]). Het probleem bij deze resultaten is dat er altijd wel iets op het simulatiemodel aan te merken is, waardoor de resultaten met een korreltje zout genomen moeten worden. Door deze tekortkomingen van de huidige modellen kunnen er nog geen definitieve uitspraken worden gedaan en zal de nieuwe minister de te nemen beslissingen op andere adviezen moeten baseren. Er zullen altijd wel effecten blijven die niet of nauwelijks door een model beschreven kunnen worden. Voorbeelden hiervan zijn het anticiperende gedrag van automobilisten, het verkleinen van de headway om te voorkomen dat er een andere auto in het gat duikt, verschillende (of geen) redenen om in te halen en specifieke omstandigheden als mist of de fysieke staat van de weg. Het is allemaal terug te brengen tot de moeilijke taak om menselijk gedrag wiskundig te beschrijven. ◀

Referenties

- 1 D. Helbing, *Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems*, 23 april 2001.
- 2 M.J. Lighthill and G.B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. a*, 229, 317, 1955..
- 3 G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley New York, 1974.
- 4 W.F. Phillips, *Transp. Plan. Technol.* 5, 131, 1979.
- 5 W.F. Phillips, in *Proceedings of the 1978 IEEE Conference on Decision and Control* (IEEE, New York), pp. 1032.
- 6 H.J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, edited by G.A. Bekey, Vol. 1, pp. 51, 1971.
- 7 H.J. Payne, in *Research Directions in Computer Control of Urban Traffic Systems*, edited by W.S. Levine, E. Liebermann and J.J. Fearnside, pp. 251, 1979.
- 8 I. Prigogine, in *Theory of Traffic Flow*, edited by R. Herman, Elsevier Amsterdam, 1961.
- 9 W.F. Phillips, *Kinetic Model for Traffic Flow*, (National Technical Information Service, Springfield, VA 22161), Technical Report DOT/RSPD/DPB/50-77/17, 1977.
- 10 S.L. Paveri-Fontane, *Transpn. Res.* 9, 225, 1975.
- 11 D. Helbing en M. Schreckenberg, *Phys. Rev. E*, 59, R2505, 1999.
- 12 Martin Treiber, *Micro simulation of road traffic*, <http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/~treiber/MicroApplet1.0>.
- 13 S. Wolfram, *Nature* 311, 419, 1984.
- 14 S. Wolfram, *Theory Applications of Cellular Automata*, World Scientific, Singapore, 1986.
- 15 S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.
- 16 D. Stauffer, *J. Phys. A: Math. Gen.* 24, 909, 1991.
- 17 D. Helbing en M. Treiber, *Comp. Sci. Eng.* 1, 89, Sep/Okt 1999.
- 18 Prof. Dr. Michael Schreckenberg, *The Nagel-Schreckenberg-Model Traffic Simulator*, <http://traf36.uni-duisburg.de/model>
- 19 M. Takayasu en H. Takayasu, *Fractals* 1, 860, 1993.
- 20 M. Fukui en Y. Ishibashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* 65, 1868, 1996.
- 21 R. Keegstra en E.J. Moet, *Practicum Inleiding Computational Science, Simulatie van een file*, 13 juni 2002.
- 22 L.E. Haefner, M.S. Li en L.A. Porrello, *Preliminary Data Collection and Analysis for Traffic Flow Management on a Freeway Corridor*, <http://www.ctre.iastate.edu/pubs/semisesq/session3/haefner2/>
- 23 H.Y. Lee, H.-W. Lee en D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* 81, 1130, 1998.