Jan van de Craats
Koninklijke Militaire Academie
Postbus 90002
4800 PA Breda
J.vd.Craats@mindef.nl

Boekbespreking

De parels van Indra

Het onderwerp van automorfe functies raakt aan vele takken van de wiskunde. De theorie kwam tot bloei omstreeks 1900. Onlangs is er een rijk geïllustreerd boek verschenen over dit onderwerp: David Mumford, Caroline Series en David Wright hebben geprobeerd om de theorie van Kleinse groepen en automorfe functies voor een breed wiskundig publiek toegankelijk te maken. Jan van de Craats, auteur van verschillende wiskunde populariserende werken, geeft een bespreking.

"In het hemelse rijk van de god Indra bevindt zich volgens de overlevering een glinsterend net, dunner dan een spinnenweb, dat zich tot aan de uiterste grenzen van de ruimte uitstrekt. Aan ieder knooppunt van de doorschijnende draden ervan is een spiegelende parel geregen. Omdat het net zich oneindig ver uitstrekt, zijn er ook oneindig veel parels. In het spiegelend oppervlak van elke parel worden alle andere parels weerspiegeld, zelfs uit de verste uithoeken van het universum. En in elk spiegelbeeld weerspiegelen zich alle andere spiegelbeelden. Zo blijven spiegelingen zich eindeloos in spiegelingen herhalen."

Aan deze poëtische beschrijving van de oude Boeddhistische mythe van het net van Indra uit de *Hua-yen sutra* ontleent *Indra's Pearls — the Vision of Felix Klein* zijn titel. Die tekst past namelijk wonderwel bij de wereld van de automorfe functies en Kleinse groepen — het eigenlijke onderwerp van dit boek. Tegen het einde van de negentiende eeuw werd dat onderzoeksgebied, waar onder andere differentiaalvergelijkingen, complexe functietheorie, meetkunde en getaltheorie samenkomen, tot grote bloei gebracht door wiskundigen als Felix Klein, Henri Poincaré, Robert Fricke, Lazarus Fuchs en Friedrich Schottky. Zij bestudeerden groepen van Möbiustransformaties van de Riemann-sfeer, dat wil zeggen transformaties van de vorm $z \to w = (pz+q)/(rz+s)$ met $ps - qr \neq 0$. In plaats van de Riemann-sfeer kan men ook het vlak van alle complexe getallen nemen, aangevuld met het punt ∞. Het verband tussen deze beide voorstellingen van de verzameling waarop de Möbiustransformaties werken, verloopt via een stereografische projectie.

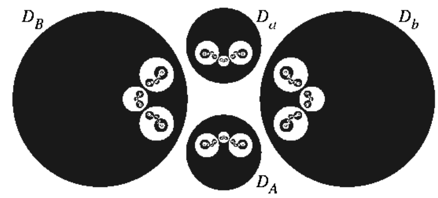
In eerste instantie gaat het om vrije groepen met twee voortbrengers; in dit boek worden ze steeds a en b genoemd. De auteurs gebruiken verder de conventie om de inversen van a en b met respectievelijk A en B aan te duiden. Elk groepselement (behalve de eenheid) kan dan op een unieke wijze worden voorgesteld door een 'woord' in de vier letters a, b, A en B, met de restrictie dat er geen a naast een A mag staan en geen b naast een B.

Het spel is nu simpel: maak een keuze voor a en b, kies daarnaast ook een beginverzameling (*seed*) S, en onderzoek of er meetkundig gezien iets interessants ontstaat wanneer alle transformaties uit de groep op S worden toegepast. Het resulterende patroon zal door de wijze van constructie invariant zijn onder alle transformaties van de groep. Elke transformatie is daarmee een symmetrie van dat patroon, en zo illustreert zo'n patroon dus bepaalde symmetrie-eigenschappen van de groep.

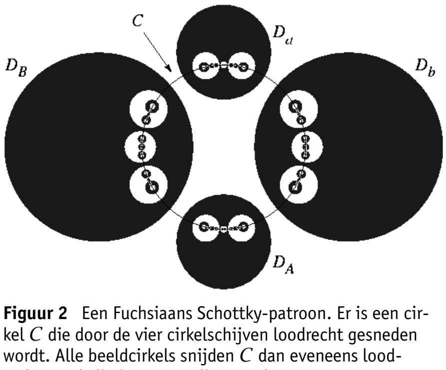
Een eenvoudig voorbeeld: neem voor a de translatie $w = z + 1$, voor b de translatie $w = z + i$, en voor de *seed* S het complexe getal 0. De groep brengt dan het rooster van alle complexe getallen met gehele reële en imaginaire delen voort. Het punt ∞ is een invariant punt onder alle transformaties uit de groep.

Loxodromische transformaties

Twee Möbiustransformaties T_1 en T_2 heten geconjugeerd binnen de groep van alle Möbiustransformaties als er een Möbiustrans-



Figuur 1 Een Schottky-patroon bij vier cirkelschijven D_a, D_b, D_A, D_B. De tegels van de bijbehorende betegeling zijn om en om wit en zwart gekleurd.



Figuur 2 Een Fuchsiaans Schottky-patroon. Er is een cirkel C die door de vier cirkelschijven loodrecht gesneden wordt. Alle beeldcirkels snijden C dan eveneens loodrecht, en de limietverzameling wordt een Cantorverzameling op C.

formatie S is waarvoor geldt dat $T_1 = ST_2S^{-1}$. Volgens de inzichten die Felix Klein in 1872 in zijn *Erlanger Programm* verwoordde, hebben geconjugeerde transformaties dezelfde meetkundige eigenschappen binnen de meetkunde op de Riemann-sfeer die door de groep van alle Möbiustransformaties wordt gedefinieerd. Zo zijn bijvoorbeeld alle Möbiustransformaties met precies één invariant punt geconjugeerd met de translatie $w = z + 1$, die aldus als een soort 'standaardvorm' voor zo'n transformatie kan worden opgevat.

Maar in het algemeen heeft een Möbiustransformatie niet één, maar twee invariante punten. Via conjugatie zijn die in 0 en ∞ over te voeren, en de transformatie krijgt dan de vorm $w = kz$ met $k \neq 0, 1$. Bijzondere gevallen treden op als $|k| = 1$ of als k reëel is. De transformatie is dan respectievelijk een rotatie of een puntvermenigvuldiging. In alle andere gevallen is $w = kz$ een spiraalbeweging, dat wil zeggen een combinatie van een rotatie over een hoek $\arg(k)$ die geen geheel veelvoud is van π en een vermenigvuldiging met een factor $|k|$ ongelijk aan 1.

Möbiustransformaties die via conjugatie in de vorm $w = kz$ met $|k| \neq 1$ zijn over te voeren, worden *loxodromisch* genoemd, en de interessantste Kleinse groepen ontstaan wanneer de transformaties a en b allebei van dit type zijn. De standaardvorm $w = kz$ van een loxodromische transformatie laat zien dat een van de beide invariante punten aantrekkend is en het andere afstotend. Het afstotende invariante punt is het aantrekkende invariante punt van de inverse transformatie, en omgekeerd.

Schottky-groepen

Elke Möbiustransformatie voert elke cirkel op de Riemann-sfeer weer in een cirkel over, en omgekeerd zijn er bij elk cirkelpaar ook (vele) Möbiustransformaties te vinden die ze in elkaar overvoeren. Stel dat D_a, D_b, D_A en D_B vier onderling disjuncte cirkelschijven zijn, en dat a een loxodromische Möbiustransformatie is die het buitengebied van D_A op het binnengebied van D_a afbeeldt. Dan bevat D_a het aantrekkende invariante punt van a en D_A het afstotende invariante punt van a, dat wil zeggen het aantrekkende invariante punt van A. Laat evenzo b een loxodromische Möbiustransformatie zijn die het buitengebied van D_B op het binnengebied van D_b afbeeldt. De vrije groep die door de transformaties a en b wordt voortgebracht, heet in dat geval een Schottky-groep. Als je alle woorden uit die groep laat werken op de vier initiële cirkels, krijg je een eindeloos patroon van cirkels in cirkels in cirkels, enzovoort — een eerste glimp van de 'parels van Indra' waarnaar de titel van het boek verwijst.

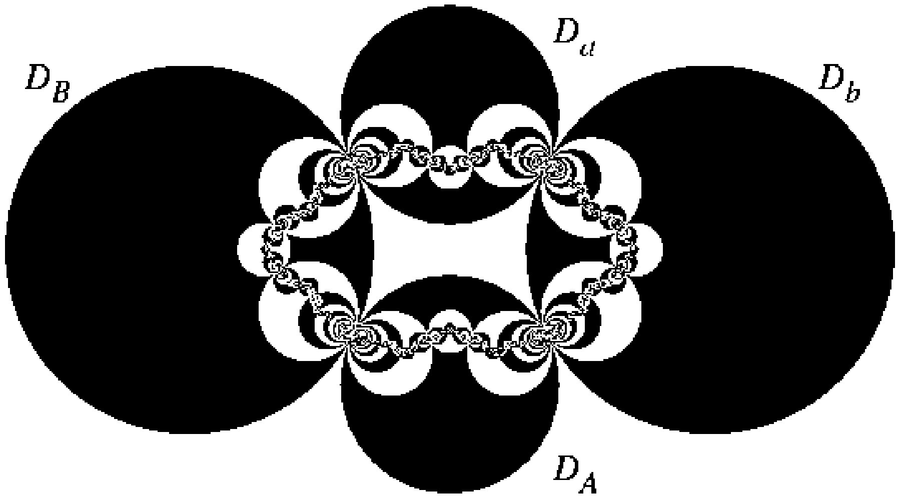
Bij zo'n patroon hoort ook een betegeling van de Riemann-sfeer. Neem daartoe als *seed* het buitengebied van de vier initiële cirkelschijven, dat wil zeggen de gehele Riemann-sfeer met daaruit die vier cirkelschijven weggelaten. Elke transformatie uit de Schottky-groep beeldt deze 'tegel' op een andere tegel af, en alle tegels zijn onderling disjunct. Samen vormen ze een betegeling die vrijwel de gehele Riemann-sfeer bedekt. Slechts een verzameling L, de zogenaamde *limietverzameling*, blijft vrij. Tot L behoren onder andere alle invariante punten van alle transformaties uit de groep.

Een bijzondere klasse van groepen, de zogenaamde *Fuchsiaanse Schottky-groepen*, ontstaat wanneer de vier initiële cirkels allemaal een vijfde cirkel C loodrecht snijden. Voor alle beeldcirkels geldt dan dat ze C ook loodrecht snijden, en de limietverzameling L blijkt in dit geval een Cantorverzameling op C te worden.

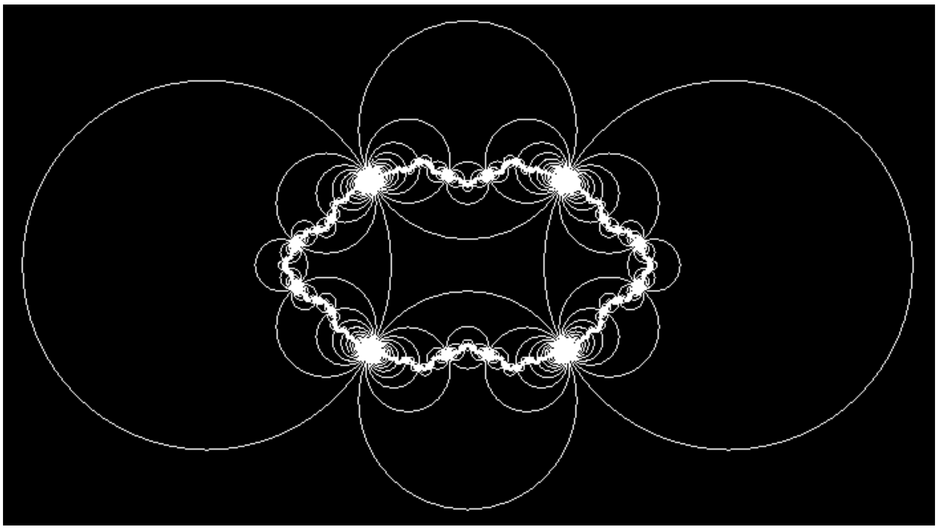
Indra's halssnoer

Nog intrigerender wordt de zaak wanneer de vier cirkelschijven niet meer volledig disjunct zijn, maar een gesloten keten vormen doordat ze elkaar paarsgewijs raken: D_a aan D_b, D_b aan D_A, D_A aan D_B en D_B weer aan D_a. In zo'n keten ligt D_a dus tegenover D_A en D_b tegenover D_B.

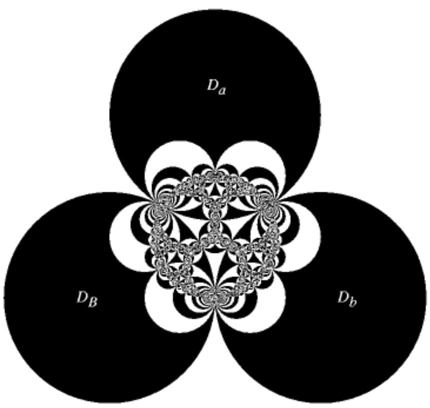
Rakende cirkelschijven worden vaak *kissing disks* genoemd, en de bijbehorende groep heet dan ook een *kissing Schottky group*. De tegel die bestaat uit het buitengebied van de vier schijven wordt nu door die keten opgesplitst in twee disjuncte deelge-



Figuur 3 Een voorbeeld van een kissing Schottky-patroon. De vier oorspronkelijke cirkelschijven vormen een keten. De tegels zijn nu paren ideale vierhoeken geworden, dat wil zeggen vierhoeken met vier elkaar rakende cirkelbogen als zijden.



Figuur 4 Hetzelfde kissing Schottky-patroon als in figuur 3, nu echter getekend met lichte cirkels tegen een donkere achtergrond. De fractale limietverzameling ('Indra's halssnoer') rijst vanzelf als een gloeiende ketting uit het patroon op.



Figuur 5 Een kissing Schottky-patroon waarbij elk van de vier initiële cirkelschijven aan de drie andere raakt. D_A is de kleine zwarte cirkelschijf in het midden die aan de drie cirkelschijven D_a, D_b en D_B raakt.

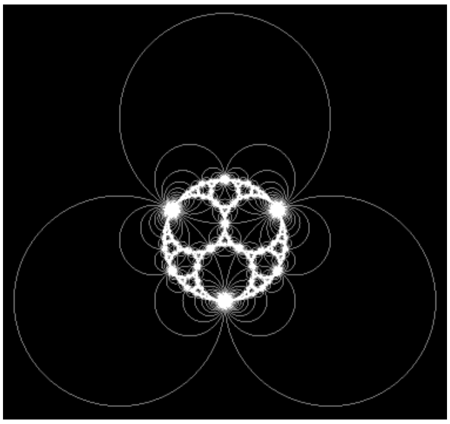
bieden. Elk van die deelgebieden heeft vier cirkelbogen als rand die elkaar paarsgewijs raken. De betegeling van de Riemann-sfeer is nu dus een betegeling geworden met *ideale vierhoeken*, dat wil zeggen vierhoeken met hoeken van nul graden.

Wanneer men nog enige extra voorwaarden aan de voortbrengers a en b oplegt, wordt de limietverzameling een quasi-cirkel, dat wil zeggen het homeomorfe beeld van een cirkel. In het algemeen heeft die quasicirkel een fractaal karakter; de auteurs spreken poëtisch over *Indra's halssnoer*. Het verdeelt de Riemann-sfeer in twee gebieden die ieder globaal invariant zijn onder alle transformaties uit de groep, en hetzelfde geldt natuurlijk ook voor het halssnoer zelf.

Zoals gezegd is Indra's halssnoer in het algemeen een fractal; alleen in het Fuchsiaanse geval, de situatie waarin de vier cirkels een vijfde cirkel C loodrecht snijden, verdwijnt het fractale karakter ervan; dan wordt het halssnoer namelijk een echte cirkel, die met C samenvalt.

De cirkelpakking van Apollonius

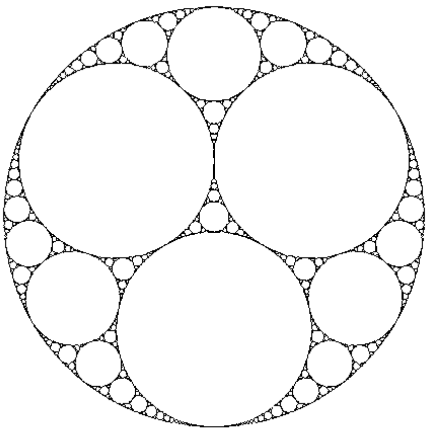
Een ander bijzonder geval van Indra's halssnoer ontstaat als men ook nog D_a aan D_A laat raken en D_b aan D_B. Op de Riemann-sfeer is dat heel goed mogelijk: denk bijvoorbeeld aan vier even grote cirkelschijven met als middelpunten de hoekpunten van een tetraëder, maar ook in het complexe vlak kan men zulke configuraties realiseren. Elk van de vier cirkelschijven raakt dan aan de drie andere, en het buitengebied wordt daarmee opgesplitst in vier *ideale driehoeken*, driehoeken met cirkelbogen als zijden en hoeken van nul graden. De betegeling van de Riemann-sfeer die je krijgt door alle transformaties uit de groep op die vier ideale driehoeken toe te passen,



Figuur 6 Hetzelfde patroon als in figuur 5, nu met open witte cirkels tegen een donkere achtergrond getekend waardoor de limietverzameling als een gloeiend patroon uit de tekening oprijst.

is een patroon met een ongekend rijke symmetriestructuur. De bijbehorende groep is de *modulaire groep*, een van de meest bestudeerde objecten in de wiskunde.

Ook de bijbehorende limietverzameling L is heel bijzonder. Het is niet helemaal een quasi-cirkel meer: de extra raakpunten van de vier initiële cirkelschijven introduceren keerpunten waar L zichzelf ontmoet. Maar nog steeds verdeelt L de Riemann-sfeer in twee gedeelten die elk voor zich globaal invariant blijven onder alle transformaties uit de groep. Het opmerkelijkste is echter ongetwijfeld dat L helemaal uit cirkels bestaat, en dat die cirkels elkaar in oneindig veel punten raken. Bovendien geldt dat L, als continu beeld van de eenheidscirkel, in één trek getekend kan worden zonder de tekenstift van het papier te halen! Deze cirkelpakking, dit samenstel van oneindig veel elkaar rakende cirkels, gaat al terug op Apollonius, maar die zal niet vermoed hebben dat er nog zo veel extra structuur in verborgen zit.



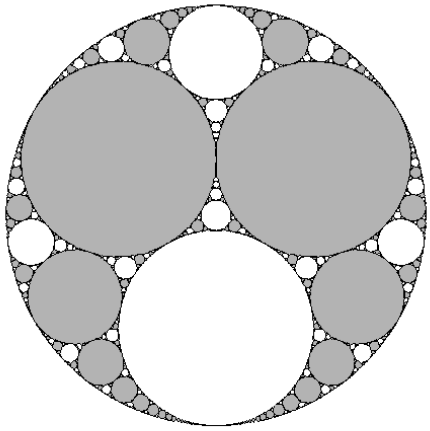
Figuur 7 De limietverzameling van figuur 5 is een samenstel van oneindig veel elkaar rakende cirkels: de cirkelpakking van Apollonius.

Computertekeningen

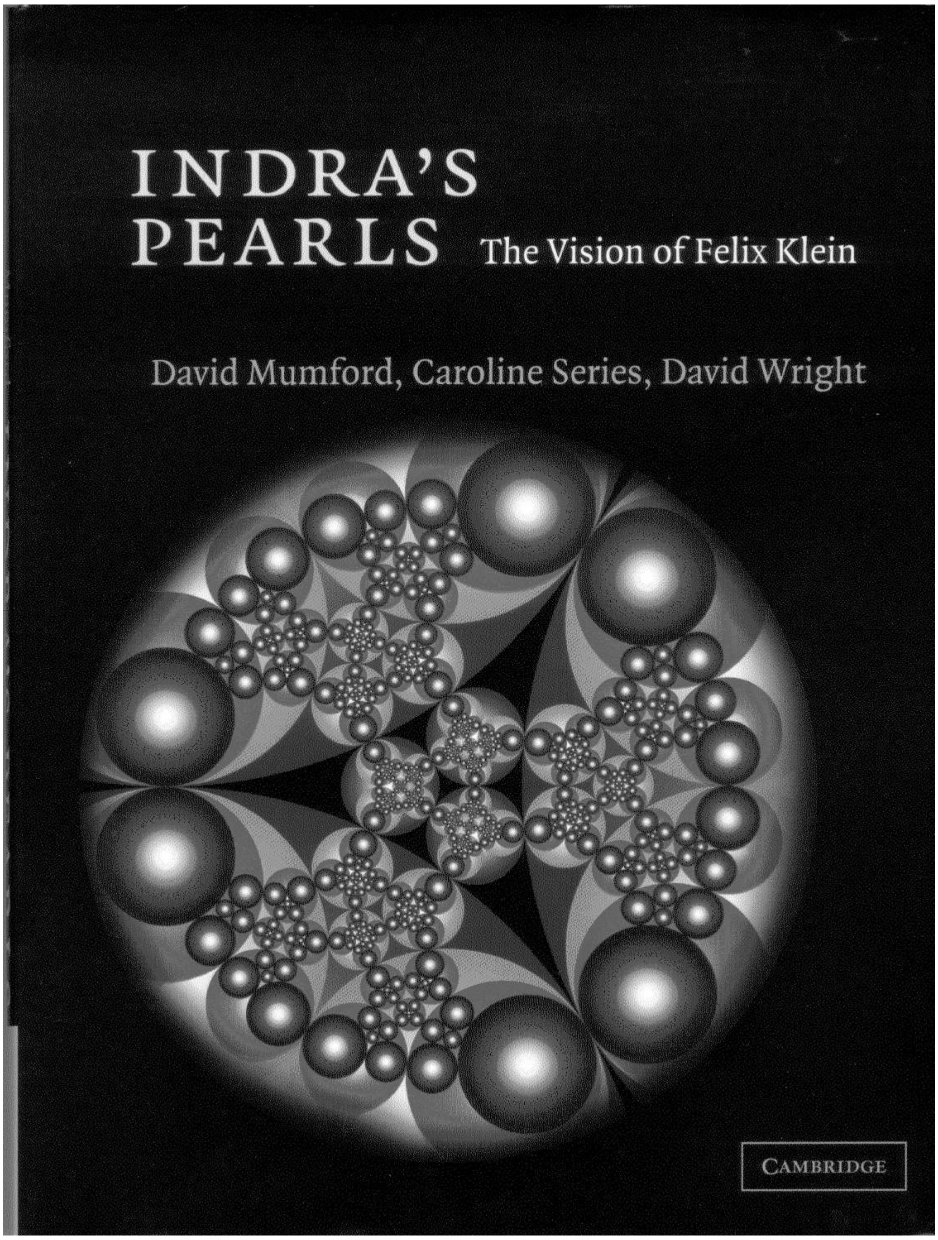
De lezer zal inmiddels een indruk hebben gekregen van de hoofdthema's van dit boek, waarvan ik hierboven de eerste zeven hoofdstukken in grote lijnen geschetst heb. Wat ik echter nog niet heb gezegd, is dat alles met schitterende computertekeningen *in full colour* wordt geïllustreerd, en dat de auteurs bovendien tot in alle details uitleggen hoe de lezer ook zelf zulke tekeningen kan maken.De bijbehorende algoritmen, die erop neerkomen dat telkens de boomstructuur van alle woorden in de vrije groep wordt afgezocht, staan vermeld in een soort pseudo-code, die iedereen in zijn eigen favoriete programmeertaal kan omzetten.

In feite is de beschrijving van de constructie van zulke tekeningen een van de zwaartepunten van het boek. Ze waren ook de directe aanleiding tot het schrijven ervan. Rond 1980 maakten David Mumford en David Wright hun eerste primitieve computerplaatjes van betegelingen en limietverzamelingen van Kleinse groepen. In de loop der jaren ontstonden er steeds meer van die tekeningen, en gaandeweg kwam het idee op om er een boek omheen te schrijven. Caroline Series werd na ruim tien jaar als derde auteur binnengehaald, en daarna begon het project vaart te krijgen. Nog tien jaar later rolde het boek van de persen. Het resultaat is, zoals de auteurs in het voorwoord zeggen, een boek over 'serieuze wiskunde' maar tegelijkertijd ook een boek dat op een zo groot mogelijk lezerspubliek mikt: "As we progressed in our explorations, the pictures that our computer programs produced were so striking that we wanted to tell our tale in a manner which could be appreciated beyond the narrow confines of a small circle of specialists."

De ambitie om ook voor niet-specialisten



Figuur 8 De cirkelpakking van Apollonius verdeelt de Riemann-sfeer nog steeds in twee delen, een 'binnengebied' (grijs), en een 'buitengebied'.



te schrijven uit zich in de eerste plaats in het feit dat de auteurs beginnen met drie hoofdstukken op zeer elementair niveau: ze leggen daarin uit wat symmetrie is, wat groepentheorie ermee te maken heeft, wat complexe getallen zijn, hoe via stereografische projectie uit het complexe vlak de Riemann-sfeer ontstaat, wat Möbiustransformaties zijn en welke typen daarbij kunnen worden onderscheiden.

Het is in dit soort gevallen altijd de vraag hoe gemakkelijk een lezer die nog van niets weet, zulke wiskundige teksten kan lezen. Enige wiskundige scholing vooraf lijkt me toch wel onontbeerlijk, maar die hoeft niet zo ver te gaan. Een tweede- of derdejaarsstudent wiskunde die al wat functietheorie gehad heeft, zal met deze tekst geen moeite hebben, zeker niet wanneer de bestudering ervan plaatsvindt in een soort werkcollegevorm. De presentatie van de stof is voorbeeldig, en alles wordt met duidelijke en goed verzorgde figuren geïllustreerd.

Zichtbare symmetrie

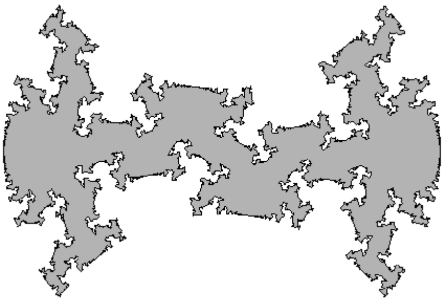
In de hoofdstukken 4 en 5 komen de eerste Schottky-groepen in beeld. Daar worden ook de boomzoekalgoritmen behandeld waarmee de lezer zelf de cirkelpatronen bij Kleinse groepen en hun limietverzamelingen op het computerscherm kan laten verschijnen. In zulke patronen wordt de ongekend rijke symmetriestructuur van de bijbehorende Kleinse groepen zichtbaar. In het standaardwerk van Fricke en Klein over automorfe functies staan ook al zulke tekeningen, met eindeloos geduld en groot vakmanschap gemaakt door een leerling van Klein, maar wat die tekeningen van de limietverzamelingen laten zien, is uiteindelijk toch onbevredigend. Klein zelf merkte in 1894 op: "Het gaat om de vraag . . . wat de limietpunten voor een verzameling vormen. Het is niet moeilijk om die vraag door een strikt logische redenering te beantwoorden, maar onze verbeelding schijnt volledig tekort te schieten wanneer we er een mentale voorstelling van proberen te vormen." Pas bijna een eeuw later konden onderzoekers dankzij de rekenkracht en de grafische mogelijkheden van de moderne computer zulke patronen in al hun abstracte schoonheid aan het licht brengen.

De resultaten zijn verbluffend, en alleen maar te vergelijken met de Julia- en Mandelbrotfractals die in de begintijd van de fractalrage de wereld veroverden. Lezers die daar gevoelig voor zijn — ondergetekende hoort daar ook bij — krijgen de onbedwingbare neiging om zelf ook zulke tekeningen te produceren. De auteurs hebben ze gemaakt met Fortran als programmeertaal, maar het kan ook met talen als Visual Basic, Pascal, C of Java. In principe moet het ook met MATLAB, Maple of Mathematica mogelijk zijn, maar waarschijnlijk krijg je dan bij gecompliceerde plaatjes te maken met geheugenproblemen en lange verwerkingstijden.

Zelf ben ik een enthousiast gebruiker van PostScript als programmeertaal voor computergrafiek, en daarmee lukte het me inderdaad om de tekeningen uit het boek en allerlei variaties ervan in al hun kleurenpracht op het scherm te krijgen en op de kleurenlaserprinter van mijn werkgever af te drukken. Enige zwart-wit voorbeelden vindt de lezer als illustraties bij deze boekbespreking.

Een niettriviaal probleem bij het programmeren is het inbouwen van stopcriteria. Wanneer je bijvoorbeeld de fractale limietverzameling van een kissing Schottky-groep in beeld wilt brengen, wil je dat het algoritme stopt zodra de details fijnmaziger worden dan de resolutie van het beeldscherm of de printer. Ervoor zorgen dat dit inderdaad gebeurt, vraagt heel wat wiskundige inventiviteit, maar de auteurs leiden de lezer ook hier vakkundig langs alle valkuilen en struikelblokken.

Ondanks al die voorzorgen moet je er toch op voorbereid zijn zelf nog flink wat energie te steken in de implementatie van de algoritmen. Zo heb ik inmiddels welhaast alle hoeken en gaten van de programmeertaal PostScript leren kennen om mijn programma's in tijds- en geheugenbeslag binnen de perken te houden. Maar als je er dan uiteindelijk toch in slaagt om in een draaitijd van minder dan drie



Figuur 9 Een fractale limietverzameling met ingekleurd binnengebied bij zekere parameterkeuzes. Let op de cirkelbogen die als omhullenden te zien zijn.

minuten zo'n fantastische kleurentekening op het scherm te krijgen, is de voldoening des te groter.

Spel met parameters

Na de behandeling van de pakking van Apollonius volgt een hoofdstuk waarin de generatoren a en b afhankelijk van bepaalde parameters gevarieerd worden. Het gaat dan vooral om de limietverzamelingen die daarbij ontstaan en hun meetkundige eigenschappen.

De lezer kan hier zelf weer allerlei experimenten opzetten, onbekend terrein verkennen en zich verbazen over de gecompliceerde en intrigerende fractalpatronen die daarbij ontstaan. Het structureren en verklaren van de verschijnselen die je daarbij waarneemt, leidt weer tot allerlei fraaie stukken boeiende, niettriviale wiskunde.

Na dit hoofdstuk volgen er nog drie voor degenen die kennis willen maken met actuele aspecten van onderzoek op dit terrein: ze behandelen allerlei gedegenereerde gevallen, en ook situaties waarin de groep geen vrije groep meer is. De illustraties zijn nog steeds schitterend, maar de wiskundige techniek wordt hier veel gecompliceerder, en uw recensent moet bekennen dat hij de gedetailleerde bestudering daarvan voor later bewaard heeft.

Experimentele en visuele wiskunde

Ik heb vaak het gevoel dat de mogelijkheden van de computer in het wiskundeonderwijs nog lang niet ten volle benut worden. Als een student met nieuwe stukken theorie kennis maakt, gebeurt dit nog te vaak in een soort catechismus-stijl. Te weinig wordt nog gebruik gemaakt van de mogelijkheid om zelf resultaten te visualiseren en te construeren. Natuurlijk niet met passer en liniaal, maar met alle grafische mogelijkheden die de computer biedt. Uit eigen ervaring kan ik zeggen dat er haast niets zo fascinerend en bevredigend is als het zelf realiseren van concrete afbeeldingen die abstracte ideeën in beeld brengen. Ook de auteurs hebben die ervaring; ze vertellen bijvoorbeeld hoe zij in de begintijd van hun project maar steeds niet toekwamen aan het schrijven omdat ze het veel te druk hadden met het aan elkaar laten zien wat ze nu weer voor fraais gefabriceerd hadden. En haast elk nieuw plaatje riep weer nieuwe vragen op. Als je zelf zulke tekeningen probeert te maken, merk je ook dat je geen half werk kunt doen; de achterliggende wiskunde moet je volledig begrijpen, anders loop je vast.

Enthousiasme

Mumford, Series en Wright hebben een prachtig boek gemaakt. Ik ken weinig wiskundeboeken die op het punt van stijl en presentatie met deze monografie kunnen wedijveren. Hun eigen enthousiasme spat op elke bladzijde de lezer tegemoet. Ook didactisch zit het goed in elkaar. Alle details waarin je vast zou kunnen lopen, worden uitgebreid en helder behandeld. De hoeveelheid stof die de revue passeert, is indrukwekkend. De auteurs laten ook geen gelegenheid voorbijgaan om interessante zijpaden te bewandelen en onverwachte vergezichten te tonen. Zo maken we bijna terloops kennis met Cantorverzamelingen, Hausdorffdimensie, het vlindereffect, kettingbreuken, Farey-optelling, en in de Epiloog zelfs met niet-Euclidische meetkunde en de betegelingen die ook ten grondslag liggen aan Eschers cirkellimietprenten. Speciale vermelding verdienen nog de cartoons van Larry Gonick, bij sommige lezers van het Nieuw Archief misschien bekend als de tekenaar van 'Het stripverhaal van de statistiek' (Epsilon 32). Die cartoons verhelderen op een vermakelijke wijze allerlei topologische aspecten van de Kleinse groepen.

Dit boek lijkt me ideaal voor een werkcollege in seminariumvorm. Elk hoofdstuk wordt namelijk afgesloten met een serie suggesties voor onderzoeksprojecten waar studenten alleen of in groepjes aan kunnen werken. Ik kan me ook goed indenken dat dan zo'n werkcollege gepaard gaat met een openbare expositie van de gemaakte tekeningen, en een lezingenreeks waarin allerlei details ervan worden uitgelegd aan ieder die het maar horen wil.

Indra's Pearls — The Vision of Felix Klein, David Mumford, Caroline Series, David Wright, 395/415 pages, price €53,95, Cambridge UK, Cambridge University Press, 2002, ISBN 0-521-35253-3.