Tom Verhoeff
Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
T.Verhoeff@tue.nl

Recreatieve wiskunde

De Internationale Wiskunde Olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade wordt gevreesd en vereerd onder de in wiskunde geïnteresseerde scholieren en leraren. Vereerd, omdat op het gebied van het oplossen van wiskundige problemen de internationale olympiade het summum betekent. Gevreesd, omdat het niveau van de opgaven zo hoog ligt en de concurrentie moordend is. Tom Verhoeff, universitair docent informatica aan de Technische Universiteit Eindhoven, was waarnemer op de olympiade van 2002 in Glasgow. Hij legt uit hoe de olympiade in zijn werk gaat.

Bundels met opgaven en oplossingen van the International Mathematical Olympiad (IMO) [1] zijn eenvoudig te vinden in boeken [3, 8, 10, 16], tijdschriften en op het internet. Maar hoe zo'n olympiade in zijn werk gaat is nauwelijks beschreven. Op basis van mijn ervaringen als waarnemer bij de 43e IMO in juli 2002 te Glasgow wil ik een kijkje bieden achter de schermen van de IMO. Met name ga ik in op de oorsprong en selectie van de opgaven, de beoordeling van het werk van de leerlingen, en de toewijzing van prijzen en enkele statistieken. Een uitgebreid Engelstalig rapport over IMO 2002 is beschikbaar [18].

Deelname aan de IMO is op uitnodiging. Eén van de deelnemende landen treedt op als gastland. Elk uitgenodigd land stuurt een team van maximaal zes leerlingen, een teamleider en een *deputy*. De leerlingen mogen niet ouder zijn dan 20 jaar en mogen nog geen tertiair onderwijs gevolgd hebben.

De meeste deelnemende landen organiseren een nationale wiskunde olympiade om het team te selecteren. In Nederland gebeurt dat via de twee rondes van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) (zie http://olympiads.win.tue.nl/nwo) en een vervolgtraining. Onze eerste ronde trekt jaarlijks zo'n tweeduizend leerlingen, waarvan de beste honderd worden toegelaten tot de tweede ronde. Hieruit worden een stuk of twintig leerlingen geselecteerd voor de vervolgtraining.

Shortlist

IMO 2002 werd gehouden in Schotland met 479 leerlingen uit 84 landen. Deze omvang vergt een gedegen voorbereiding. Elk deelnemend land stuurt tot maximaal zes opgaven naar de opgavencommissie van het gastland. Deze opgaven moeten met elementaire middelen te formuleren en op te lossen zijn. Er is geen officiële afbakening van toegelaten onderwerpen. Traditioneel gaan de opgaven over getaltheorie, meetkunde, algebra en combinatoriek. Differentiaal- en integraalrekening, kansrekening en complexe getallen zijn taboe. Niet alle IMO-onderwerpen worden op de middelbare school onderwezen, maar ze zijn representatief voor echte wiskunde en goed te behandelen bij de training.

Voor IMO 2002 werden 130 opgaven ingezonden uit 41 landen. De opgavencommissie heeft die nauwgezet geanalyseerd. Een van de zorgen daarbij is of opgaven wel echt nieuw zijn. Met de talloze regionale en nationale wiskunde-wedstrijden vergt dit geduldig speurwerk door vele opgavenbundels. Ook is het zaak om zicht te krijgen op de moeilijkheidsgraad door alternatieve oplossingen in kaart te brengen. Uit deze collectie maakt de opgavencommissie tenslotte een zogenaamde *shortlist* van circa 30 opgaven. Daarbij wordt gestreefd naar een goede spreiding over onderwerpen en moeilijkheidsgraden.

Bij IMO 2002 bestond de *shortlist* uit vier bladzijden met 27 opgaven, De *shortlist* wordt een jaar lang geheim gehouden, zodat opgaven, die niet op de IMO gebruikt worden, inzetbaar zijn bij trainingen. Het is in zekere zin een klein wonder dat er ieder jaar weer zoveel nieuwe elementaire opgaven bijeengebracht worden.

Wedstrijdopgaven

De eerste paar dagen van een IMO komen alleen de teamleiders samen om uit de *shortlist* de zes wedstrijdopgaven te selecteren. Daarbij moet gelet worden op diversiteit in onderwerp en moeilijkheidsgraad. De selectie gebeurt met welhaast wiskundige precisie in een reeks van zorgvuldig geformuleerde moties en stemmingen. Een informaticus zou zich erover verbazen dat voor dit proces geen regels zijn vastgelegd. De IMO gemeenschap continueert en verfijnt het proces middels traditie. Sommige teamleiders zijn al tientallen jaren betrokken bij de IMO.

De selectie heeft een wat politiek karakter. Naast het samenstellen van een uitstekende opgavenbundel spelen ook andere motieven mee. Zo is er de neiging om opgaven te prefereren waar het eigen team goed in is. Ook is het een hele eer om een van de zes IMO opgaven te hebben geleverd. Dit beïnvloedt het stemgedrag. Toch zoemt het ook van de wiskunde. Zo blijken er nog verrassend nieuwe oplossingen ontdekt te worden door de aanwezigen.

Als de zes opgaven geselecteerd zijn, moet ook nog de volgorde vastgesteld worden. Daarna begint het oppoetsen van de formulering en het vertalen. Ook deze zaken worden met veel zorg uitgevoerd. De formulering van elke opgave wordt geprojecteerd en woord voor woord doorgenomen.

Alle vertalingen — bij IMO 2002 waren dat er 55 — worden op de muur van de vergaderzaal geprikt. Veel vertalingen worden door meer dan één land gebruikt. Zo is de Nederlandse vertaling ook voor de Vlaamse leerlingen. Een groot aantal vertalingen is handgeschreven. De meeste gebruiken exact dezelfde wiskundige notatie. Soms zijn er kleine variaties, bijvoorbeeld de lengte van het lijnstuk AB wordt aangeduid met AB, $|AB|$ of $\overline{AB}$. Ook in het Grieks, Russisch, Arabisch en Chinees gebruikt men dezelfde notatie. In het Perzisch, een Iraanse taal, worden echter de cijfers vertaald (FarsiTEX doet dat automatisch). Opmerkelijk is dat zelfs in talen die van rechts naar links geschreven worden, de formules toch van links naar rechts lopen. Bij IMO 2002 zag ik echter ook één versie waar de formules van rechts naar links waren geschreven, zelfs $\sum$ was gespiegeld en de namen van variabelen waren 'vertaald'.

De opgaven van IMO 2002 zijn in een kader opgenomen. Daar kunt u zelf uw tanden in zetten. Verderop meld ik nog iets over oplossingen.

De opgaven van IMO 2002

1. Zij n een positief geheel getal. Zij T de verzameling van punten (x, y) in het platte vlak, waarbij x en y niet-negatieve gehele getallen zijn met $x + y < n$. Ieder punt van T is rood of blauw. Als een punt (x, y) van T rood is, dan zijn ook alle punten (x', y') rood met $x' \le x$ en $y' \le y$.

   Een X-verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle x-coördinaten verschillend zijn. Een Y-verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle y-coördinaten verschillend zijn.

   Bewijs dat het aantal X-verzamelingen gelijk is aan het aantal Y-verzamelingen.
2. Zij BC een middellijn van de cirkel Γ met middelpunt O. Zij A een punt op Γ zodanig dat $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Zij D het midden van de boog AB die C niet bevat. De lijn door O evenwijdig met DA snijdt AC in J. De middelloodlijn van OA snijdt Γ in E en F.

   Bewijs dat J het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van $\triangle CEF$.
3. Bepaal alle paren van gehele getallen $m, n \ge 3$ zodanig dat er oneindig veel positieve gehele getallen a bestaan waarvoor
$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$
   geheel is.
4. Zij n een geheel getal groter dan 1. De positieve delers van n zijn $d_1, d_2, \ldots, d_k$, waarbij
$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$
   Definieer
$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k.$$
   a. Bewijs dat $D < n^2$.
   b. Bepaal alle getallen n waarvoor D een deler is van n^2.
5. Bepaal alle functies f van de reële getallen naar de reële getallen, zodanig dat voor alle reële getallen x, y, z en t geldt
$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$
6. Beschouw in het platte vlak de cirkels $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ met straal 1, waarbij $n \ge 3$. De middelpunten van deze cirkels zijn respectievelijk $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Geen enkele rechte lijn in het vlak snijdt of raakt meer dan twee van deze cirkels.

   Bewijs dat
$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{|O_i O_j|} \le \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Scripts en scores

Voor iedere opgave zijn maximaal 7 punten te behalen. Met zes opgaven lopen daarmee de eindscores van 0 tot en met 42. Zoveel wist ik van de beoordeling toen ik naar IMO 2002 ging. Over de werkwijze had ik alleen wat geruchten gehoord.

De leerlingen schrijven hun werk op speciale vellen. De IMO benaming voor hun werk is *script*. Op IMO 2002 werden ongeveer 15 000 vellen script ingeleverd. Dat is gemiddeld ruim 5 vellen per opgave per leerling. Deze worden allemaal gekopieerd. De originelen gaan naar de eigen teamleider en de kopieën naar de organisatie, alles netjes opgeborgen in gekleurde mappen.

Regio	Score		Omschrijving
	7	*	Volledige oplossing
7^-	6		Minimale vergissing, triviaal te repareren
	5		Kleine omissie of fout, maar niet centraal
	2		Aanzienlijke vooruitgang
0^+	1	*	Niet-triviale vooruitgang
	0	*	Veelschrijverij,alleen speciale gevallen gedaan

Tabel 1 Puntentelling van een IMO-opgave

Het gastland zet een aparte beoordelingscommissie op, bestaande uit goede wiskundigen. Zo had de beoordelingscommissie van IMO 2002 onder haar leden personen als Belá Bollobás en Fields medaillewinnaar Tim Gowers, die onlangs een alleraardigst inleidend boekje over wiskunde [7] publiceerde. Zodra de wedstrijdopgaven zijn geselecteerd gaan ze aan de slag om beoordelingsschema's op te stellen. Daarvoor is een vergaand inzicht in de opgave en oplossingstechnieken nodig.

Bij de beoordeling gaat het er in principe om of een opgave al dan niet is opgelost. Het beoordelingsschema onderscheidt daartoe de 0^+ regio (niet opgelost) versus de 7^- regio (wel opgelost): In tabel 1 zijn de gangbare scores gemerkt met een ster (*). Merk op dat de scores 3 en 4 niet in de tabel voorkomen; ze worden alleen in speciale situaties gebruikt.

Het beoordelingsschema brengt in kaart wat als niet-triviale of aanzienlijke voortgang geldt en hoe zwaar bepaalde omissies of vergissingen worden aangerekend. De beoordeling bestaat niet uit het ophakken van de oplossing in kleine stukjes en punten toekennen voor ieder onderdeel. Meestal is het schema niet additief om te voorkomen dat een onverdiende score bijeengesprokkeld wordt door tal van kleine observaties. Zo'n systeem zou bij eindexamens ook ingevoerd mogen worden.

Als een opgave begint met "Bepaal alle ..." (zie opgaven 3 en 5 van IMO 2002), dan levert het geven van oplossingen in het algemeen geen punten op. Zulke oplossingen zijn vaak met wat geduld en prutsen wel te vinden en eenvoudig te controleren. Bewijzen dat het *alle* oplossingen zijn vergt inzicht en

Het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade 2002. Van links naar rechts: Taco Vader, Birgit van Dalen, Erik van Ommen, Esther Bod, Misha Stassen en Thomas Beuman.

daar gaat het om.

Als iets gevraagd wordt over een willekeurige driehoek of geheel getal n (zie opgaven 1, 2, 4 en 6 van IMO 2002), dan levert het afhandelen van een beperkt aantal speciale gevallen meestal geen punten op. Er zijn dus vele manieren om tot nul punten te komen. Het vergeten van speciale gevallen, zoals de basis in een inductief bewijs, kost daarentegen wel punten (aangenomen dat de rest goed is). Het aanpakken van oneven n zou niet-triviale voortgang kunnen zijn (1 punt) zonder als aanzienlijke voortgang te tellen (2 punten).

De beoordelingsschema's worden aan de teamleiders gepresenteerd en in overleg eventueel bijgesteld. Deze worden door de teamleiders gebruikt om zelf het werk van hun leerlingen te beoordelen. De resultaten worden gedurende twee dagen besproken met de beoordelingscommissie. In een half uur tot drie kwartier per opgave legt een teamleider met diens *deputy* hun resultaten voor aan de commissie, die zelf kopieën van de scripts heeft ingezien. Waar nodig beroept de commissie zich op wiskundigen die als vertaler optreden. Uiteindelijk wordt een definitieve score vastgesteld en gepubliceerd op de scoreborden in de gangen.

Op IMO 2002 waren er ruim 500 sessies met de beoordelingscommissie. Voor iedere opgave waren er acht gespecialiseerde commissieleden, die in paren de sessies afnamen. Hoewel de teamleiders het opnemen voor hun leerlingen, kreeg ik de indruk dat iedereen er toch op uit was om een eerlijk resultaat te behalen. Al de eindscores waren gebaseerd op consensus, al twijfel ik eraan of alle teamleiders ook werkelijk alles begrepen.

Oplossingen

Er zijn twee gevaren bij het geven van oplossingen. Ten eerste is er niet zoiets als *de* oplossing van een opgave. Zelfs de officiële *shortlist* bevat uiteenlopende oplossingen en wijst op varianten. Als men zelf een afwijkende aanpak bezigt, dan is dat niet slechter of fout. In tegendeel, er blijkt altijd ruimte te zijn voor nog mooiere oplossingen. Als u die vindt, zou ik het graag vernemen.

Het tweede gevaar is dat men bij het zien van een oplossing, zonder er zelf naar gezocht te hebben, al gauw denkt dat het voor de hand ligt. Niets is minder waar! De kunst is om zonder enige hulp de opgaven op te lossen, en de praktijk leert dat dit knap kan tegenvallen. Ik geef wat hints voor het oplossen van de opgaven van IMO in een apart kader. Volledige oplossingen zijn te vinden in [18].

In Nederland heerst niet zo'n competitiedrang als in veel andere landen. Mij is niet geheel duidelijk waar dat aan ligt. Om een goede *problem solver* te worden, moet je veel oefenen en wedstrijden zijn daar zeer geschikt voor. Fomin et al. beschrijven de Russische ervaring op dit gebied in [17]. *How to Solve It* van Polyá [15] is nog steeds een aanrader om structuur aan te brengen in het kraken van een probleem. Maar tegenwoordig is er meer goede literatuur. Zo bevat [5] een systematische uiteenzetting van algemene strategieën samen met zorgvuldig geselecteerde problemen. Wat geavanceerder is [14], dat een voortzetting op [15] claimt te zijn. Tenslotte biedt [20] een bredere kijk op *problem solving* en de training ervan. De beginner wil ik graag nog wijzen op het onlangs verschenen NWO-boek [4].

Prijzen

De leerlingen worden geordend volgens hun eindscores. In tegenstelling tot de olympische spelen, vallen bij de IMO niet alleen de eerste drie op de ranglijst in de prijzen. De olympiades voor middelbare scholieren voeren een ruimhartiger beleid, om de deelnemers niet voor een carrière in de betreffende discipline af te schrikken. De IMO hanteert de volgende richtlijnen: Niet meer dan de helft van de leerlingen krijgt een prijs. De aantallen eerste, tweede en derde prijzen staan bij benadering in de verhouding $1 : 2 : 3$.

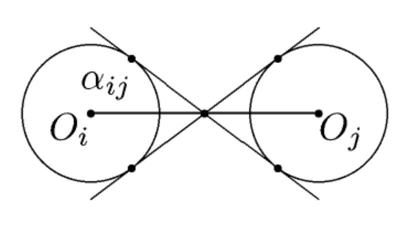
Iemand die buiten de prijzen valt maar toch een opgave volledig heeft opgelost (7 punten), krijgt hiervoor een certificaat met eervolle vermelding (*honorable mention*).

Van de 479 leerlingen op IMO 2002 vielen er 232 in de prijzen: de beste 39 ontvingen een gouden medaille (29 t/m 42 punten), de volgende 73 een zilveren (23 t/m 28 punten) en tenslotte 120 een bronzen (14 t/m 22 punten). Van de 247 leerlingen zonder prijs be-

Onlangs verscheen het olympiadeboek met een keuze van de opgaven van de afgelopen twintig jaar uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De vraagstukken zijn voorzien van hints, antwoorden en korte toelichtingen die de lezers op het juiste spoor proberen te zetten. Voor informatie, zie http://olympiads.win.tue.nl/nwo/nwo-boek/index.html.

Hints bij de opgaven van IMO 2002

1. Het volstaat om te bewijzen dat de blauwe kolomlengtes a_i een permutatie zijn van de blauwe rijlengtes b_i. Dit kan met inductie (naar bijna alles), of door een bijectie te geven.
2. Bewijs dat vierhoek $ODAI$ een parallellogram is en dat IC en IF bissectrices zijn in driehoek CEF.
3. De enige oplossing is $(m, n) = (5, 3)$ (maar dit levert geen punten op). Bewijs eerst voor de gezochte (m, n) dat $f(x) = x^m + x - 1$ deelbaar is door $g(x) = x^n + x^2 - 1$ in $\mathbf{Z}[x]$. Beschouw vervolgens $h(x) = x^{k+1} + x^k - 1$ met $k = m - n \geq 1$ en bewijs dat $h(x)$ ook deelbaar is door $g(x)$. Onderzoek de relatie tussen $g(x)$ en $h(x)$ op het interval $(0, 1)$.
4. Bewijs voor het (a)-deel eerst dat
$$\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} < 1 \iff D < n^2.$$
Het (b)-deel geldt precies wanneer n priem is.
5. De enige oplossingen zijn $f(x) = 0$, $f(x) = 1/2$ en $f(x) = x^2$ (maar dit levert geen punten op). Bewijs dat f multiplicatief is ($f(xy) = f(x)f(y)$), even ($f(-x) = f(x)$), stijgend op de positieve reële getallen, en dat $f(n) = n^2$ voor gehele n.
6. Bewijs eerst dat voor elk tweetal cirkels Γ_i en Γ_j geldt
$$\frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{\alpha_{ij}}{2}.$$
waarbij α_{ij} de hoek is tussen $O_i O_j$ en de binnenraaklijnen aan Γ_i en Γ_j (zie figuur 1).



Figuur 1

haalden er 66 een eervolle vermelding. Dat het moeilijk is blijkt wel uit het feit dat meer dan de helft van de leerlingen, allemaal toppers in hun nationale olympiade, minder dan 14 punten scoren. Dat het niet *te* moeilijk is wordt bewezen door de drie leerlingen (twee Chinezen en een Rus) die de haast ondenkbare perfecte score (42 punten) haalden.

Nederland zit traditioneel bij de middenmoot. Op IMO 2002 komen we niet verder dan een bronzen medaille en een eervolle vermelding. Het hele Nederlandse team heeft 55 punten vergaard. Vergelijk dit met de onofficiële ranglijst voor de 84 teams:

1. China, 212 punten, 6 goud.
2. Rusland, 204 punten, 6 goud.
3. Verenigde Staten, 171 punten, 4 goud, 1 zilver, 1 eervolle vermelding.

Verder eindigen in de top-12 achtereenvolgens: Bulgarije, Vietnam, Zuid-Korea, Taiwan, Roemenië, India, Duitsland, Iran, Canada en Hongarije (de laatste beide met 142 punten). Nederland is 54e op deze lijst.

De IMO is nog nooit in Nederland gehouden. Ik denk dat het een uitstekende uitdaging zou zijn om de IMO eens naar Nederland te halen. We doen al tientallen jaren mee en hebben genoeg goede wiskundigen en taalkennis in huis. Misschien dat gebrek aan interesse voor wiskunde bij onze jeugd en politici het moeilijk maakt, maar aan de andere kant is het ook een manier om te tonen dat we wiskunde belangrijk vinden en kan het juist een stimulans zijn voor anderen. Wie doet mee?

Dankwoord

Ik wil graag Jan Donkers, sinds vele jaren de leider van het Nederlandse IMO team, bedanken voor zijn bereidheid mij met het team mee te nemen en voor zijn antwoorden op mijn vele vragen. Verder heeft Imre Leader, de voorzitter van de opgaven- en beoordelingscommissies bij IMO 2002, met oneindig geduld zijn ervaring met mij gedeeld. Ook heb ik profijt gehad van de adviezen van Jan van de Craats, de voorganger van Jan Donkers bij de NWO. Tenslotte heeft de Stichting NWO mijn inspanningen gesteund.

Referenties

1 http://olympiads.win.tue.nl/imo/

2 Gerald L. Alexanderson. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1965–1984: Problems and Solutions* Mathematical Association of America, 1986.

3 Mircea Becheanu. *International Mathematical Olympiads 1959–2000 : Problems, Solutions, Results*. Academic Distribution Center, 2001.

4 Jan v.d. Craats (red.). *De Nederlandse Wiskunde Olympiade: 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden*. Uitgeverij ten Brink Meppel B.V., 2002.

5 Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998.

6 Andrew M. Gleason. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1938–1964: Problems and Solutions*. Mathematical Association of America, 1980.

7 Timothy Gowers. *Mathematics: a Very Short Introduction*. Oxford Paperbacks, 2002.

8 Samuel L. Greitzer. *International Mathematical Olympiads, 1959–1977*. Mathematical Association of America, 1978.

9 Kiran Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary*. Mathematical Association of America, 2002.

10 Murray S. Klamkin. *International Mathematical Olympiads, 1978–1985 and Forty Supplementary Problems*. Mathematical Association of America, 1986.

11 Jozsef Kürchak. *Hungarian Problem Book I: based on the Eötvös Competitions 1894–1905*. Mathematical Association of America, 1963.

12 Jozsef Kürchak. *Hungarian Problem Book II: based on the Eötvös Competitions 1905–1928*. Mathematical Association of America, 1975.

13 Andy Liu (Ed.). *Hungarian Problem Book III: based on the Eötvös competitions 1929–1943*. Mathematical Association of America, 2001.

14 Zbigniew Michalewicz, David B. Fogel. *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer, 1999.

15 Gyorgy Pólya. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd Edition). Princeton University Press, 1957.

16 István Rieman. *International Mathematical Olympiad: 1959–1999*. Anthem Press, 2001.

17 Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg. *Mathematical Circles: Russian Experience*. American Mathematical Society, 1996.

18 Tom Verhoeff. *The 43rd International Mathematical Olympiad: A Reflective Report on IMO 2002*. Computer Science Report 02/11 (0310), Technische Universiteit Eindhoven, 2002.

19 Joh. H. Wansink. “De eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade (1962).” *Euclides*, **38**(VI): p. 161–178, maart 1963.

20 Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley & Sons, 1999.