

## Michiel Hochstenbach

*Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht*

*Postbus 80010, 3508 TA Utrecht*

*hochstenbach@math.uu.nl*

### Studiegroep wiskunde met de industrie

# Eurodiffusie

**Een van de problemen bij de Studiegroep wiskunde met de Industrie in februari 2002 was het modelleren van het zogenaamde eurodiffusieproces. Dit probleem heeft landelijk veel aandacht getrokken. Gevraagd werd een model te maken voor de bewegingen van euromunten over de twaalf eurolanden. Hoe snel gaan euro's van het ene naar het andere land? Wanneer kunnen we verwachten dat de helft van de euro's in onze portemonnee buitenlands is?**

Op 1 januari 2002 vervingen twaalf Europese landen hun nationale munteenheden door de euro. De euromunten zijn niet identiek: één kant van elke van de acht denominaties (2 en 1 euro, 50, 20, 10, 5, 2 en 1 eurocent) verschilt van land tot land. Tot 1 januari waren deze munten nog (vrijwel) strikt gescheiden, maar wanneer mensen reizen, mengen de munten. Het verspreiden van de nationale euromunten over de verschillende Europese landen geeft dus tevens unieke informatie over de 'diffusie' van mensen. Het mengen van guldens over Nederlandse regio's zou vroeger ook informatie over diffusie van mensen hebben gegeven, maar die menging was destijds niet meetbaar. Het unieke aan de euro-introductie is, dat menging van munten uit verschillende regio's (landen) nu wél meetbaar is.



Mozart op het 1 euromuntstuk van Oostenrijk

In dit artikel analyseren we dit verschijnsel en proberen we een wiskundig model voor de beweging van de munten te geven. Hiermee hopen we onder andere inzicht in de snelheid van het mengproces te krijgen. In de modellen komen bepaalde parameters voor, die we kunnen schatten met de door zo'n 4000 Nederlanders en Belgen ingevoerde data op de eurodiffusie-internetpagina (zie [3]).

De diffusiesnelheid hangt af van de waarden van de in het model voorkomende parameters. Tijdens de studieweek waren deze nog moeilijk te schatten omdat er nog maar weinig gegevens beschikbaar waren. Een eerste schatting was echter dat het zo'n anderhalf jaar zou duren voordat de helft van alle munten in Nederlandse portemonnees van buitenlandse afkomst zou zijn.

#### Gegevens van banken

Op 1 januari 2002 werd de euro officieel betaalmiddel in 12 Europese landen. Volgens gegevens van de Nederlandse Bank (DNB) zijn over heel Europa 64,9 miljard munten geproduceerd, waarvan 3,3 miljard Nederlandse. Niet al deze munten zijn meteen in circulatie gebracht: in Nederland bijvoorbeeld 1,6 miljard, grofweg de helft dus. Overigens is voor elk land het aantal munten in verhouding tot het aantal inwoners verschillend: Frankrijk maakte bijvoorbeeld ongeveer 190 munten per persoon, Duitsland 280 en Nederland 200. Van de kleine denominaties is veel meer geslagen dan van de grotere: het aantal centen is bijvoorbeeld 18% van het totale aantal munten, het aantal 1-euromunten 9% en het aantal 2-euromunten 5%.

#### Verliezen

Munten kunnen voor de circulatie verloren gaan, we spreken dan van verliezen. We onderscheiden drie soorten verliezen: besparingen, ver-

sterf en verzamelen. Bij *besparingen* moet gedacht worden aan allerlei potjes kleingeld die mensen hebben. Deze munten zijn niet voor altijd verloren, maar worden (soms jaren) later weer uitgegeven en zo weer in circulatie gebracht. Aan het einde van 2001 waren de meeste potjes geleegd van hun nationale munteenheden; nu worden ze weer langzaam gevuld met euro's. DNB verwacht dat hiervoor alleen al in Nederland meer dan 100 miljoen munten per maand nodig zullen zijn. DNB schat, dat in het 'guldentijdperk' (voor 2002) 1.5 miljard van de totaal 3.0 miljard guldenmunten waren gespaard. Daarom verwacht men nu ook dat uiteindelijk 50% van de munten gespaard zal worden.

Met *versterf* bedoelen we de munten die voor altijd verloren gaan, bijvoorbeeld omdat ze in een diepe put vallen of omdat niet-europese toeristen ze mee terug nemen naar hun thuisland. In het guldentijdperk bedroeg het versterf zo'n 50 tot 100 miljoen munten per jaar. Omdat toeristen de Nederlandse euromunten ook in andere Europese landen kunnen gebruiken, denken we dat het versterf lager zal uitkomen: 60 miljoen munten per jaar lijkt een redelijke schatting te zijn voor dit type verlies.

Een nieuw effect is het *verzamelen* van euromunten. In het guldentijdperk was het effect van verzameling verwaarloosbaar, maar nu lijken veel mensen buitenlandse euromunten te verzamelen: in het begin van 2002 waren de speciale euromapjes voortdurend uitverkocht. Waarschijnlijk zal een deel van deze munten weer in actieve circulatie worden gebracht. Kortom, verzameling valt deels onder versterf en deels onder besparing.

De banken zullen op beperkte schaal nieuwe munten in circulatie brengen om de verliezen te compenseren (in Nederland uitsluitend Nederlandse, enzovoort). Omdat er verder geen herverdeling van euromunten plaats zal vinden en omdat de productie van nieuwe munten klein is ten opzichte van het aantal munten dat in circulatie is, wordt verwacht dat op de lange termijn er in heel Europa een bijna perfecte mix van munten zal zijn.

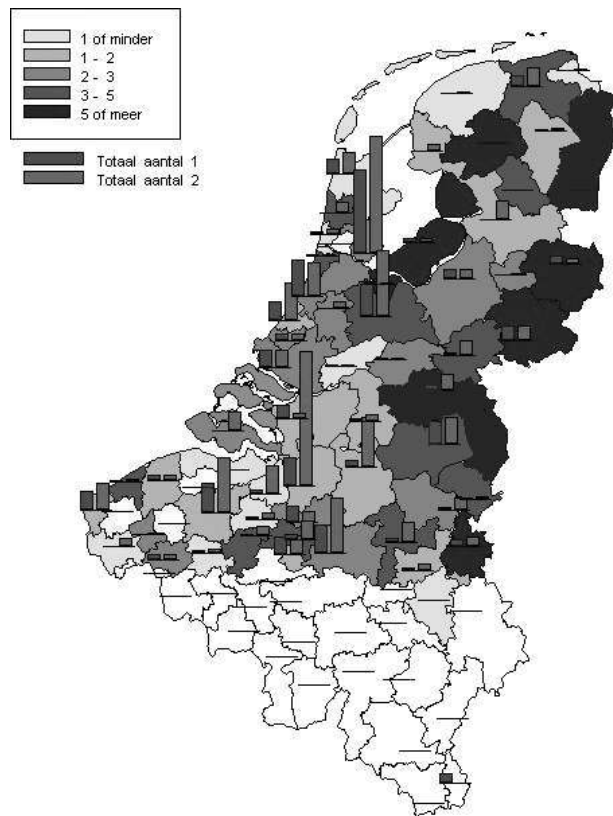
**Portemonnee-inhoud**

Uit studies van DNB in het gulden tijdperk bleek dat iemand gemiddeld zo'n 15 munten in de portemonnee heeft. Omdat per persoon zo'n 100 munten in circulatie gebracht zijn, is de overige circa 85% van alle munten kennelijk in kassalades in winkels en bij banken. Dit kan impliceren dat de beweging van de euromunten relatief langzaam is: slechts 15% van alle munten zal op enig tijdstip 'beweeglijk' zijn. Stel bijvoorbeeld dat 2/3 van de Nederlandse bevolking op zomervakantie naar het buitenland gaat en neem aan dat na het buitenlands bezoek de meegebrachte munten representatief zijn voor het muntmengsel in het land wat bezocht werd (dit zal ook een klein percentage Nederlandse munten bevatten!). Dan wordt door deze reizen slechts 10% van alle Nederlandse munten door (voornamelijk) buitenlandse munten vervangen.

Overigens is het reizen van mensen die daarmee hun munten over de grens meenemen niet de enige mogelijke oorzaak voor de verspreiding van euromunten. Een andere mogelijkheid is, dat Nederlandse banken hun euromunten ergens anders dan bij DNB inkopen, omdat dat bijvoorbeeld goedkoper of dichterbij is. Dit zou een disbalans tussen de hoeveelheden munten in een land kunnen creëren, in de zin dat er een netto stroom munten in of uit het land gaat. Het lijkt echter redelijk om dit effect te verwaarlozen.

**Data**

Om de parameters in onze modellen te bepalen, gebruiken we de data verzameld op de eerder genoemde internetpagina die is opgebouwd

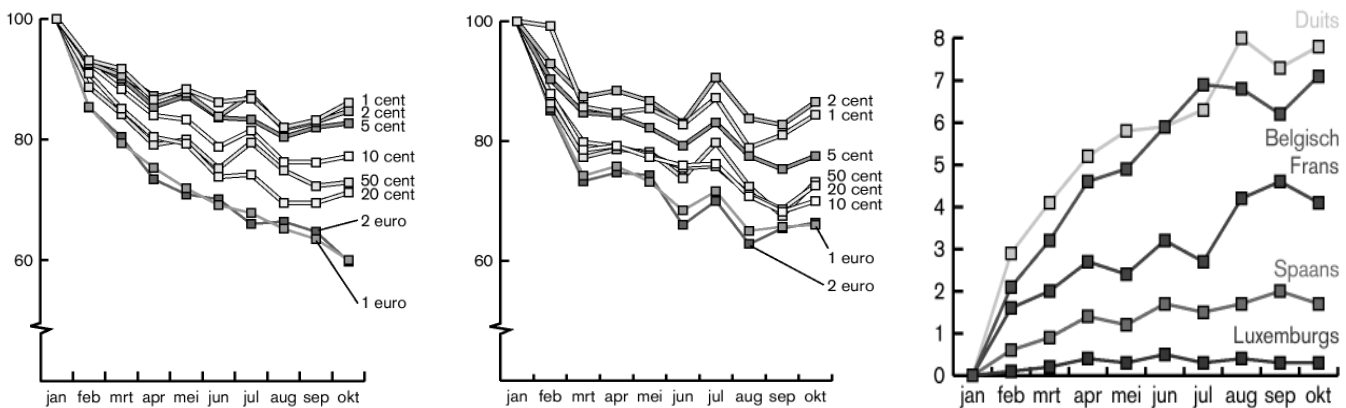


**Figuur 1** Het percentage Duitse euro's per regio op 1 februari 2002, samen met het aantal 1-euro- en 2-eurostukken

door vrijwillige 'eurometers', vooral in Nederland en Vlaams België. Elke datapunt bestaat uit de datum en lokatie, en het aantal munten dat de correspondent heeft van elke denominatie en landen van oorsprong. Op de bovenstaande kaart van Nederland en België wordt bijvoorbeeld het percentage Duitse euro's in Nederland per 1 februari 2002 weergegeven, samen met het aantal gemeten muntstukken van 1-euro en 2-euro in iedere regio.

Uit bestudering van de data blijkt dat het percentage buitenlandse euromunten in Nederland een langzaam stijgende trend vertoont, maar wel met grote fluctuaties (zie figuur 2, derde grafiek). Die fluctuaties zijn verrassend, gezien het feit dat er via de site duizenden munten geteld worden. De metingen suggereren op het eerste gezicht al dat het mengproces waarschijnlijk meerdere jaren in beslag neemt. Verder is duidelijk dat munten van verschillende denominaties in verschillende mate mengen: het percentage buitenlandse munten is hoger naarmate de waarde van de munt hoger is. Zo was op 1 maart maar 8% van de 1-cent munten van buitenlandse origine, terwijl het voor 10 cent 12% was en voor 2 euro 20%. Tenslotte was de invloed van de wintervakanties duidelijk zichtbaar: op 1 maart hadden Nederland en België een groot aandeel Oostenrijkse munten, namelijk 2.3% en 1.7%, terwijl de verwachte lange-termijn limiet 3.1% is. Data van de Canarische Eilanden (Spanje) en Kreta (Griekenland) laten zien dat de buitenlandse munten daar bijna exclusief Duits zijn.

De sterke fluctuaties in de data deden ons vermoeden dat de data van de site mogelijk geen goed beeld gaf van de realiteit. Iedereen kan data invoeren zonder enige controle (hoewel echt vreemde metingen wel gefilterd worden), en het moment waarop mensen data invoeren kan ook sterk bepaald zijn: je kunt je voorstellen dat iemand vooral data invoert wanneer hij enkele 'bijzondere' munten in zijn portemonnee heeft. Enkele zelf uitgevoerde steekproeven eind februari (onder ande-



Figuur 2 Van links naar rechts: percentage Nederlandse munten in Nederland, percentage Belgische munten in Vlaanderen en percentage buitenlandse munten in Nederland (bron: [1]).

re de kassalade van een kantine) versterkten de indruk dat zeker niet alle gegevens op de site realistisch waren. Daarom hebben we op verschillende manieren de naar onze mening meest geloofwaardige data van de internetpagina gehaald. Dat leverde (gebaseerd op de eerste anderhalve maand van 2002) een eerste schatting op van 4% diffusie per maand, dat wil zeggen dat 4% van de munten in Nederland na een maand is vervangen door buitenlandse munten.

#### Een discreet model: Markovketen

Geen enkel wiskundig model zal de totale 64.9 miljard euromunten kunnen volgen. Maar dat is ook niet nodig: de beweging van een enkele munt vertoont hetzelfde gedrag als die van enige andere munt, hoewel dit dus wel kan afhangen van het land van origine van de munt en de denominatie. Daarom concentreren we ons op een enkele munt en volgen die op een probabilistische manier op zijn reis door Europa met een *Markovketen*.

De eenvoudigste Markovketen heeft maar twee toestanden: een munt is of in Nederland of in het buitenland. Dit geven we aan met respectievelijk  $N$  en  $B$ . We verwaarlozen het versterf, en maken geen onderscheid tussen munten in actieve circulatie en gespaarde munten. We nemen ook aan dat de stromen munten van en naar Nederland gelijk zijn, ofwel dat het aantal munten in Nederland gelijk blijft. Laat  $d$  de diffusiegraad zijn, die correspondeert met een waarschijnlijkheid van  $d$  dat een willekeurige munt in Nederland in een bepaalde maand naar het buitenland gaat. Dan is  $p_{NB}$ , de waarschijnlijkheid van een overgang van  $N$  naar  $B$ , gelijk aan  $d$ . Met een actieve circulatie van 1.6 miljard munten in Nederland, is de in- en uitstroom in een maand  $1.6d$  miljard. Wanneer we aannemen dat de verhouding geproduceerde munten tot munten die ook echt in roulatie zijn overal in Europa hetzelfde is als in Nederland, dan zijn er in heel Europa zo'n  $1.6/3.3 \times 61.6 = 29.9$  miljard munten in roulatie. Dan is  $p_{BN} = 1.6d/29.9$ ; met  $d = 0.04$  (zie hierboven) volgt dan  $p_{BN} = 0.00214$ . Dit levert de volgende *overgangsmatrix*  $Q$  op:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - p_{NB} & p_{NB} \\ p_{BN} & 1 - p_{BN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.04 \\ 0.00214 & 0.99786 \end{bmatrix}.$$

De interpretatie van  $Q$  is als volgt: de eerste rij geeft aan waar een munt, aanvankelijk in Nederland, na één maand is: met kans 96% is deze nog in Nederland, en met kans 4% over de grens. De tweede rij correspondeert met een munt die initieel over de grens vertoert. Deze is na een maand in Nederland met kans ongeveer 0.2% en dus

met kans 99.8% nog steeds in het buitenland. Evenzo geeft  $Q^n$  de overgangskansen voor  $n$  maanden. Bijvoorbeeld,

$$Q^{15} = \begin{bmatrix} 0.54841 & 0.45159 \\ 0.02639 & 0.97361 \end{bmatrix}.$$

Dus na 15 maanden, waarbij aangenomen is dat de diffusiesnelheid constant blijft, is 45% van Nederlandse munten over de grens verdwenen en vervangen door buitenlandse euro's. Men kan nagaan dat dit eenvoudige model de limiettoestand  $(0.05085, 0.94915)$  heeft. Dat wil zeggen dat uiteindelijk ruim 5% van de Nederlandse euro's in Nederland zal blijven. Dit is logisch, want dit is precies de verhouding  $3.3/64.9$  tussen de in Nederland geslagen munten en het totaal aantal geslagen munten, waarvan we bij het opstellen van  $Q$  uitgegaan zijn.

#### Verfijningen

Het model kan realistischer gemaakt worden door het op allerlei manieren uit te breiden. We kunnen extra toestanden toevoegen, die staan voor *versterf* en *besparing*. Uit de toestand 'versterf' komen munten nooit meer vrij, uit de toestand 'besparing' komen ze pas na een lange tijd vrij. DNB zal extra munten *produceren* en in roulatie brengen. Ook dit kan met een extra toestand gemodelleerd worden. Simulaties laten zien dat al deze factoren de diffusie van munten langzamer maken. Men kan verschillende modellen maken voor elk van de afzonderlijke *denominaties*. Maar ook de 1-euro munten uit de diverse eurolanden zullen niet allemaal hetzelfde gedrag vertonen: munten uit Luxemburg zullen eerder door verzamelaars uit de roulatie worden gehaald dan die uit Duitsland. Ook kunnen we onderscheid maken tussen verschillende *landen* (bijvoorbeeld omdat Italianen veel munten in putjes laten vallen), of de landen opsplitsen in *regio's*. De data op de internetpagina is per regio beschikbaar (totaal 60 regio's in Nederland en België), dus een verfijnd model met diverse regio's kan ook daadwerkelijk getoetst worden. Ook *seizoensinvloeden* (vakanties) kunnen meegenomen worden. Op grond van al deze factoren hebben we de ruwe schatting gemaakt dat het percentage buitenlandse munten in Nederland ongeveer medio 2003 de 50% zal bereiken.

#### Parameter schatting

Er zijn intelligentere schattingen van de matrix  $Q$  mogelijk dan slechts een ruwe schatting zoals beschreven. Een veel gebruikte methode in dit type probleem is de *meest aannemelijke schatter*. Hierbij schrijven

we de waarschijnlijkheid op dat we de metingen (de data van internet) hadden gekregen als we wisten wat  $Q$  was. Vervolgens benaderen we  $Q$  door deze kans te maximaliseren. Dit is een probleem dat in het algemeen numeriek opgelost moet worden. Een complicerende factor is, dat we weliswaar metingen in Nederland en België hebben, maar niet in andere landen. In deze methode kunnen ook metingen van meerdere maanden tegelijk worden opgenomen.

**Een continu model**

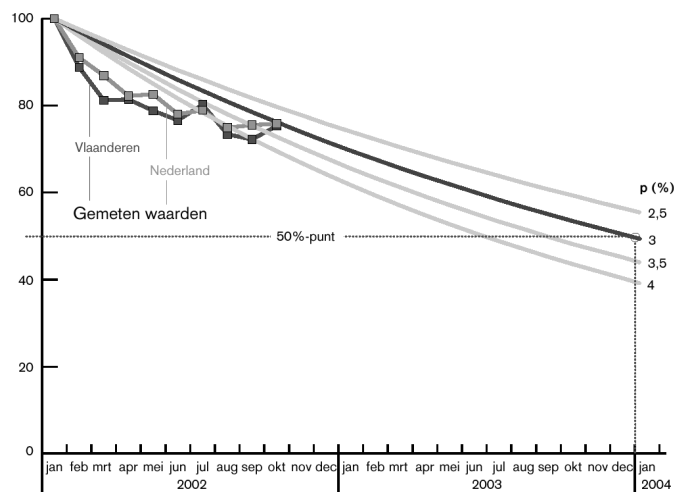
Zonder verdere toelichting vermelden we dat er tijdens de studieweek ook een continu model is opgesteld voor de eurodiffusie. Het betreft een stelsel differentiaalvergelijkingen om de diffusie te beschrijven. Deze vergelijkingen kunnen benaderd opgelost worden met de zogenaamde eindige elementen methode. Omdat diffusie een lokaal proces is, terwijl ook een belangrijk deel van het mengproces door niet-lokale vermenging (zoals vakanties) plaats vindt, is er een extra niet-lokale component toegevoegd.

De resultaten van de numerieke experimenten geven vertrouwen in het model: zo neemt het percentage Nederlandse munten in Nederland monotoon af tot de limietwaarde van 5%. Het percentage Belgische munten in Nederland neemt eerst toe voordat het monotoon daalt naar zijn limiet van 4%. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat Nederland en België buurlanden zijn. Natuurlijk hangt het precieze diffusieproces af van parameters die we uit de internetdata kunnen proberen te schatten.

**Nieuwe inzichten**

Een Markovketen is het voor de hand liggende model om de beweging van euromunten te modelleren. Continue modellen zijn hiervan de natuurlijke benadering. Beide modellen suggereren met de in februari 2002 geschatte parameters dat circa midden 2003 de helft van de munten in onze portemonnee buitenlands zal zijn.

Nu, eind 2002, kunnen we een paar nieuwe inzichten noemen. In het eurotijdperk lijkt het aantal munten dat iemand in zijn of haar portemonnee heeft op te lopen: van 11 munten met een totale waarde van 4,5 euro in februari, tot 23 munten ter waarde van 10 euro een half jaar later. De verwachting dat de diffusie tijdens de vakantieperiode sneller zou gaan blijkt achteraf niet te kloppen.



**Figuur 3** Percentage binnenlandse munten in Nederland en Vlaanderen waaruit een verband tussen de diffusiecoëfficiënt en de halfwaardetijd blijkt (bron: [1]).

Op grond van de data van de eerste negen maanden is de diffusiegraad  $d$  van 4% naar beneden bijgesteld naar 3%. Zie ook [1] en figuur 3. Dit correspondeert goed met het werkelijk aantal vreemde munten rond 1 december 2002: zowel in Nederland als in België was op dat moment zo'n 25% van de munten vreemd. De verwachting is dat rond januari 2004 de helft van de munten in Nederland van buitenlandse origine zal zijn. Blijkt dit niet te kloppen, dan denken we aan het credo van Finagle: *Wetenschap is waar, laat je niet misleiden door de feiten!*

**Dankwoord**

Dit is een bewerking van een artikel [2] geschreven door de eurodiffusieprojectgroep: Piet van Blokland, Lorna Booth, Kirankumar Hiremath, Michiel Hochstenbach, Ger Koole, Sorin Pop, Marieke Quant en Djoko Wirosoetisno. We bedanken de eurodiffusie-internetpaginagroep voor het opzetten van de internetpagina die de data levert, Jeanine Kippers van DNB voor het verstrekken van extra informatie en Richard Gill en Andreas Kyprianou voor advies op het statistische deel van het project.

**Referenties**

- 1 Geertje Hek, Misja Nuyens, Bob Planque, Harmen van der Ploeg en Erick Vermeulen, *Het grote internationale eurodiffusie-experiment*, *Natuur & Techniek* jaargang 70, 11 (2002), 56–62.
- 2 P. van Blokland, L. Booth, K. Hiremath, M. Hochstenbach, G. Koole, S. Pop, M. Quant, D. Wirosoetisno, *the euro diffusion project*, *Proceedings of the Fourty-second European Study Group with Industry* (2002)
- 3 De eurodiffusiesite: <http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie>. Deze cite bevat veel verdere informatie, meer theorie en interessante links.