Marinus Kaashoek
Divisie Wiskunde en Informatica,
Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081A, 1081 HV Amsterdam
kaash@cs.vu.nl

Afscheidsrede

Inspirerend, vernieu

Vrijdag 29 november 2002 heeft Rien Kaashoek zijn afscheidsrede 'Wiskunde: inspirerend, vernieuwend, betrokken' gehouden bij zijn aftreden als gewoon hoogleraar wiskunde aan de faculteit der exacte wetenschappen van de Vrije Universiteit. Hij is sinds 1966 aan de Vrije Universiteit verbonden en heeft naast zijn wetenschappelijke carrière veel voor de wiskundige gemeenschap betekend. Hij zet zich nadrukkelijk in voor een goede positionering van het Nederlandse wiskundige onderzoek. Vorig jaar heeft hij samen met Henk van der Vorst en Lex Zandee het rapport 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' geschreven, dat uitgebracht is door het nationaal Overleg Onderzoekscholen Wiskunde in samenwerking met de NWO Advies Commissie Wiskunde.

Morgen eindigt mijn dienstverband met de Vrije Universiteit, aanstaande zondag ben ik emeritus, en vandaag neem ik afscheid. Met velen van u heb ik mijn leven gedeeld: op verschillende niveaus hier binnen de universiteit, in het Thomas Stieltjes Instituut, in operator theory days en in andere nationale en internationale verbanden. Ik ben blij dat u gekomen bent. Dank ook voor de voordrachten die sommigen van u gisteren en vandaag ter gelegenheid van mijn afscheid hebben gegeven.

Dear Friends from abroad

Thank you for being here. Originally, I planned this occasion to be mainly a national affair. My sixtieth birthday, five years ago, had been an exciting international event [1], and I intended my VU-farewell to have a local character. Your presence here is a very pleasant and highly appreciated surprise. Thank you also for the lectures that you presented yesterday and earlier today. I am touched by the fact that Trevor West, Lothrop Mittenthal and David Lay came to Amsterdam specially for this occasion. The four of us met in the academic year 1965–1966 at the University of California at Los Angeles, which I was visiting on a ZWO-stipend. Since then, we have been friends.

Co-operation with Israel Gohberg

I am particularly happy with the presence of Israel Gohberg. With him I shared the greater part of my mathematical life. I want to recall briefly how our co-operation started and how it flourished. I knew his name from the very beginning of my mathematical research at Leiden, and his seminal work [2] on operator theory was a constant source of inspiration. We first met in 1971 at an international operator theory conference in Tihany organized by the famous Hungarian mathematician Szökevalvi-Nagy. Our meeting was not a great success. Gohberg, who at that time was the head of the functional analysis department of the Moldavian Academy of Science at Kishinev, did not speak English and I did not speak Russian, which made communication difficult. Completely unexpected and certainly not planned, we met again in the beginning of 1975 at the University of Maryland at College Park. I had just arrived at College Park for a sabbatical leave from the VU and intended to work with my host David Lay. Gohberg had left the Sovjet Union in 1974, had emigrated to Israel, and was in College Park for the first two months of 1975 as a guest of Seymour Goldberg, who I am happy to say is also here today.

During the two months that our visits overlapped, we had many discussions on problems in operator theory. Plans for a visit of Gohberg to the VU were developed. Early February of that year I wrote a letter to Nieuwland, who at that time was the chairman of our department of mathematics, and proposed to invite Gohberg for the Autumn semester of 1976. Nieuwland arranged the matter in less than two weeks. Gohberg's first period in Amsterdam ended with two large papers of the two of us, one on linearization appeared in the Journal of Functional Analysis [3] and was written jointly with David Lay, and the second [4], with Harm Bart, was the beginning of a new line of research in operator theory influenced by mathematical system theory.

At the end of 1976 it was decided that each year Gohberg would come to Amsterdam for two or three short periods, ranging from two to eight weeks. The contract would be for three years. In 1983 the three year contract was replaced by an appointment as a part time professor (buitengewoon hoogleraar in Dutch), which lasted until 1998 when Gohberg retired from the VU at the age of 70.

When I look back at my collaboration with Gohberg it is with great pleasure and satisfaction. The title of this lecture certainly fits this period. Many new ideas emerged, new students were attracted and joined our operator theory group, new connections were


Marinus Kaashoek

wend, betrokken

made, with colleagues in transport theory, with the mathematical system theory people and electrical engineers, and dissertations were written. Gohberg and I co-authored more than 100 papers, many jointly with other colleagues, among others Leonia Lerer and Peter Lancaster who also are here today. We co-authored five books, two jointly with Seymour Goldberg, one with Harm Bart, one with Freek van Schagen, and one with Ciprian Foias and Art Frazho (see [5]). Two other books are still in the pipeline, one was finished this week and is now in the hands of the publisher; the other still requires substantial work.

A long and successful collaboration cannot be based on common mathematical interests only; it requires also a basic mutual understanding and mutual trust. Both were present from the beginning and have been developed further over the years. It created a secure and enjoyable working environment. We, and many with us, had a great time.

Nieuwe dimensies, ruimer bereik

Vernieuwing en inspiratie in de wiskunde ontstaan vaak in interactie tussen verschillende gebieden, hetzij van binnen de wiskunde of van buiten. Grote doorbraken zijn op deze manier tot stand gekomen. Er zijn beroemde woorden die deze interactie tot uitdrukking brengen. *Geometrie* is zo'n woord. Algebraïsche meetkunde is ontstaan door een algebraïsering van de meetkunde en de naam verwijst dus naar een interactie tussen wiskundige deelgebieden onderling. Ook woorden als econometrie, mathematische fysica, wiskundige economie, mathematische logica, psychometrie brengen die interactie tot uitdrukking. Opvallend is dat in de loop van de tweede helft van de 20ste eeuw de interactie met wiskunde zich naar steeds meer wetenschapsgebieden heeft uitgebreid. Er wordt in dit verband zelfs gesproken van een revolutie [6].

De universitaire wiskundecurricula vermelden nu ook vakken als financiële wiskunde, wiskunde van bedrijfsprocessen, mathematische biologie. Onze faculteit kent een opleiding *Bedrijfswiskunde en informatica*. Op mijn bureau ligt een boek over mathematische fysiologie [7]. Men spreekt van een voortschrijdende mathematisering, van een ruimer bereik van de wiskunde. Er is niet alleen sprake van verbreding maar ook van verdieping. De interactie speelt zich af op een hoger niveau. Het oude onderscheid tussen zuivere en toegepaste wiskunde heeft aan betekenis ingeboet; meer dan voorheen vindt er verkeer in twee richtingen plaats. Wat ik u beschrijf is een internationaal verschijnsel dat men ook terug vindt in de omvangrijke nieuwe investeringen die de National Science Foundation in de VS doet ten behoeve van de wiskunde [8].

De Adviescommissie Wiskunde van NWO, de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, heeft voor die interactie tussen wiskundige gebieden onderling en met verwante gebieden daarbuiten de mooie naam *Wiskunde op Raakvlakken* bedacht. De attitude die dit label veronderstelt, plaatst de wiskundige in een aantrekkelijke positie. Het vergroot automatisch zijn betrokkenheid bij het gehele wetenschappelijke gebeuren en het maatschappelijk gebruik van de wiskunde.

Vrijere opvatting van wat axioma's zijn

Het groeiend betrokken-zijn van de wiskunde bij andere disciplines heeft een principiële kant. Die betrokkenheid werd mede mogelijk dankzij een ingrijpende verandering in het wiskundig denken die stap voor stap plaats vond in de 19de en het begin van de 20ste eeuw. Een aspect van die verandering is een vrijere opvatting van wat een axioma is.

In de moderne wiskunde zijn axioma's niet meer, zoals oorspronkelijk in de Euclidische meetkunde, de voor iedereen onmiddelijk duidelijke elementaire waarheden die verder geen bewijs behoeven. Ze zijn gereduceerd tot afspraken, niet bewezen proposities, die de onderlinge relaties tussen de wiskundige objecten vastleggen. Deze veranderde opvatting van wat axioma's zijn, verschaft de wiskundige een enorme vrijheid in het wiskundig modelleren. Immers wanneer men voor een stelsel objecten inziet, ontdekt, dat deze voldoen aan alle afspraken vastgelegd in de axioma's van een wiskundige theorie, dan gelden voor dat stelsel objecten ook alle stellingen, alle conclusies, die uit die axioma's binnen de betreffende theorie zijn afgeleid. Het verklaart het multi-inzetbaar zijn van een wiskundige theorie, het altijd weer verrassende feit dat verschillende verschijnselen met eenzelfde mathematisch model kunnen worden behandeld.

Een schokkende waarneming

De nieuwe dimensies en het ruimer bereik

In 1964 promoveerde Marinus Kaashoek cum laude op het proefschrift *Closed linear operators on Banach spaces*. Zijn promotor A.C. Zaanen feliciteert hem met het resultaat.

waar ik eerder over sprak zijn ook duidelijk waarneembaar in het gebied waarvoor ik aan deze universiteit ben benoemd. Ik zal u daar iets over vertellen.

Mijn leeropdracht aan de VU betreft functionaalanalyse en operatorentheorie, met een accent op het tweede gebied. Beide gebieden behoren tot het grotere gebied van de wiskundige analyse waarin van oudsher integraal- en differentiaalvergelijkingen en vergelijkingen met oneindig veel onbekenden een belangrijke plaats innemen. Kenmerkend voor de analyse is een fatsoenlijke omgang met oneindig. Het belang daarvan illustreer ik met een schokkende waarneming.

Hier is een voorbeeld van een oneindig stelsel lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_4 &= 0 \\ \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{16}x_5 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De drie stippeltjes daar onderaan staan voor enzovoorts, enzovoorts, ad infinitum. Als we voor x_1 één of ander getal nemen, bijvoorbeeld $x_1 = 2$, dan kunnen we de tweede onbekende x_2 oplossen uit de eerste vergelijking en vinden $x_2 = 4$. Nu x_2 bekend is, lossen we x_3 op uit de tweede vergelijking; we vinden $x_3 = 8$. Met $x_3 = 8$ en de derde vergelijking berekenen we dat $x_4 = 16$. We gaan zo recursief verder. We vinden op deze manier een oplossing van dit oneindige stelsel vergelijkingen; een oplossing die begint met $x_1 = 2$. Laten we nu eens voor de aardigheid al die vergelijkingen bij elkaar optellen. In het rechterlid staan alleen maar nullen. De som van de rechterleden is dus gelijk aan nul. In het linkerlid valt de x_2 in de eerste vergelijking weg tegen de x_2 in de tweede vergelijking. Evenzo valt de term met x_3 uit de tweede vergelijking weg tegen de term met x_3 in de derde. Enzovoorts en enzovoorts. De som van de linkerleden is dus x_1. Na optelling van alle vergelijkingen vinden we dus dat $x_1 = 0$. Maar x_1 was gelijk aan 2. We moeten concluderen dat $0 = 2$. Hier is iets mis. Ik laat het aan u over te bedenken wat er mis is. Doel van dit voorbeeld was u een oneindig stelsel lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden te laten zien en tevens duidelijk te maken dat in het omgaan met zulke stelsels voorzichtigheid geboden is [9].

Functionaalanalyse en operatorentheorie

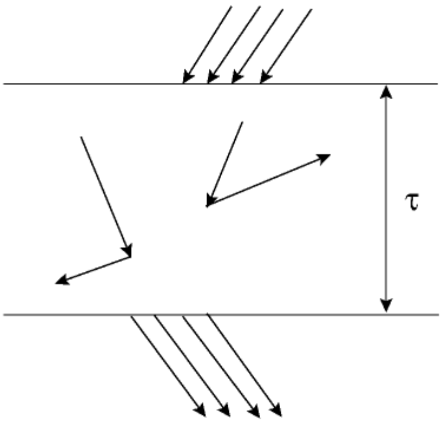
Ik zal nu enkele karakteristieken van functionaalanalyse en operatorentheorie bespreken. Eerst twee korte omschrijvingen. Functionaalanalyse betreft de studie van rij- en functieruimten, zoals Lebesgue- en Hardyruimten, of meer in het algemeen van Hilbert- en Banachruimten en andere abstracte meetkundige structuren zoals topologische vectorruimten. In deze context is een operator een transformatie werkend tussen rij- of functieruimten. Deze twee omschrijvingen zullen voor velen weinig betekenen. Duidelijk zal zijn dat er een directe relatie tussen deze twee deelgebieden is, met de woorden rijruimte (ruimte van rijen) en functieruimte (ruimte van functies) als verbindende schakel. Tot 1967 vormden functionaalanalyse en operatorentheorie in de *Mathematics Subject Classification* zelfs één gebied, en het is nog steeds zó dat een inleiding in de operatorentheorie ook heel goed dienst kan doen als een inleiding in de functionaalanalyse.

Eenvoudige voorbeelden van operatoren zijn differentiëren, integreren en verschuiven:

- differentiëren: $f(x) = 2x^3 + 1 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f'(x) = 6x^2,$
- integreren: $f(x) = 2x^3 + 1 \xrightarrow{\int_0^a} F(a) = \frac{1}{2}a^4 + a,$
- verschuiven: $(f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots) \xrightarrow{V} (0, f_1, f_2, f_3, \ldots).$

De eerste twee zijn de klassieke transformaties uit de differentiaal- en integraalrekening, de derde is de verschuivinsoperator die zeer tot de verbeelding spreekt. Het beeld bevat steeds een volledige kopie van het orgineel, een effect dat velen zullen kennen van het beroemde cacaobusje van Droste [10].

De woorden rij- en functieruimte zijn karakteristiek voor functionaalanalyse en operatorentheorie. Het is hier niet de plaats precies uit te leggen wat die woorden betekenen. Ik volsta met een paar kanttekeningen. De introductie van rij- en functieruimten heeft verschillende achtergronden. De eerste is de constatering dat onaangename contradicties van het type zoals we eerder tegenkwamen, en nog erger, kunnen worden vermeden als we niet alle rijen of alle functies toelaten maar ons beperken tot geschikte klassen [11]. Een tweede element, dat ook goed aansluit bij het eerste, is het besef dat wiskundige objecten, in dit geval rijen en functies, soms beter bestudeerd kunnen worden als elementen van een groter geheel, als elementen van een collectief, waarbij afgezien wordt van specifieke individuele eigenschappen. Tenslotte door een klasse van functies of rijen een meetkundige structuur te geven, kunnen alle verworvenheden van de meetkunde gebruikt worden om analytische problemen op te lossen. Men ziet die trend al in een beroemde publikatie [12] van Erhard Schmidt uit 1908 over de oplossing van lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden. Het eerste hoofdstuk van dat artikel heeft als titel *Geometrie in einem Funktionenraum*, en de eerste paragraaf in dat hoofdstuk heeft als ondertitel *Die*



Figuur 1 Lineaire transporttheorie modelleert het transport van deeltjes in een fysisch medium.

Pythagoräische Lehrsatz und die Besselsche Ungleichung. De stelling van Pythagoras in functieruimten: is dat niet een fascinerende gedachte? Hier is volop gebruik gebruik gemaakt van de modelleringsvrijheid waarover ik eerder sprak.

Functionaalanalyse en operatorentheorie staan dus voor een meetkundige aanpak van analytische problemen. Woorden als verschuiving, draaiing, rotatie, spiegeling, symmetrie, isometrie, dilatie, projectie, contractie, gelijkvormigheid en dergelijke, die een typische meetkundige context hebben, deden daarmee hun intrede in de wiskundige analyse. Wiskunde op raakvlakken dus. Functionaalanalyse en operatorentheorie vertegenwoordigen ook een visie, een programma van fundamenteel onderzoek. Zij zijn krachtige instrumenten geworden om wiskundige problemen op te lossen. Is dat wel zo? Het is beter nu anderen aan het woord te laten.

Mechanica, functionaalanalyse en quantumfysica

Het eerste citaat betreft de mechanica en is afkomstig uit een bijdrage van H.J. Greenberg van het IBM Research Center aan het boek [13] *Curricula in Solid Mechanics* uit 1961. Ik citeer:

" [The subject matter of functional analysis] is an aspect of modern mathematical analysis which is very much in vogue and with which we should become familiar."

Merk op dat hier met 'we' niet de wiskundigen worden bedoeld maar de onderzoekers in solid mechanics, de mechanica van het gedrag van vaste lichamen in relatie tot hun fysische omgeving. Waarom zouden die zich verdiepen in functionaalanalyse? Hier is het antwoord van de auteur. Het bevat twee curieuze argumenten.

"For one thing, unless we do, we will soon be unable to converse with mathematicians about topics which really concern us, such as the theory of differential equations, due to the introduction of much new terminology as well as new concepts. *[Let op dat "which really concern us" : het gaat dus niet in de eerste plaats om functionaalanalyse.]* For another thing, the emphasis in functional analysis on the operators and their abstract properties is closely related to, and, in fact, was in large part inspired by the problems of quantum mechanics in physics."

Hier scoort de auteur een punt. Het abstracte begrip van een operator en de axiomatisering van het begrip Hilbertruimte hebben we te danken aan het wiskundegenie John von Neumann die beide in 1927 gebruikte voor zijn beroemde *Mathematische Begründung der Quantummechanik* [14] waarmee hij ook in één klap een lang lopende controverse in de theoretische natuurkunde beslechtte. De conclusie is (en ik citeer weer): "Thus we have here a promising new level of interplay between mathematical and physical ideas which may well provide a key to a deeper understanding of both, just as did calculus in a previous era."

Transporttheorie

De betekenis van functionaalanalyse komt al beter naar voren in het voorwoord van het boek [15] over *Spectral methods in linear transport theory* van Kaper, Lekkerkerker en Hejtmanek uit 1982.

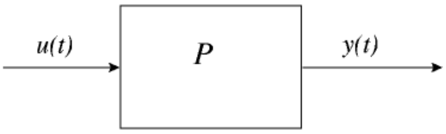
Het woord 'transport' slaat hier op migratie van deeltjes in een fysisch medium. Bijvoorbeeld een stroom van elektronen in een metalen strip, de diffusie van neutronen in een nucleaire reactor, de verstrooiing van röntgenstralen in een levend weefsel of dat van lichtdeeltjes in een stellaire atmosfeer. Botsing van deeltjes kan resulteren in verstrooing, absorptie of productie van nieuwe deeltjes. Het mathematische model voor de analyse van deze verschijnselen is een integro-differentiaalvergelijking. De onbekende is een dichtheidsfunctie. Er zijn randvoorwaarden: de dichtheid van de inkomende deeltjes en van de uitgaande deeltjes zijn beide bekend. Het probleem is uit te vinden wat zich afspeelt in het medium. Omdat verstrooiing in alle ruimtelijke richtingen kan plaats vinden wordt het probleem door oneindig veel parameters bepaald en heeft daarmee een oneindig dimensionaal karakter.

Nu het citaat: "Linear transport theory, as a branch of applied mathematics, has really come of age in the last decade. [We schrijven 1982.] It has lost the innocence it once had, when folklore provided the common wisdom and nobody was afraid to interchange limit and integral. Now, transport theory is serious business, and those who don't see the beauty of Hilbert space fear to speak up, lest they be considered out of touch with reality."

De auteurs hadden nog een andere reden hun boek te schrijven. "This development provided us with another motivation for writing a monograph, because nobody should doubt that there are indeed beautiful flowers to be found in Hilbert space (as well as Banach space). We have tried to make them visible, for our friends in transport theory and for other applied mathematicians who happen to stroll through our garden."

Ik herinner me ook nog heel goed het enthousiasme waarmee we indertijd (22 novem-

Marinus Kaashoek (rechts) in College Park met Israel Gohberg (1975)



Figuur 2 Input-outputsysteem: $u(t)$ is de input op tijdstip t, $y(t)$ is de output op tijdstip t.

ber 1977) in ons wekelijks seminarium luisterden naar een voordracht van Lekkerkerker, toen hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, over de lineaire transporttheorie en ook de daarop volgende uitvoerige discussie over relaties met ons eigen onderzoek. We herkenden één van zijn hoofdstellingen onmiddellijk als een bijzondere variant [16] (met onbegrensde operatoren) van een meetkundig ontbindingsprincipe dat wij eerder hadden bedacht, met andere toepassingen in gedachten. Van enige opwinding was zeker sprake. Vanaf dat moment had de transporttheorie mijn belangstelling.

Syteem- en regeltheorie

Mijn derde citaat betreft de mathematische systeem- en regeltheorie. Vorig jaar verscheen de bundel *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* [17]. Een boek van meer dan 1200 pagina's waarin door verschillende auteurs in 63 artikelen een beeld wordt gegeven van, zoals in de inleiding wordt gezegd, "the great varity and the vitality of mathematics as we enter the new millennnium". Artikel 9 heeft de titel *New issues in the mathematics of control*, en is geschreven door Roger Brockett, één van de coryfeeën van de regeltheory. De tweede paragraaf van dat artikel, direct na de inleiding, heeft als titel *Systems as Operators* en begint aldus:

"For us, a system is something that has inputs and outputs, coupled by dynamics. It is a common engineering idea which facilitates the design of television sets, jet engines, space stations, etc. The study of systems differs from the study of fields such as celestial mechanics in that autonomous behavior is only part of what is of interest; of equal or more importance is the way the system maps exogenous inputs to the effects, or outputs as they are usually called."

Bij deze omschrijving hoort een plaatje dat standaard wordt gebruikt in de regeltheorie (zie figuur 2). De $u(t)$ boven de pijl links staat voor de input op het tijdstip t, het inkomende signaal; de $y(t)$ boven de pijl rechts voor de output, het uitgaande signaal. De doos met de hoofdletter P symboliseert de koppeling tussen de twee. De P staat voor proces of het Amerikaanse woord 'plant'. Bij de doos kan men denken aan een industrieel of economisch regelsysteem, een fysisch of biologisch netwerk en bijbehorende sensoren en aandrijvers. De signalen $u(t)$ en $y(t)$ zijn opgebouwd uit verschillende grootheden, zoals sturingsvariabelen maar ook ruis en storingen, die in de tijd veranderen.

Ruwweg gesproken is het doel van de regeltheorie er voor te zorgen dat met een zekere input u een gewenste output y wordt gegenereerd. Wat betekent dat wiskundig? Hier is het vervolg van het citaat.

"Mathematically speaking, [the study of systems] lies in a domain where the theory of differential equation of the evolutionary type meets functional analysis. Because systems have inputs and outputs there is the possibility of thinking of them as operators and making use, where possible, of composition and inversion as suggested by work on various operator algebras. Indeed, the composition of systems, inversion of systems, and the solvability of operator equations of this type immediately arise when one analyzes feedback systems [...]. This point of view has played an important role in many aspects of control theory and is basic to the systems point of view."

Interdisciplinair onderzoek

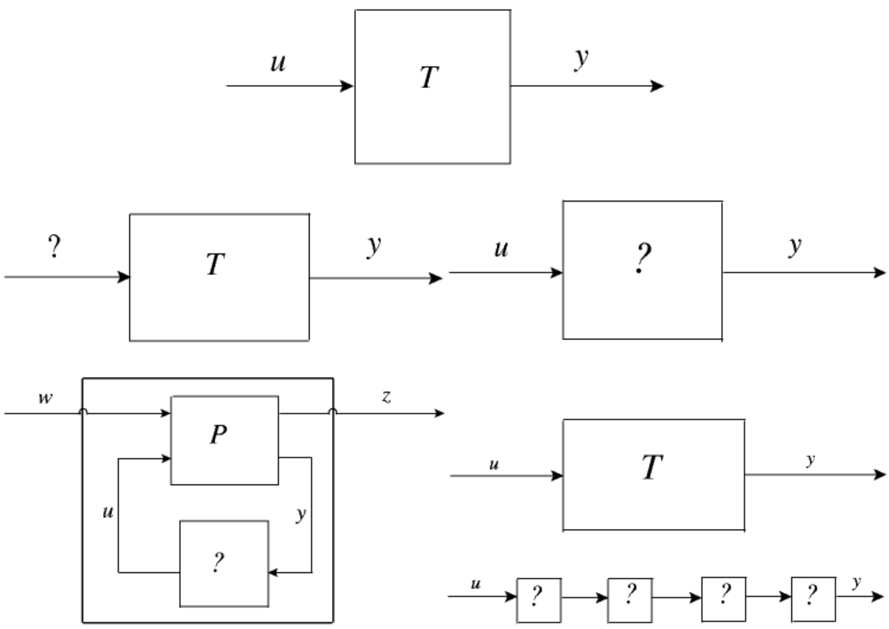
Ik ben universitair getraind en opgeleid in functionaalanalyse en operatorentheorie, in Leiden gepromoveerd en leerling van A.C. Zaanen. De wereld van de ingenieurs was nieuw voor mij. Een aparte inspanning was nodig om daarin thuis te raken. Collega Malo Hautus van de TU-Eindhoven hebben we indertijd gevraagd om voor onze groep en andere geïnteresseerden een 'crash course' in moderne regeltheorie te geven (voorjaar 1979).

Gohberg reisde naar Zürich om Kalman, ook één van de coryfeeën van de regeltheorie, te ontmoeten. We ontdekten collega Patrick Dewilde van de afdeling Electrotechniek van de TU-Delft of misschien was het net andersom en ontdekte hij ons. Met hem en zijn groep hadden we in 1978 een enerverende tweedaagse conferentie wat onder andere ons eerste artikel [19] in SIAM Journal of Control opleverde. We leerden alle moeilijkheden die aan interdisciplinair onderzoek zijn verbonden. Verschil in stijl en cultuur, verschil in doelstelling. Wij wiskundigen wilden de zaken wel goed wiskundig begrijpen en wiskundig goed behandelen; dat is niet altijd het eerste oogmerk van de ingenieurs die eerder denken aan ontwerp en gebruik dan aan theorie en bewijs. De gemeenschappelijke interesse, die onmiskenbaar aanwezig was, maakte veel goed.

Drie thema's

Ik besluit met een ruwe schets van drie thema's uit de operatorentheorie die centraal hebben gestaan in mijn onderwijs en onderzoek. Ik karakteriseer ze met de woorden *inverteren*, *reconstrueren* en *factoriseren* en breng ze in beeld met behulp van hetzelfde plaatje dat ik eerder voor een input-outputsysteem gebruikte, zie figuur 3, hieronder.

De doos met de hoofdletter T erin staat nu voor de transformatie, de operator. De u



Figuur 3 Bovenaan: een operator; midden links: het inverteren van een operator; midden-rechts: de reconstructie van een operator; linksonder: het vinden van een regelaar; rechtsonder: het ontbinden van een operator in factoren.

boven de pijl links staat voor het object, dat wordt getransformeerd en de y boven de pijl rechts voor het resultaat van de transformatie.

In figuur 3, midden-links staat het plaatje dat past bij het eerste thema. De operator T en het object y zijn gegeven. Het probleem is in de beginruimte een orgineel u te vinden dat door T in y wordt omgezet. We noemen u dan de *oplossing* van de vergelijking $Tu = y$. Denken we aan u als een inkomend signaal en aan y als een uitgaande signaal, dan betekent het inverteringsprobleem niets anders dan de reconstructie van een inkomend signaal uit het waargenomen signaal en het belang van het thema is onmiddelijk duidelijk.

Het tweede thema breng ik in beeld met het plaatje in figuur 3, midden–rechts. Het probleem is een operator te reconstrueren op grond van partiële informatie over zijn gedrag. De operator is de onbekende. We willen in de doos kijken zonder deze te openen. In figuur 3, linksonder is een voorbeeld van zo'n probleem uit de regeltheorie: construeer een regelaar, de doos met het vraagteken erin, zó dat de invloed van het inkomend signaal w, nu op te vatten als een storing, op het uitgaande signaal z minimaal is. Dit regelprobleem heeft zeer boeiende aspecten, variërend van puur operatortheoretisch tot praktische problemen van ontwerp en constructie. Het kwam in de jaren tachtig op de agenda van functionaalanalyse en operatorentheorie door het werk van Helton, Zames en een prachtig boekje van Bruce Francis (zie [20] en de verwijzingen daarin). Het heeft een groot aantal jaren de interactie tussen de operatortheoretici en ingenieurs gedomineerd.

In het derde thema gaat om het uiteenleggen, het ontbinden, van een operator in een product, een serieschakeling, van elementaire operatoren, de dozen met de vraagtekens erin (figuur 3, rechtsonder). Kan een operator ontbonden worden in eenvoudigere operatoren, zoals een getal ontbonden kan worden in priemfactoren of een veelterm in lineaire factoren? Welke operatoren zijn als eenvoudig aan te merken? Dit thema verschaft gereedschap om de twee andere te bewerken.

De drie thema's staan voor een wereld van vragen en problemen met als sleutelwoorden: oplosbaarheid, uniciteit, formules, algorithmen, numerieke procedures, kwalitatieve eigenschappen, modellering, approximatie en modelreductie, invariante deelruimten, kanonieke vormen en bijbehorende invarianten, robuustheid. Dit was in grote lijnen mijn werkterrein.

De drie woorden inspirerend, vernieuwend, betrokken heb ik overgenomen van een brochure [21] van de Vrije Universiteit uit 2002 waarmee de universiteit haar beleid voor de toekomst uiteen zet. Ik spreek daarmee tevens mijn dank uit aan deze universiteit waar ik zeer prettig gewerkt heb.

Instroom

Niet onvermeld mag blijven dat de Nederlandse wiskunde behalve nieuwe mogelijkheden ook een zeer groot probleem heeft. Dit probleem wordt veroorzaakt door de gestaag dalende instroom van studenten bij de exacte vakken en de koppeling van de financiering aan instroom en uitstroom van studenten.

De gestage daling van de instroom staat op gespannen voet met de onmiskenbare grotere vraag naar wiskundig onderzoek. Als de bron opdroogt, de fundamenten niet worden onderhouden, dan loopt het spaak. Het verbaast me hoe gemakkelijk de politiek aan deze bedreigende problematiek voorbij gaat. De onderzoekscholen op het gebied van de wiskunde hebben samen met de Adviescommissie Wiskunde van NWO een strategie ontwikkelt om het tij te keren. De nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* [22], waarin deze nieuwe strategie wordt beschreven, biedt een aantrekkelijk scenario voor de toekomst.

Referenties

1 H. Bart, I. Gohberg, and A.C.M. Ran (Eds.), *Operator Theory and Analysis. The M.A. Kaashoek anniversary volume*, OT **122**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

2 For a review of Gohberg's achievements, his curriculum vitae and list of publications see: Part A of *The Gohberg Anniversary Collection*, Volume I (Eds.: H.Dym, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, and P. Lancaster), OT **40**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1989, and *Recent advances in operator theory* (Eds.: A. Dijksma, M.A. Kaashoek, and A.C.M. Ran), OT **144**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, pages xiii–lvii.

3 I. Gohberg, M.A. Kaashoek, and D.C. Lay, Equivalence, linearization and decomposition of holomorphic operator functions, *J. Funct. Analysis* 28 (1978), 102–144.

4 H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek, *Minimal factorization of matrix and operator functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.

5 URL-adres van mijn web-pagina: http://www.cs.vu.nl/~kaash.

6 S.M. Verduyn Lunel, *In beweging*, tekst intreerede Vrije Universiteit, Amsterdam, 30 october 1998, pagina 16.

7 J. Keener, and J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

8 De National Science Foundation (NSF) in de VS heeft de wiskunde uitgekozen als een gebied voor *priority area investment*, hetgeen de afgelopen twee jaar heeft geleid tot een jaarlijkse toename van het budget met meer dan 20%. Hiernaast heeft de NSF onlangs besloten tot de oprichting van drie nieuwe onderzoeksinstituten voor de wiskunde. Ook in ons omringende landen is sprake van extra investeringen voor het wiskundeonderzoek. In Duitsland is voor de wiskunde onlangs ME 50 extra beschikbaar gesteld vanuit de UMTS veiling. In Engeland heeft de EPSRC sinds 1997 het budget voor de discipline wiskunde met 139% verhoogd.

9 Een belangrijk opstakel is het feit dat het niet altijd mogelijk is oneindige matrices te vermenigvuldigen en zelfs als vermenigvuldiging wel mogelijk is dan moet men er op bedacht zijn dat het product van oneindige matrices niet associatief is.

10 H.Bart, *Verschuivingen*, tekst intreerede Erasmus Universiteit, Rotterdam, 7 februari, 1985, pagina 20 e.v.; het daar vertelde verhaal over het *Hilberthotel* kan men tegenwoordig in andere vorm ook vinden op het WEB (*Welcome to hotel infinity*, http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/infinity/inhotel.html). De verschuivingsoperator is wiskundig van groot belang, zie: N.K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren **273**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

11 A.F. Monna, *Functional analysis in historical perspective*, Oosthoek Publ. Co., Utrecht, 1973.

12 E. Schmidt, über die Auflössung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. del Circolo Matematica di Palermo* **25** (1908), 53–77.

13 H. Liebowitz and J. M. Allen (Eds.), *Curricula in solid mechanics*, bijdrage van H.J. Greenberg (IBM Research Center), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1961, pagina 111.

14 J. von Neumann, Mathematische Begründung der Quantummechanik, *Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1927), 1–57.

15 H.G. Kaper, C.G. Lekkerkerker, and J. Hejtmanek, *Spectral methods in linear transport theory*, OT **5**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1982, pagina's ix, x.

16 Sporen van de discussie vindt men terug in paragraaf 5.1 van [15].

17 B. Engquist and W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

18 R. Brockett, *New issues in the mathematics of control*, in: [17], pp. 89–219.

19 H. Bart, I. Gohberg, M.A. Kaashoek, and P. Van Dooren, Factorizations of transfer functions, *SIAM J. Control and Optimization*, **18** (1980), 675–696.

20 B.A. Francis, *A course in H_∞ control theory*, Lecture notes in Control and Information Sciences **88**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

21 *De Vrije Universiteit "Inspirerend, vernieuwend en betrokken"*, Vrije Universiteit, Dienst Communicatie, Amsterdam, februari 2002.

22 *Nieuwe dimensies, ruimer bereik*, uitgebracht door het nationaal Overleg Onderzoekscholen Wiskunde in samenwerking met de NWO Advies Commissie Wiskunde met ondersteuning van het bureau NWO (redactie: M.A. Kaashoek, H.J. van der Vorst, L. Zandee; eindredactie: C.G. Zaal en A. Hafkenscheid), april 2002.