UWC Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

In het bos staat een aantrekkelijke paddestoel die echter zo giftig is dat een eekhoorntje er van dood gaat als het er meer dan de helft van opeet. Eekhoorntje 1 snoept toch van de paddestoel en even later doet eekhoorntje 2 hetzelfde. We hebben niet gezien hoeveel ze aten, maar de volgende dag zien we ze vrolijk door het bos huppelen. Hoeveel van de paddestoel verwachten we nog aan te treffen?

Opgave B

Bepaal $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \cos k$ en $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \cos k$.

Opgave C

Een *harmonische graaf* is een samenhangende, eindige graaf zonder lussen en met enkelvoudige takken, waarbij aan iedere knoop v een natuurlijk getal $n(v)$ is toegewezen zodat

$$2n(v) = \sum_w n(w)$$

voor alle knopen v, waarbij de som genomen wordt over alle knopen w die verbonden zijn met v. Geef alle harmonische grafen die $1-2-3$ als deelgraaf bevatten.

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
J.vanNeerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Editie 2002/2

Op de ronde 2002/2 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 10 inzendingen.

Opgave 2002/2-A

Zij p een oneven priemgetal en zij $a \geq 2$ en $m \geq 1$ geheel. Toon aan: als $a^m \equiv 1 \mod p$ en $a^{p-1} \equiv 1 \mod p^2$, dan is $a^m \equiv 1 \mod p^2$.

Oplossing Deze opgave werd door alle tien inzenders correct opgelost en door velen als volgt gegeneraliseerd: als $a^m \equiv 1 \mod p$ en $a^{p-1} \equiv 1 \mod p^n$ voor een zekere $n \geq 2$, dan is $a^m \equiv 1 \mod p^n$. De tweede conditie kan voorts worden afgezwakt tot $a^b \equiv 1 \mod p^n$, mits p geen deler is van b. Dit werd bewezen door Mark Veraar (met een iets sterkere aanname op b) en het team Hendrik Hubrechts-Steven Delvaux. Laatstgenoemden toonden zelfs aan dat

$$\mathrm{ord}_p(a^b - 1) = \mathrm{ord}_p(a^{p-1} - 1) + \mathrm{ord}_p(b),$$

waarbij $\mathrm{ord}_p(k)$ het aantal factoren p in een getal k aangeeft. Het volgende snelle bewijs van de oorspronkelijke opgave is ook van hen.
Omdat $a^m \equiv 1 \mod p$, geldt

$$\alpha := 1 - a^m \equiv 0 \mod p \qquad \text{en} \qquad \beta := \sum_{k=0}^{p-1} a^{km} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1 \equiv 0 \mod p\,.$$

Deze congruenties leiden tot $1 - a^{pm} = \alpha \cdot \beta \equiv 0 \mod p^2$, en dus $a^{pm} \equiv 1 \mod p^2$. Samen met $a^m \equiv a^{pm} \mod p^2$, wat volgt uit $1 \equiv a^{p-1} \equiv a^{(p-1)m} \mod p^2$, geeft dit $a^m \equiv 1 \mod p^2$.

UWC oplossingen

Opgave 2002/2-B
Zij $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Voor alle paren natuurlijke getallen (i, j) met $1 \leq i < j \leq n$ kiezen we een rationaal getal $q_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Veronderstel dat er reële n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$x_i y_j - x_j y_i = q_{i,j} \qquad (1 \leq i < j \leq n). \tag{1}$$

Toon aan dat er dan eveneens twee rationale n-tallen bestaan die voldoen aan het stelsel veeltermvergelijkingen (1).

Oplossing De teams Frobenius en Hendrik Hubrechts-Steven Delvaux vonden een generalisatie waarbij oplossingen in een deellichaam worden gevonden als gegeven is dat oplossingen in het lichaam bestaan. Van de laatstgenoemnden is de volgende korte oplossing van het oorspronkelijke vraagstuk.
Het ligt voor de hand dat het makkelijker werken is met de vectoren v_i, waarbij $v_i := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. We mogen veronderstellen dat niet alle $q_{i,j}$ nul zijn. We stellen dat $q_{1,2} \neq 0$; in de andere gevallen loopt het bewijs analoog.
We zien dat v_1 en v_2 lineair onafhankelijk zijn, aangezien $q_{1,2}$ precies hun determinant is. We kunnen dan de (unieke) lineaire afbeelding $B : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ nemen zodat $Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{1,2} \end{pmatrix}$, of ook $B(v_1\, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_{1,2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $\det(B) = 1$.
Definieer nu ook $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ voor $i \geq 3$. Voor elke $i < j$ krijgen we:

$$q_{i,j} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \left|B^{-1}\right| \cdot \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Bijgevolg vormen ook de (reële) n-tallen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ een oplossing van het gegeven stelsel vergelijkingen. Dit geeft volgende 'oplossingsmatrix':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ 0 & q_{1,2} & b_3 & b_4 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Aangezien de determinant van elk tweetal kolommen rationaal moet zijn, zien we nu eenvoudig dat a_i voor $i \geq 3$ rationaal is door de vergelijking met $q_{2,i}$ te bekijken, en analoog die met $q_{1,i}$ voor b_i.
Merk op dat bovenstaand bewijs bovendien toelaat de rationale oplossing te berekenen, immers

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Opgave 2002/2-C
Voor gehele $m \geq 1$ en reële $x \in (-1, 1)$ definiëren we

$$G_m(x) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}).$$

Ga na dat de $G_m(x)$ goed gedefinieerd is, toon aan dat de limiet $\lim_{x\uparrow 1}(1 - x) \ln G_m(x)$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Oplossing We geven de oplossing van het team Frobenius.
Eerst gaan we na dat $G_m(x)$ goed gedefinieerd is. Zij $m \geq 1$ geheel en $x \in (-1, 1)$ reëel. Een voldoende voorwaarde voor de convergentie van $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn})$ is dat $\sum_{n=1}^{\infty} |x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}|$ convergeert. Dit laatste is gemakkelijk te controleren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{m} x^{nk} \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |x|^{nk} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{nk},$$

en reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{nk}$ convergeert omdat $|x| < 1$.

We laten nu zien dat, voor alle $m \geq 1$,

$$\lim_{x \uparrow 1}(1-x)\log G_m(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{m}{m+1}.$$

Met behulp van de meetkundige reeks en de Taylorreeks van $y \mapsto \log(1-y)$ zien we gemakkelijk dat

$$\log G_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(x^{nk} - x^{(m+1)nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x^k}{1-x^k} - \frac{x^{(m+1)k}}{1-x^{(m+1)k}}\right).$$

Vermenigvuldigen met $1-x$ geeft

$$(1-x)\log G_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x^k}{1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}} - \frac{x^{(m+1)k}}{1+x+x^2+\ldots+x^{(m+1)k-1}}\right),$$

zodat

$$\lim_{x \uparrow 1}(1-x)\log G_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(m+1)k}\right) = \frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{m}{m+1}.$$

De verwisseling van sommatie en limiet is toegestaan: het is gemakkelijk na te gaan dat de reeks voor $(1-x)\log G_m(x)$ uniform convergeert op het interval $[0, 1]$.

Uitslag Editie 2002/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Team Frobenius (Utrecht)	10	10	12	130
2.	Team Hendrik Hubrechts (Leuven)	11	10	10	123
3.	Team Gerben Stavenga (Utrecht)	10	8	9	107

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Filip de Smet	350
2.	Roelof Oosterhuis	292
3.	Team Hendrik Hubrechts	238
4.	Mark Veraar	208
5.	Jan Maas	200

Samenvoeging van de Universitaire Wiskunde Competitie en de Problemenrubriek

Met ingang van het volgende jaar worden de Universitaire Wiskunde Competitie en de Problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand wordt gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden. De rubriek komt onder redactie van Jan van Neerven en Robbert Fokkink.