

Fred Goffree

Bremlaan 16

3735 KJ Bosch en Duin

f.goffree@fi.uu.nl

De opbrengst

# Wiskundendidactiek in Nederland

In het septembernummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde heeft Fred Goffree een beschrijving gegeven van de ontwikkeling van de Nederlandse na-oorlogse wiskundendidactiek. Als leidraad gebruikte hij de verschillende proefschriften die er op dit terrein zijn verschenen. Het is opvallend dat het accent van het onderzoek zich in een halve eeuw heeft verplaatst van beschouwingen over de leraar naar de relatie leerling-leerstof. Goffree positioneert de onderzoeken in de didactische driehoek en staat uitgebreid stil bij alles wat het onderzoek heeft opgeleverd.

In het voorgaande overzicht heeft men een globale indruk kunnen krijgen van negentien verschillende, en prominente didactische onderzoeken van de afgelopen vijftig jaar. De onderzochte problematiek, de context waarin het onderzoek plaatsvond, enkele methodologische overwegingen, de achtergrond van de onderzoeker en zijn (haar) algemeen onderwijskundig referentiekader werden summier aangeduid. Om nu nog wat dieper op enkele aspecten van didactisch onderzoek in te kunnen gaan, willen we nagaan wat dit onderzoek heeft opgeleverd. We kijken achtereenvolgens naar bijdragen aan de didactiek van de wiskunde, methodologische gezichtspunten en de rol en positie van de wiskundig-didactische onderzoeker.

## Bijdragen aan de didactiek

Didactisch onderzoek, dat zal hiervoor duidelijk zijn geworden, heeft in alle gevallen tot (uiteindelijk) doel de praktijk (van het wiskundeonderwijs) te verbeteren. We zagen dat er op alle posities in de didactische driehoek

kan worden aangevangen met ontwikkel- en onderzoekswerk op het micro-didactisch niveau van de schoolklassen. En daar draait het om het leren van leerlingen, de kwaliteit van hun leerprocessen en het niveau van hun leerresultaten. Wil de didactisch onderzoeker het wat grootser aanpakken, en op meso-didactisch niveau verbeteringen aanbrengen, dan moet een positie op enige afstand van de didactische driehoek worden gekozen. Maar hoe het ook zij, de elementen ervan geraken ook dan niet geheel uit zicht (zie figuur 1).

Zo gezien moet het didactisch onderzoek uit voorgaande jaren in elk geval iets hebben bijgedragen aan de praktijk. Nu eens wordt er iets (een didactische werkvorm, werk materiaal voor leerlingen) ontworpen op basis waarvan onderzoek kan worden gedaan, dan weer is het juist het ontwerp zelf (een uitleg, een leergang, een toepassing) dat in de onderwijs-leersituatie onderzocht wordt. In het laatste geval spreekt men van 'flankerend onderzoek', vaak in de context van innovatie. We kunnen in het eerstgenoemde geval dan spreken van 'flankerend ontwerpwerk', in de context van didactisch onderzoek. Dergelijke flankerende ontwerpen vormen in bepaalde gevallen bijdragen aan het wiskundeonderwijs. Voor wat betreft het laatste bieden de besproken dissertaties een rijk aanbod, hetgeen uit onderstaande voorbeelden mag blijken.

## Het onderwerp 'Tegels'

Dieke van Hiele-Geldof beschrijft hoe ze, uitgaande van vier wetten van de Gestaltpsychologie (overeenkomst, naburigheid, geslotenheid en voortzetting), tot haar ontwerp van materiaal en, voegt ze met klem toe, invulling

van het bijbehorende klassengesprek is gekomen. In de compleet uitgeschreven lesprotocollen laat ze zien hoe de leerlingen actief bezig zijn met het maken (construeren) van bestratingen van trottoirs, het uitbreiden van sterzeshoeken en het onderzoeken of je met gegeven kartonnen figuren (regelmatige drie-, vier-, vijf-, zes- en achthoeken) een vloer kunt bedekken. Vervolgens dezelfde vraag, maar nu met onregelmatige figuren. In de aandacht komen dan 'hoeken' en vanzelf de vraag naar het waarom van wel en niet bedekken. Hiermee komen eigenschappen van veelhoeken (som van de hoeken) in zicht. Een totaalplaatje ervan wordt dan in verband gebracht met de eerdere onderzoeken van het bedekken. Het is lesmateriaal waarmee de leerlingen, onder leiding van de leraar, van concreet handelen met visuele patronen komen tot het nadenken over die regelmatigheden en de eigenschappen van die patronen.

## Leerboek-kenmerken als praktijkkennis

Hein Kramer, wiskundeleraar en opleider van wiskundeleraren, doet zijn onderzoek aan de toenmalige Technische Hogeschool Twente (nu Universiteit Twente) en móet een onderwijskundig standpunt innemen. Dit heeft tot gevolg dat methodologische zaken veel aandacht vragen. Maar de andere invalshoek brengt ook zaken aan het licht die voor wiskundeleraren nieuw zijn en voor schoolboekauteurs wellicht nuttig. Hij stelt leerboekkenmerken op om vervolgens drie bestaande (en destijds zeer veel gebruikte) series leerboeken (*Getal en Ruimte*, *Moderne wiskunde* en *Sigma*) te kunnen vergelijken. De kenmerken vallen niet uit de lucht, ze zijn naar voren gekomen in interviews met leraren. En

ook eigen inzicht als leraar (face-value) speelde een rol.

Leerboeken voor wiskunde onderscheiden zich van elkaar door de mate waarin: a) ze leerlingen helpen de structuur van de leerstof te doorzien en te onthouden; b) ze bruikbaar zijn als naslagwerk voor leerlingen; c) ze het mogelijk maken om voorkennis op te halen; d) in de vraagstukken tijd wordt besteed aan de relatie met de werkelijkheid; e) het cognitief niveau dat van de routines overstijgt; f) er vraagstukken in voorkomen; g) er (nieuwe stof) introducerende problemen in voorkomen; h) ze geschikt zijn voor zelfstandig werken van de leerlingen; i) ze geschikt zijn om een discussie tot stand te brengen; j) er aandacht is voor differentiatie binnen klassenverband; k) ze diagnostisering en remediëring ondersteunen. Gesteld mag worden dat deze kenmerken de praktijkkennis van onderzoeker en geïnterviewden weerspiegelen.

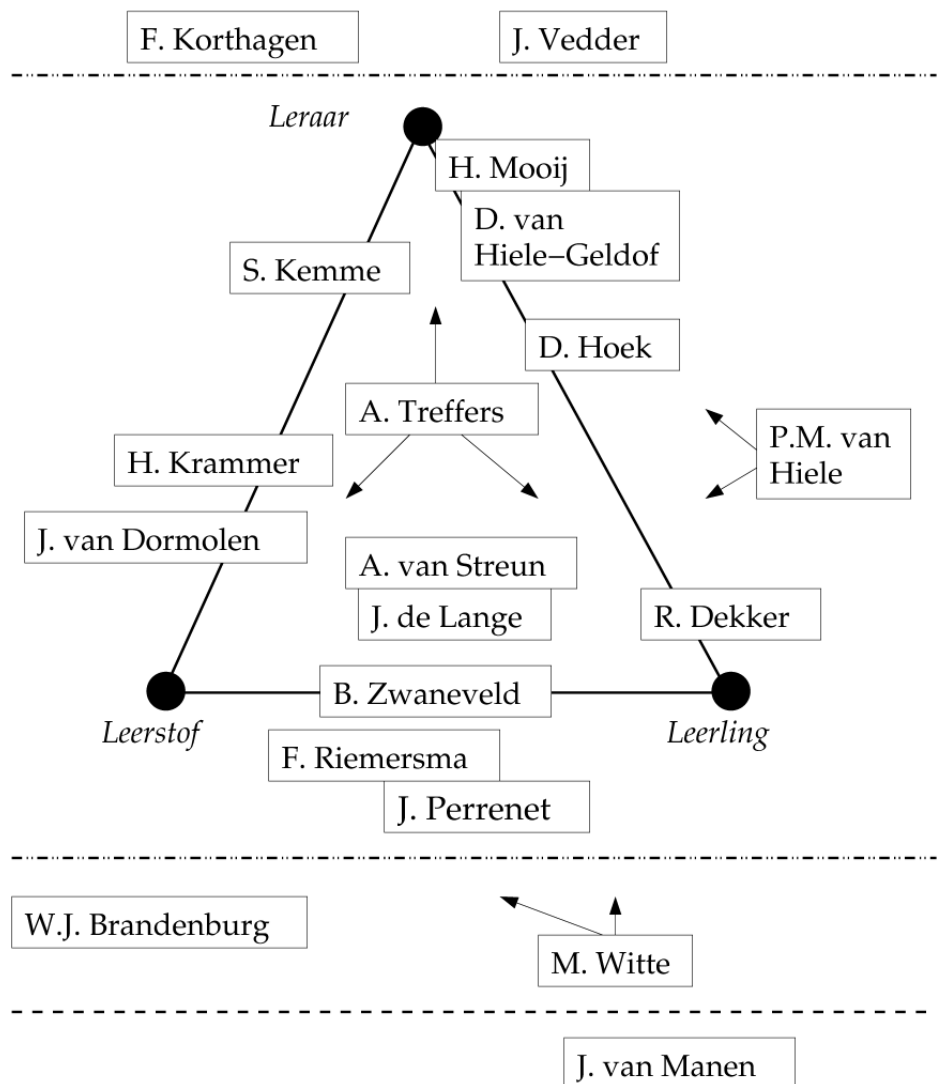
#### Alternatieve toetsvormen voor wiskunde A

Jan de Lange doet niet alleen evaluatieonderzoek met betrekking tot het HEWET-project (Herverkaveling Eindexamenprogramma Wiskunde Een en Twee), maar wil ook een bij wiskunde A passende toetsmethode ontwikkelen. De behoefte daaraan kwam in toenemende mate tot uitdrukking in de (52) proefscholen. Hij bedenkt dan een praktijkgericht onderzoek, met de trekken van beginnend ontwikkelingsonderzoek, in de fase tussen 'idee' en 'eerste ontwerp'. Alle proefwerken van de twaalf scholen 'van het eerste uur', door de (bijgeschoolde) leraren zonder hulp van de cursusleiders zelf samengesteld, worden verzameld en geanalyseerd op de vraag of in de proefwerken de doelen van wiskunde A zijn geoperationaliseerd, en vervolgens wat de leraren zelf aan nieuws hebben bedacht. De opbrengst blijkt niet mee te vallen, slechts achter twintig procent van de opgaven worden de hogere doelen van wiskunde A zichtbaar, zoals 'mathematiseren', 'het werken in toepassingscontexten' en 'het tonen van een kritische houding'. De onderzoeker wijt deze teleurstellende opbrengst voor een groot deel aan het feit dat proefwerken, zoals gebruikelijk, in vijftig minuten moeten worden gemaakt. Positief zijn evenwel de zelfbedachte, en nadien in de literatuur gelegitimeerde, alternatieve toetsvormen: de tweefasen opdracht, de thuiswerk opdracht, de schrijfeen-essay opdracht en het mondeling tentamen. Van elke vorm zijn voorbeelden gegeven, voorzien van leerlingenwerk en de wijze van scoring, zo in de praktijk van wiskunde A te gebruiken.

#### Praktijkverhalen

Hoewel Sieb Kemme een studie maakt van het uitleggen van wiskunde met het doel om bij te dragen aan een theorie van het uitleggen, is hij als onderzoeker-lerarenopleider veel aanwezig in klassen. In de neerslag van zijn studie komen dan ook diverse praktijkverhalen voor. Veel daarvan zijn te beschouwen als 'praktische opbrengsten' van het didactisch onderzoek. Neem bijvoorbeeld de welbekende rekenregel uit de aanvankelijke algebra: 'min maal min is plus'. Juist omdat deze regel al in het begin van het voortgezet onderwijs aan de kinderen wordt voorgelegd, heeft men in alle toonaarden getracht de aannemelijkheid ervan bij de leerlingen over te brengen. Twee didactische vondsten, die het omstreeks 1990 goed deden in de wiskundeles, zijn de uitleg van bijvoorbeeld  $(-2) - (-3) = +1$  met 'de heks' en de uitleg  $(-2) \times (-3) = +6$  met 'het treintje'. De negatieve getallen in het geval van de heks staan

voor de temperatuur van een toverdrank-inde-maak, en koude blokjes:  $t = -2$  (temperatuur toverdrank is  $-2$ ), de heks haalt drie koude blokjes ( $-3$ ) eruit, en  $t$  stijgt 3. Deze didactiek blijkt te werken, constateert Kemme. Maar met het treintje wordt de vertaling zo ingewikkeld, dat leerlingen het spoor kwijtraaken. Hij schrijft op bladzijde 93 van zijn proefschrift: "Er zijn twee soorten locomotieven, positieve en negatieve. De positieve staan met hun voorkant naar rechts, de negatieve staan naar links.  $3 \times \dots$  betekent dat het betreffende treintje vooruit rijdt,  $-3 \times \dots$  betekent dat het betreffende treintje achteruit rijdt.  $3 \times -2$  is dus: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 vooruit af,  $-3 \times -2$  is: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 achteruit af." Wat hier zichtbaar wordt overstijgt de gegeven didactische situatie. Leraren kunnen naar aanleiding van dit praktijkverhaal voortaan een afweging maken of een bepaalde uitleg de zaak voor leerlingen niet



Figuur 1 De positionering van de promovendi in de didactische driehoek

moeilijker maakt dan de wiskunde zelf is. 'Vertaling' wordt later ook wel 'didactisering' genoemd. Ook Kemmes gereedschapskist voor uitleggers verdient een vermelding in de rubriek opbrengsten.

#### Taal in wiskunde

Van Dormolen, op zoek naar aandachtspunten voor het analyseren van leerteksten in schoolboeken voor wiskunde (voordat er leerlingen bij gedacht worden), komt begrijpelijkerwijs ook uit op het taalgebruik in die teksten. Interessante opbrengst is hier, in het bijzonder voor leraren die willen dat het schoolboek de leerlingen aanmoedigt actief met de auteur mee te denken, het onderscheiden van drie soorten taalgebruik (met verwijzing naar Freudenthal): demonstratieve taal, feitvaststellende taal en actietaal.

Met deze vijf voorbeelden zijn de negentien studies nog niet uitgeput. Niet genoemd zijn onder meer de 'kennisgraaf' van Zwaneveld, de 'ladder en zaag' van Dieke van Hiele-Geldof, de 'heuristieken bij probleemoplossen' van Van Streun, de 'aanwijzingen voor educatief ontwerpen' van Riemersma en Van Streun, en die voor het 'reviseren van bestaande ontwerpen' van Dekker, de voorbeelden van 'gebruikerswiskunde' van Witte, het construeren van hints en groepsopgaven bij probleemoplossen in de wiskundeles bij Perrenet en niet te vergeten het idee van Jan van Maanen om 'delen uit de geschiedenis van de wiskunde' functioneel in het wiskundeonderwijs op te nemen.<sup>1</sup>

#### Theoretisch en flankerend onderzoek

Na het verschijnen van deel 1 van dit artikel, in het vorige nummer van het *Nieuw Archief* werd ik verblijd met de dissertatie van L.T.J.M. van Schalkwijk: *Onderzoekend wiskunde leren*. Het onderzoek speelt zich af in de bovenbouw van het vwo (klas 5) en richt zich op getalenteerde wiskundeleerlingen. Die krijgen een cursus Hogere Wiskunde (Fractals en dynamische processen) aangeboden door de Universitaire Lerarenopleiding van de Katholieke Universiteit Nijmegen. Een van doelstellingen is om deze leerlingen het leren bewijzen te onderwijzen en daarbij na te gaan welke didactische strategieën tot de beste resultaten voeren. Van Schalkwijk stelt zijn onderzoek in dienst van deze doelstelling, ook met het oog op een verbetering van de cursus. Maar er is ook iets van kritiek op het huidige wiskundeonderwijs in te lezen. Daarin krijgt het leren bewijzen nauwelijks aandacht. Interessant is het feit dat de onderzoeker zijn

inspiratie put uit het denken van Thales van Milete, die door Van der Waerden (*Ontwaken de Wetenschap*) aldus wordt geciteerd: "Het prille begin van wiskunde ontstaat uit problemen van het dagelijks leven, juist door de band daarmee te verbreken." De kernvraag van dit (flankerend) onderzoek betreft de leeromgeving die met behulp van het cursusmateriaal Hogere Wiskunde wordt gecreëerd: is die krachtig genoeg om de leerlingen de vaardigheid van het bewijzen te doen verwerven? In die leeromgeving worden de leerlingen gestimuleerd, en ook geholpen, zich op te stellen als een soort onderzoeksgroep, die begint met een brainstormsessie, dan in kleine groepen uiteen gaat om de volgende gezamenlijke sessies, symposium genoemd, voor te bereiden. Daarin gaat het onder meer om het formuleren van vermoedens, het luisteren naar elkaars redeneringen, het verwoorden van de eigen gedachten en het komen tot overeenstemming over bewijsvoeringen. Ten wordt er een verslag gemaakt. De leerlingen kunnen bovendien colleges volgen, ze maken gebruik van het uitgekende lesmateriaal en kunnen experimenteren met de lesstof via speciaal bij de lesstof ontwikkelde computerprogramma's (*IFS-laboratorium en Funiter*).

De verslaggeving van dit didactische onderzoek geschiedt op 'beschrijvend' en op 'theoretisch niveau', naar model van Van Hiele's niveaustheorie en de gedachte (geuit door beide Van Hieles) dat die ook van toepassing is op de didactiek van de wiskunde. De parameters voor de data-analyse vormen mijns inziens een belangrijke opbrengst:

1. Leefwereld en wiskunde wereld, wiskundige representaties
2. Zin en betekenis van bewijzen
3. Lokale ordening
4. Vaktaal
5. Bewijzen binnen onderzoek.

Wat leverde deze studie op voor het handwerk van de leraar? Weet die nu voortaan wat te doen als de leerlingen moeten leren bewijzen? Van Schalkwijk praat evenwel in termen van leeromgeving en geeft aanwijzingen om die, in dit verband, 'krachtiger' te maken: de leraar mag best wat meer hulp bieden, wat meer leraarsgestuurd bezig zijn en op gezette tijden aanleiding en gelegenheid geven om te reflecteren.

Over theoretische bijdragen aan de didactiek van de wiskunde moet ik hier kort zijn omdat een volledige behandeling van de gevallen teveel ruimte zou innemen. De volgende opsomming moet voldoende zijn om zich een idee te vormen: 'Denkniveaus' van P. van Hie-

le, 'Didactische dilemma's' van J. van Dormolen, het idee van 'expertwiskunde' van M. Witte en de begrippen 'moeilijkheidsgraad' (van het wiskundige onderdeel) en 'duidelijkheid' (van de uitleg) van S. Kemme.

Voor flankerend onderzoek komen we terecht bij Anne van Streun, die zijn ontwerp van een volledige wiskundemethode, *Wiskundelij*, vergezeld liet gaan van onderzoek naar aanwijzingen voor revisie. In het geval van ontwikkelingsonderzoek, waar de onderzoekscomponent ook bedoeld is voor het aanbrengen van praktijkgeoriënteerde verbeteringen, zou ik niet van flankerend onderzoek willen spreken omdat in dat geval onderzoek en ontwikkeling in samenhang en zo mogelijk geïntegreerd voorkomen, en onderzoeker en ontwikkelaar in dezelfde persoon verenigd zijn.

#### Methodologische overwegingen vooraf

Didactische onderzoekers die het resultaat van hun onderzoek wetenschappelijk willen onderbouwen, houden zich van meet af aan bezig met de systematiek van de dataverzameling. Het meest voor de hand ligt dan dat de methodologische overwegingen vooraf plaatsvinden en het onderzoeksdesign bepalen. Maar wiskundig-didactisch onderzoek heeft per definitie ook de doelstelling om de praktijk van het wiskundeonderwijs te verbeteren. Is de onderzoeker in staat om een goede balans te vinden tussen de aandacht besteed aan de methodologie en de aandacht voor de inhoudelijke vraagstellingen? Hieronder volgt een aantal op dit punt van aandachtsverdeling geselecteerde voorbeelden.

#### Het didactisch experiment

Het eerste hoofdstuk in de dissertatie van D. van Hiele-Geldof is getiteld: Wat is een didactisch experiment? Het wordt niet duidelijk of deze vraag ook vóór is gegaan aan haar promotiestudie, of misschien pas achteraf is beantwoord als reflectie op haar onderzoeks-aanpak. Hoe het ook zij, er zijn aan het eind van de jaren vijftig weinig voorbeelden van wiskundig-didactisch onderzoek voor handen. Die omstandigheid verklaart waarom zij begint met afstand te nemen van de opzet van natuurwetenschappelijke experimenten, waarin natuurverschijnselen kwalitatief beschreven en kwantitatief gemeten worden. Bij de meting kunnen de natuurwetenschappers namelijk factoren, die van betekenis worden geacht, (op één na) constant houden. Dit lukt niet als het experiment leerprocessen van kinderen betreft. De didactisch onderzoek-



**Figuur 2** Deelnemers aan de conferentie van de Wiskunde Werkgroep in het Marten Maartenshuis te Doorn op 13 en 14 november 1948. Van links naar rechts en indien achter elkaar staande van voor naar achteren: L.N.H. Bunt (vooraan), A.O. Beckendorf, onbekend (vooraan), onbekend, mw. A.B. Veuger, onbekend, onbekend, onbekend, Joh. H. Wansink (vooraan), onbekend, H. Geurts, D.J.E. Schrek, M. van Tol (vooraan), H. Mooij, J.J. Boogaard, W.H. Veldhuis, H.J. Jacobs jr (secretaris), H. Freudenthal (vooraan), D. Kijne, J. Ph. Steller, H. Th. Otten, H.J. Boom jr, B.W. Steggerda, J.R. Janssen (voorzitter; vooraan), H.J. Struik, S.J. Geurtsen, H. Turksma, J.K. Timmer (vooraan), onbekend, P.G.J. Vredenduin, A. van Haselen, D. Leujes (vooraan), J.H. van Dam, P. Bronkhorst, A. Orië (?), onbekend, mw. A.H.M. van der Geijn (vooraan), onbekend, onbekend, mw. G.M. Langelier (vooraan).

ker dient zich pedagogisch verantwoord op te stellen. Ook moet hij zich bewust zijn van de subjectiviteit van zijn waarnemingen. Ze gaat ook in op, wat we nu zouden noemen, het quasi-experimentele design, waarin de effecten van de 'treatment' vergeleken worden bij een experimentele en een controlegroep. Er zijn zoveel factoren die beide groepen onderscheiden, dat het onmogelijk lijkt verschillen in leerresultaten aan één bepaalde factor toe te schrijven. Op dit punt kan ze de onderzoeksoptzet van Mooij (1948) kritiseren, die voorbij ging aan de verschillen tussen scholen en tussen leerlingen en docenten. Met enige waardering wijst ze op de didactische experimenten van Boermeester, op het gebied van meetkundeonderwijs op de mulo. Maar zelf ziet ze niets in een dergelijk design, al was het alleen al om het feit dat ze zich niet in staat acht zowel 'traditioneel' (in een controleklas) als 'volgens haar nieuwe methode' (in een experimentele klas) meetkunde te onderwijzen. In de terminologie van recentere onderzoeken: geen 'matchingsproblematiek' en 'covariabelen', maar een 'naturalistisch' design, per definitie kwalitatief. Als onderzoeker-ontwerper maakt ze een grondige (psychologisch-didactische) analyse van leerstof, leerlingen en het leren van meetkunde in de eerste klas van het vmo. En vervolgens geeft ze als leraar-onderzoeker het on-

derwijs volgens haar eigen didactische methode, op haar eigen manier zoals ze dat gewoonlijk pleegt te doen. Van het voorwerk en de onderbouwing ervan, komt een zorgvuldig verslag en van de lessen nauwkeurige protocollen, die het materiaal vormen voor een grondige analyse. Mevrouw Van Hiele stelt: 'Wie het wil kan mijn lessen precies herhalen in de eigen situatie en vervolgens de resultaten met die van mij vergelijken.' Geen zorgen over de betrouwbaarheid van haar observaties, want de herhalingen in andere schoolklassen, met andere docenten en in andere omstandigheden moeten wel andere leerresultaten opleveren. Met deze methodische overwegingen bij haar onderzoeksaanpak worden diverse elementen aangedragen, die in enkele van de latere studies pregnant naar voren komen. Die studies zijn van na 1961, het jaar dat A.D. de Groot de eerste druk van zijn *Methodologie* liet verschijnen. Aan de orde komen (onderdelen van) de promotie-onderzoeken van Hein Krammer (1984), Anne van Streun (1989) en Fré Riemersma (1991), die hun onderzoeken vooraf lieten gaan door methodologisch denkwerk. Vervolgens wordt nagegaan hoe men een beschrijvend onderzoek methodologisch kan onderbouwen, zoals Fred Korthagen (1983) en Jaap Vedder (1984) dat deden in hun onderzoek van de lerarenopleiding. Tenslotte proberen we na te

gaan hoe ontwikkelingsonderzoek, zoals Van Streun (1989) dat als onderdeel van zijn omvangrijkere studie heeft ervaren, methodologisch kan worden onderbouwd.

*Een proces-productstudie begin jaren tachtig*  
Hein Krammer verricht zijn didactisch onderzoek in het kader van een groots opgezet internationaal onderzoek door de *International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)* naar verbanden tussen onderwijsactiviteiten en leerresultaten. In Nederland spreekt men van het *Leeromgevingsproject*. Een onderdeel hiervan vormt het onderzoek van Krammer, naar de invloeden van het (wiskunde-)leerboek op de onderwijsactiviteiten van de leraar en ook op de effecten daarvan, de leerresultaten van leerlingen dus. Door deze omstandigheid is Krammer genoodzaakt bij het ontwerpen van het onderzoeksdesign zorgvuldig de stand van zaken en inzichten op het terrein van methodologie in acht te nemen. Dat betekent onder meer dat zijn onderzoek op de vijftig scholen van het *Leeromgevingsonderzoek* dient te worden uitgevoerd. Een gevolg is dat de onderzoeker veel van het onderzoekswerk op de werkvloer uit handen moet geven aan anderen. Daartoe moeten betrouwbare meetprocedures worden bedacht en valide meetinstrumenten ontwikkeld, en 'leken' moeten worden opgeleid om daarmee deskundig aan de slag te kunnen gaan. De onderzoeksproblematiek en daaruit afgeleide onderzoeksvragen worden omgezet in diverse variabelen, waarmee de (onderwijs-leer-)werkelijkheid in de havo-2 en vwo-2 klassen in de greep gekregen kan worden. Om een indruk te krijgen: Er dienen gegevens verzameld te worden over 'contact met het leerboek', daartoe worden 'vraagstukvariabelen' opgesteld, zoals 'de tijd die aan de oplossing ervan besteed wordt', 'praktische inkleding', 'introducerende functie', 'cognitief niveau' en 'aantal vraagstukken'. Dan moet er voor die variabelen een 'codering' bedacht worden, zodat de beschikbare vraagstukken door de opgeleide codeurs in de goede categorie geplaatst kunnen worden. Er blijken teveel vraagstukken te zijn, dus gaat men over op een steekproef. Die ingreep vereist weer een statistische onderbouwing. Deze aanpak wordt gevolgd met betrekking tot 'kenmerken van de leerboeken' (hiervoor genoemd), 'onderwijsactiviteiten' en 'leerresultaten'. Na de kwantitatieve analyse van de data volgt dan toch nog een kwalitatieve analyse, die voor leraren onder de lezers ongetwijfeld herkenbare elementen in zich draagt. De vraag dringt zich

nu, anno 2002, op of hier sprake is van een voor wiskundig-didactisch onderzoek verantwoord evenwicht tussen de methodologische en wiskundig-didactische activiteiten.

#### *Een non-equivalent groups design*

Het proefschrift van Anne van Streun heeft als ondertitel 'Verslag van een onderwijsexperiment'. Na het ontwikkelen van een leerboek voor Wiskunde A, waarin aandacht wordt besteed aan de basisvaardigheden van wiskunde die in de onderbouw dienen te zijn verworven en aan een reflectieve aanpak van het probleemoplossen. In het HEWET-project worden, zo is de kritiek van Van Streun, andere accenten geplaatst. Om het verschil in leereffecten bij beide aanpakken na te gaan, verricht hij een vergelijkend (hypothesetoetsend) onderzoek. Er zijn drie didactische aanpakken van wiskunde A, te weten: de HEWET-aanpak, met de kenmerken van realistisch wiskunde-onderwijs, de HWO-aanpak, zoals Van Streun die zelf voorstaat: heuristisch wiskunde-onderwijs en natuurlijk de zogenoemde WEDT-aanpak, de gangbare didactiek van wiskunde eerst, dan toepassen. In zijn 'methodologische overwegingen' herkent men ook de door Dieke van Hiele-Geldof genoemde punten. De promovendus pakt het onderzoek, begeleid door onder meer A.D. de Groot, gedegen aan. Om een indruk te geven, staan in tabel 1 delen van zijn 'Overzicht van de variabelen en meetinstrumenten'.

Het onderzoek geschiedt op 21 scholen, waarvan er vijf (parallelklassen) tot experimentele kern worden verheven. In die vijf klassen wordt het onderwijs (HEWET, WEDT en HWO) door twee leraren gegeven. Een situatie die Dieke van Hiele-Geldof dus niet aandurfde. Maar ook deze onderzoeker noemt het een hachelijke zaak, vanwege de vele variabelen die invloed kunnen hebben op de leereffecten. En later moet hij bekennen dat aan de leraar van de parallelklassen hoge eisen van flexibiliteit worden gesteld. (Een eigenschap die Dieke van Hiele-Geldof zich niet toedichtte.) Een verbetering door een grotere steekproef uit alle mogelijke scholen te nemen, ziet Van Streun niet zitten. Hij besteedt liever zijn energie en tijd aan intensief contact over een langere onderwijsperiode (een heel schooljaar) met een geringer aantal scholen. Een kwalitatief getinte gedachtegang, die vertaald wordt in de uitspraak: "... heeft het voordeel dat meer covariabelen en criteriumvariabelen in het onderzoek kunnen worden betrokken, terwijl de kwaliteit van het verzamelen van de data beter kan worden bewaakt." In de dertien bijlagen kan een geïnteresseerde

lezer inschatten wat de metingen en statistische bewerkingen van het cijfermateriaal van de onderzoeker hebben gevraagd. In vergelijking met de hiervoor genoemde studie wordt onmiskenbaar de indruk gewekt dat er meer sprake is van evenwicht tussen methodologie en didactiek. Tussen de regels door is de wiskundeleraar Van Streun steeds aanwezig.

#### *Een eenvoudig onderzoek*

Fré Riemersma is onderzoeker met een onderwijspsychologische achtergrond. Hij blijkt op de hoogte te zijn van het heuristisch wiskunde-onderwijsconcept, zoals dat door Anne van Streun is ontworpen en op leereffecten onderzocht. In zijn onderzoek voegt Riemersma aan de heuristische methoden het element van metacognitieve vaardigheden toe. Reflectie (op het eigen leren), is hier het codewoord, een bewustmaking van hoe je 'het doet'. In feite liggen het leren van heuristieken en het verwerven van metacognitieve vaardigheden hier niet ver uiteen. Riemersma volgt, zeker vanuit de psychologisch onderzoekstraditie gezien, een eenvoudig onderzoeksdesign (quasi-experimenteel, met voor-, na- en retentietoets). Na, net als Van Streun, op basis van literatuurstudie een onderwijsprogramma voor probleemoplossen te hebben ontworpen, gaat hij op onderzoek naar moge-

lijke en gewenste leereffecten. Het ontwerp-programma kan beschouwd worden als het flankerend materiaal bij zijn onderzoek naar een verbetering van de didactiek van het probleemoplossen bij wiskunde. Hij vindt zeven klassen voor het experimentele onderwijs, en zeven controleklassen, in andere scholen en met andere docenten. Via 'matching' worden beide condities gelijkgeschakeld op de variabelen 'type school', 'klasniveau', 'leerboek' en 'belangstelling van de leraar voor probleemoplossen'. De bron van informatie over deze variabelen is de leraar, het meetinstrument bestaat uit een vraaggesprek. In tegenstelling tot Van Streun neemt Riemersma genoeg met een korte onderwijsperiode en voegt hij aan zijn vergelijkend onderzoek een implementatieonderzoek toe. Om namelijk de uitkomsten van het eerste deelonderzoek te kunnen wegen, moet er informatie zijn over de wijze waarop met het experimentele programma is gewerkt:

- In welke mate is het programma met betrekking tot de gestelde doelen geïmplementeerd?
- In welke mate komt het programma overeen met de opvattingen van de leraren over probleemoplossen?
- Welke knelpunten traden op tijdens de uitvoering?

Covar.	Omschrijving	Instrument	Waarde
X1	Beheersing basiskennis wiskundige begrippen en technieken	Eindtoets 3 vwo	Aantal gescoorde punten op de BT-opgaven
X2	Vermogen wiskundige kennis te gebruiken bij het oplossen van problemen	Eindtoets 3 vwo	Aantal gescoorde punten op de P-opgaven
X3	Gebruik van de begrippen en technieken (bt) bij goed opgeloste BT-opgaven	Eindtoets 3 vwo	Aantal keren dat bt met succes bij BT-opgaven is gebruikt
X4	Gebruik van heuristische methoden (h) bij goed opgeloste P-opgaven	Eindtoets 3 vwo	Aantal keren dat h in goed opgeloste P-opgaven is gebruikt
X4	Gerapporteerde 'Plezier en Motivatie' (PM) t.o.v. wiskunde	Attitude-uitspraken CITO	Totaal aantal punten op de items PM

Kriteriumvariabele	Omschrijving	Instrument	Waarde
Y1	Beheersing basiskennis wiskundige begrippen en technieken	Eindtoets 4 vwo	Aantal gescoorde punten op de BT-opgaven
Y2	Vermogen wiskundige kennis te gebruiken bij het oplossen van problemen	Eindtoets 4 vwo	Aantal gescoorde punten op de P-opgaven
...	...	...	...
Y6	Gerapporteerde 'Angst en Moeilijkheid' AM t.o.v. wiskunde	Attitude-uitspraken CITO	Totaal aantal punten op de items AM (weinig angst geeft hoge score op AM)

Situatievariabele	Omschrijving	Instrument	Waarde
Z1	Beoordeling van wiskundeleraar(e)	Vragenlijst Interactioneel Leraarsgedrag	Punten op subschalen.

Tabel 1 Overzicht van de variabelen en meetinstrumenten uit het onderzoek van Anne van Streun

- Hoe is het reguliere onderwijsprogramma uitgevoerd?
- Welk onderwijs is gegeven na afloop van het experimentele programma en voor de retentietoets?

Opmerkelijk is de uitkomst van dit onderzoek, dat kort na afloop van het programma flinke vooruitgang laat zien bij de experimentele groep, een vooruitgang die na verloop van tijd echter weer afneemt. Deze tijdelijkheid wordt geweten aan de korte onderwijsperiode (van vier maanden, drie lessen per week), die te kort kan zijn geweest voor een leerproces waarin leerlingen vakkennis van de wiskunde moeten verweven met strategische kennis van meer algemene aard.

### Methodologische onderbouwingen

Twee van de vermelde onderzoeken betreffen niet wiskundendidactiek, maar opleidingsdidactiek. Zowel Fred Korthagen als Jaap Vedder zijn vakdidacticus/lerarenopleider. In die positie evalueren zij, vanuit bepaalde invalshoeken, hun opleiding. Korthagen typeert zijn overall beschrijving van de wiskundeopleiding van de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht als case study, Vedder gaat in op een speciaal onderdeel van de opleiding, de introductie van de stage via '1-1-begeleiding'.

#### De verantwoording van een case study

De studie van F. Korthagen bestaat uit twee onderdelen, die beide met de term 'onderzoek' worden aangeduid. Het eerste deel is een nauwkeurige beschrijving van hetgeen in de SOL-wiskunde-opleiding (met focus op het studiejaar 1981/82) gebeurde. De auteur was zelf wiskundedocent en ervoer het werk op de SOL als een unieke ontwikkeling die 'model' zou kunnen staan voor andere lerarenopleidingen. Kern van dit model is de aandacht voor het leren reflecteren van studenten, aanstaande wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs. Als de beschrijving een aanvang neemt heeft Korthagen inmiddels de SOL verlaten en kan als vakdidacticus aan de UvA dan een zekere afstand nemen. Op die afstand ontwikkelt hij eerst een beschrijvingsmodel, een theoretisch raamwerk waarmee de gang van zaken in de praktijk van de lerarenopleiding samenhangend in kaart gebracht kan worden. Dit raamwerk berust op het werk van R. Skemp, een wiskundeleraar-psycholoog, destijds werkzaam aan de Universiteit van Warwick in de U.K. Voor Korthagen heeft het uitbreiden van het beschikbare begrippenapparaat en de bewerking van Skemps raamwerk het karakter van ontwikkelingsonderzoek (p 205). Hij verheelt niet dat het werk



**Hendrik Mooij**, 'Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen', 1948, Universiteit van Amsterdam.

van Skemp in de opleiding onbekend was en dat daar de achterliggende 'philosophy of education' ook nooit was geëxpliciteerd. Hoe kun je aan zo'n praktijknabije beschrijving op basis van eigen ervaringen en reflecties een wetenschappelijke onderbouwing geven? Die vraag was essentieel voor de auteur omdat hij ook het opleidingsmodel van de SOL-wiskundeopleiding wetenschappelijk gelegitimeerd wilde zien. Die verantwoording moet hier wel aan het eind van de studie (hoofdstuk 13/14) gegeven worden, want de naar voren te brengen methodologische overwegingen hebben geen rol gespeeld in de voorgaande twaalf hoofdstukken. Net als Dieke van Hiele-Geldof neemt hij eerst afstand van het klassieke natuurwetenschappelijk onderzoeksparadigma en concludeert vervolgens dat alternatieve onderzoeksmethoden (zoals bijvoorbeeld die van antropologen) op het gebied van onderwijs inmiddels ook bespreekbaar zijn. Hoeben (1981) biedt hem dan een kader waarin de werkwijze in de SOL en die van het beschrijven ervan, passen. In het schema van Hoeben zijn de activiteiten van empirisch-wetenschappelijke processen in kaart (een graaf!) gebracht. Enerzijds het theoriegericht onderzoek, anderzijds het praktijkgerichte onderzoek. Korthagen kiest de kant van de praktijkgerichtheid voor het werk op de SOL. Het schema biedt ook ruimte voor theorievorming vanuit de praktijk zodat het theoretische raamwerk een duidelijke plaats kan worden toegekend.

Er is nog een probleem van methodologische aard dat dient te worden opgelost: het empirische materiaal waarop de beschrijving berust, is niet systematisch, op basis van een onderzoeksplan, bijeengebracht. Of dat



**Dieke Geldof**, 'De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.', 1957, Universiteit Utrecht.

in een geval als dit wel mogelijk is, betwijfelt deze onderzoeker trouwens. Terugziend op zijn werk voelt hij verwantschap met de werkwijze van naturalistisch onderzoek, onder verwijzing naar een publicatie uit 1978 van E.G. Guba: *Toward a methodology of naturalistic inquiry in educational evaluation*. Hierin vergelijkt Guba op veertien punten conventioneel onderzoek met naturalistisch onderzoek. Omdat deze vergelijking voor didactische onderzoekers interessante gezichtspunten oplevert, is die lijst in tabel 2 samengevat.

Het is een opsomming die ruimte schept voor onderzoekers van het onderwijs, die in alle vrijheid en naar eigen inzichten in schoolklassen op verkenning willen gaan op zoek naar verbetering, en hun werk bovendien wetenschappelijk gelegitimeerd willen zien. De legitimering door de wetenschap wordt, in het geval van Korthagen, gerealiseerd door het 'wetenschappelijk forum', zoals bedoeld door A.D. de Groot en geconcretiseerd in de promotiecommissie. Overigens heeft Guba bij zijn naturalistische onderzoeksplan ook een aantal kwaliteitswaarborgen ontwikkeld, die Korthagen stap voor stap met betrekking tot zijn studie behandelt. Ook de tweede lerarenopleider-onderzoeker, J. Vedder, hanteert deze kwaliteitswaarborgen en voelt zich ook verwant met de naturalistische onderzoeksplan.

#### Curriculumevaluatie

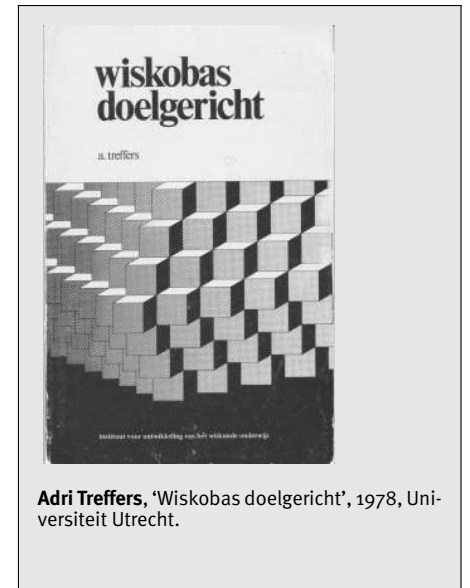
De studie van Jaap Vedder is gericht op formatieve evaluatie van het onderdeel '1-1-begeleiding' van het curriculum voor eerste-graads wiskundeleraren aan het Pedagogisch Didactisch Instituut (nu IVLOS) van de Universiteit Utrecht. Formatief, dus beschrijven, ana-



**Pierre van Hiele**, 'De problematiek van het inzicht', 1957, Universiteit Utrecht.



**Willem Brandenburg**, 'De modernisering van het wiskunde-onderwijs', 1968, Rijksuniversiteit Groningen.



**Adri Treffers**, 'Wiskobas doelgericht', 1978, Universiteit Utrecht.

lyseren en verbeteren. Bij de 1-1-begeleiding helpt een student van de lerarenopleiding gedurende zeven à acht weken een leerling van het voortgezet onderwijs gedurende één uur

per week met wiskunde. De onderzoeksvragen liggen hier voor de hand:

- Wat leren de studenten ervan?
- Hoe ervaren studenten de 1-1?

- Hoe ervaren de leerlingen deze lessen?
- Hoe evalueren de begeleiders van de studenten deze aanpak?

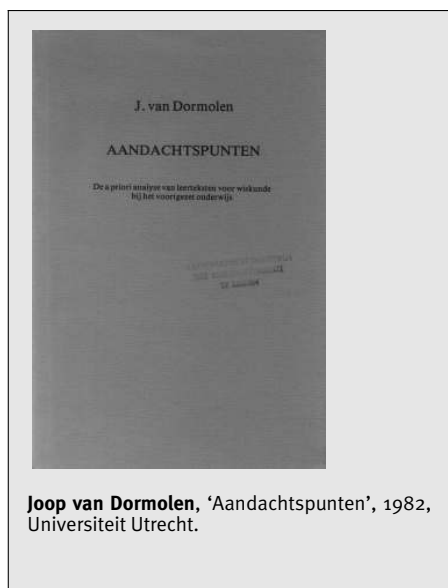
In de context van deze vraagstelling is voldoende gelegenheid om de 1-1-aanpak op alle interessante aspecten (wat gebeurt er, hoe organiseer je het, met welk doel, hoe past het in het geheel van de opleiding, hoe wordt er geleerd, hoe wordt er begeleid, wat is de achterliggende opleidingsvisie en -theorie?) in kaart te brengen.

Vedder herformuleert de eerstgenoemde vraag aldus: 'Welke leereffecten treden volgens de studenten bij henzelf op, wanneer zij gedurende een bepaalde periode aan één leerling individuele hulp geven bij het vak wiskunde?' Hij noemt dit een vorm van 'goal-free-evaluation', waarbij de opleidingsdoelen tijdens de 1-1 door de studenten zelf worden ervaren en tijdens het onderzoek door hen worden geëxpliciteerd. Als de auteur over de methodologie van zijn onderzoek komt te spreken, rekent hij eerst af met de controverse tussen de kwantitatieve en kwalitatieve methoden. Een geschikte combinatie van beide onderzoeksapproches lijkt hem hier goed mogelijk. En net als Korthagen is hij geneigd zijn onderzoek 'naturalistisch van aard' te noemen, maar de lezer mag ook kiezen voor 'quasi-experimenteel met een One-Group Posttest-Only Design', waarbij de 1-1 als 'treatment' en de antwoorden op de kernvraag als 'effect' worden gezien.

Tot slot willen we kort ingaan op de kwaliteitswaarborgen die ook door Korthagen in navolging van Guba werden gebruikt: kopieerbaarheid, als synoniem van het in onderzoekskringen zwaarwegende criterium betrouwbaarheid, te meten via herhalingen van

Punten van vergelijking	Conventioneel onderzoek	Naturalistisch onderzoek
1 Filosofische basis	Logisch positivisme	Fenomenologie
2 Onderzoeksparadigma	Experimentele natuurkunde	Etnografie
3 Doel	Verificatie (van hypothesen onder gecontroleerde omstandigheden)	Ontdekking (van verschijnselen onder natuurlijke omstandigheden)
4 Uitgangspunt	Reductionistisch (tevoren geformuleerde vragen of hypothesen)	Expansionisme (holistisch)
5 Onderzoeksplan	Vast/vooraf bepaald	Variabel/ontstaat gedeeltelijk tijdens het onderzoek
6 Onderzoeksstijl	Interventie (manipulatie van een situatie)	Selectie (van aspecten die zich onder natuurlijke omstandigheden voordoen)
7 Visie op realiteit	Enkelvoudig (er is één werkelijkheid)	Flexibel (de waarneming van de werkelijkheid is subjectief, de werkelijkheid verandert ook steeds en is meervoudig)
8 Waardensysteem	Enkelvoudig (veelal geen waarden van de onderzoeker die het onderzoek beïnvloeden)	Pluralistisch (meerdere waarden mogelijk; eigen waarden van de onderzoeker maken deel uit van het onderzoek)
9 Onderzoekssetting	Laboratorium	Natuurlijke omgeving
10 Context	Het onderzoek wordt zoveel mogelijk contextvrij gehouden	Context wordt juist bij het onderzoek betrokken
11 Conditie	Gecontroleerd	Ook ongecontroleerde condities worden bij het onderzoek betrokken
12 Ingrijpen in de onderzochte situatie	Essentieel. De onderzoeker houdt de wijze van ingrijpen invariant	De onderzochte verschijnselen doen zich in natuurlijke situaties voor en zijn dus niet invariant
13 Blikveld	Toegesplitst, inzoomend (op bepaalde variabelen)	Veelomvattend, uitzoomend
14 Methodologische kenmerken	Streven naar objectiviteit (hetgeen volgens Guba betekent: intersubjectiviteit)	Streven naar confirmeerbaarheid (overeenstemming tussen verschillende informatiebronnen)

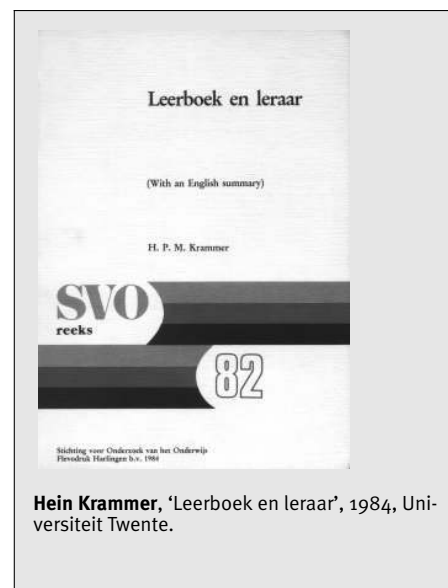
**Tabel 2** Samenvatting van de veertien punten van vergelijking van E.G. Guba



Joop van Dormolen, 'Aandachtspunten', 1982, Universiteit Utrecht.



Fred Korthagen, 'Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding', 1983, Universiteit van Amsterdam.



Hein Kramer, 'Leerboek en leraar', 1984, Universiteit Twente.

het experiment. Vedder stelt, net als Van Hiele-Geldof in 1957 met betrekking tot haar didactiek deed, dat zijn 1-1-begeleiding door ieder ander, maar met andere studenten en leerlingen, opnieuw gedaan kan worden. Maar men kan ook het ruw empirische materiaal van Vedders onderzoek opnieuw analyseren. Intrinsieke deugdelijkheid, als synoniem voor interne validiteit: is de beschrijving van de 1-1 isomorf met de praktijk van de 1-1? En vervolgens, dekken de geanalyseerde gegevens wel de 1-1 als object van onderzoek? Een geïjkte manier om intrinsieke deugdelijkheid te bevorderen is de methode van de triangulatie, waarbij het onderzochte object vanuit diverse invalshoeken wordt bekeken. Vedder heeft hiermee rekening gehouden. Generaliseerbaarheid (externe validiteit): kan hetgeen in deze specifieke situatie van de 1-1 is gevonden, ook worden toegepast in andere opleidingen, met andere studenten...? Onpartijdigheid, synoniem voor de in onderwijsonderzoek zeer zwaarwegende eis van objectiviteit. Vedder noteert dat de onpartijdige onderzoeker alert dient te zijn op (onbewuste) vooroordelen, bewuste vooringenomenheid, incompetentie, corruptheid, lichtgelovigheid, en foutieve vooronderstellingen. Als gebruikte instrumenten noemt hij naast de triangulatie hier het 'kruisverhoor van de onderzoeker door anderen' en 'openheid met betrekking tot het verkrijgen van de data'. In verband met dit laatste verwijst hij naar de aangebrachte scheiding tussen begeleiders van de 1-1 en de onderzoekers ervan. Dit betreft een moeilijke beslissing, er moet gekozen worden tussen 'deelname of distantie' van de onderzoeker. Vedder koos dus voor distantie.

Het wordt duidelijk dat Vedder, net als

Korthagen, de methodologie serieus heeft genomen, maar er niet zo zwaar aan tilde. Ook komt naar voren dat zijn methodologische denkwerk voorafgaand aan het onderzoek gebeurde.

#### Een notitie over ontwikkelingsonderzoek

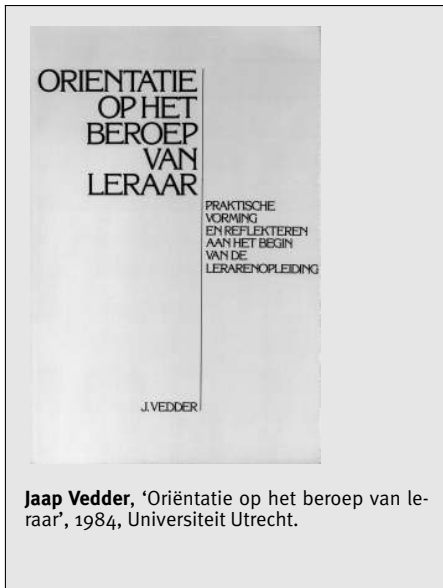
Het is Korthagen die (omstreeks 1983) zijn werk aan het theoretische raamwerk op basis van Skemps ideeën bestempelde met onderwijsontwikkelingsonderzoek. Deze positiebepaling vond ongeveer 3 jaar na de opheffing van het IOWO plaats (zie *Honderd jaar wiskundeonderwijs*). Het IOWO ging niet stilzwijgend ter ziele, maar de opheffing ging gepaard met enkele publicaties over de specifieke werkwijze gedurende de tien voorgaande jaren. De hoofdzaak in die publicaties was 'onderwijsontwikkeling' met daaraan opgehangen 'ontwikkelingsonderzoek'. Bedoeld wordt dan een cyclische aanpak bij het maken van onderwijsmateriaal: bedenken, bespreken met medeontwerpers, uitproberen in de klas, ervaringen optekenen en bespreken in de ontwerpgroep, reviseren, en weer opnieuw beginnen. Het 'bedenken' kan nog een lange, soms diepgaande, didactische voorgeschiedenis hebben. In het voorgaande werd De Lange aangehaald. De inhoudelijke kern van zijn studie betreft de ontwikkeling en implementatie van wiskunde A in de context van het HEWET-project. In feite zou dit een voorbeeld moeten zijn van ontwikkelingsonderzoek, maar door de druk van de overheid en de zware lasten van de (te) snelle implementatie, mét nascholing van leraren, kwam van het onderzoek als ontwikkelingsonderzoek niets terecht. De Lange beschrijft wat ontwikkeld is en vertelt hoe de nascholing

als bron van evaluatie fungeerde. Het begin van een ontwikkelingsonderzoek komt pas in beeld als De Lange op zoek gaat naar nieuwe toetsvormen.

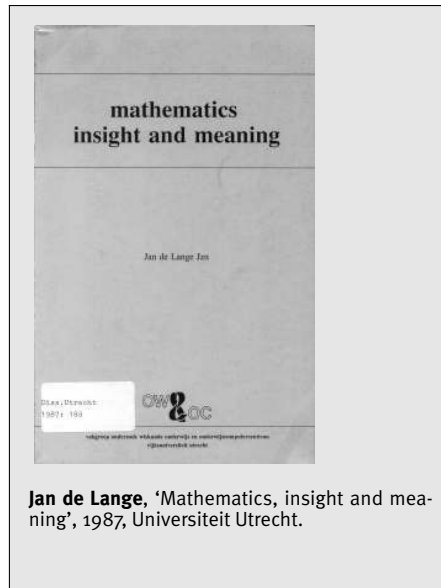
Anne van Streun bestempelt in zijn didactisch onderzoek het eerste deel eveneens met de term ontwikkelingsonderzoek. Hoewel het buiten de kring van het IOWO (dan inmiddels OW&OC geheten) tot stand kwam, voldoet het in hoge mate aan de zojuist genoemde cyclische aanpak. Interessant is het feit dat het uitgangspunt (de didactische voorgeschiedenis) gekozen is bij de blokkades, die een tiental (zwakke) leerlingen uit 4 vwo ondervinden bij het oplossen van wiskundige en toegepaste opgaven in twee bekende schoolboekseries, *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*. Ze werden gedurende twee schooljaren in groepjes begeleid bij het maken van opgaven (als extra hulp). Van dat werk zijn letterlijke protocollen gemaakt, de analyses ervan toonden de aard van de blokkades en ontsparingen bij het maken van opgaven. Globaal worden (wiskundige) houdingsproblemen en ontbrekende kennis en vaardigheden blootgelegd. Bij het ontwerpen van nieuw (geschikter) materiaal (leerboek) kan hiermee rekening worden gehouden. Wat ontworpen wordt is te beschouwen als het experimentele materiaal dat in zeshonderd (!) lessen (aan vier klassen) een cyclus van uitproberen, bespreken en verbeteren enzovoorts ondergaat. Van Streun beschrijft nauwkeurig hoe, deze werkwijze volgend, de nieuwe leergang 'heuristisch wiskundeonderwijs' tot stand komt. Mooi, dat wil zeggen inspirerend en constructief, didactisch onderzoek.

Op 3 juni 1993 wordt in Utrecht door het Freudenthal Instituut (opvolger van OW&OC)

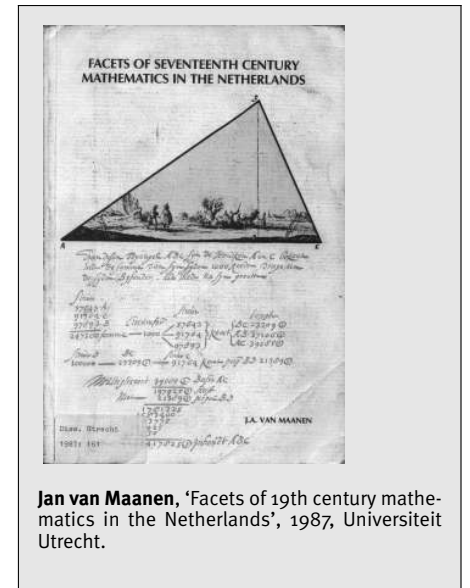




**Jaap Vedder**, 'Oriëntatie op het beroep van leraar', 1984, Universiteit Utrecht.



**Jan de Lange**, 'Mathematics, insight and meaning', 1987, Universiteit Utrecht.



**Jan van Maanen**, 'Facets of 19th century mathematics in the Netherlands', 1987, Universiteit Utrecht.

een studiedag over ontwikkelingsonderzoek georganiseerd. Er komen zestig onderzoekers bijeen die naar aanleiding van enkele lezingen over de voors en tegens van dit soort onderzoek discussiëren. In het verslag (De Jong en Wijers, 1993) leest men dat de acceptatie in kringen van vakdidactici inmiddels tot stand is gebracht, maar dat in onderwijskundige kringen nog wordt getwijfeld aan ondermeer het wetenschappelijk gehalte. Nu, tien jaar later, is er naar mijn weten nog niet zoveel meer veranderd.

### Het subjectieve van didactisch onderzoek

De wetenschappelijke onderzoeker is uit op generaliseerbare kennis, dat wil zeggen, kennis die ook geldt buiten het domein waarin ze is verworven. In ons geval van didactische kennis: toepasbaar over de grenzen van het onderzoeksgebied. Om dergelijke kennis te kunnen genereren, dient de onderzoeker zich serieus bezig te houden met de eisen die objectiviteit, validiteit en betrouwbaarheid aan zijn onderzoeksdesign stellen. De vraag om objectiviteit gaat de onderzoeker aan, namelijk de mate waarin zijn persoonlijke inzichten en opvattingen kunnen worden uitgeschakeld bij de inrichting, uitvoering en conclusies van het onderzoek. In het geval van didactisch onderzoek blijkt het niet mogelijk voor de volle honderd procent aan deze eis tegemoet te komen, ook als men 'objectiviteit' vervangt door 'intersubjectiviteit'. Smaling (1990) voegt hier een interessante betekenis, in de context van ontwikkelingsonderzoek, aan toe: er is sprake van objectiviteit als er recht gedaan wordt aan het object van onderzoek. Laat het object spreken en zorg ervoor dat er geen vertekend beeld ontstaat. Hoe dit gedaan kan wor-

den, hangt volgens Smaling niet alleen af van methoden, technieken en presentatiewijzen, maar in het bijzonder ook van de attitude, de mentale activiteit van de onderzoeker.

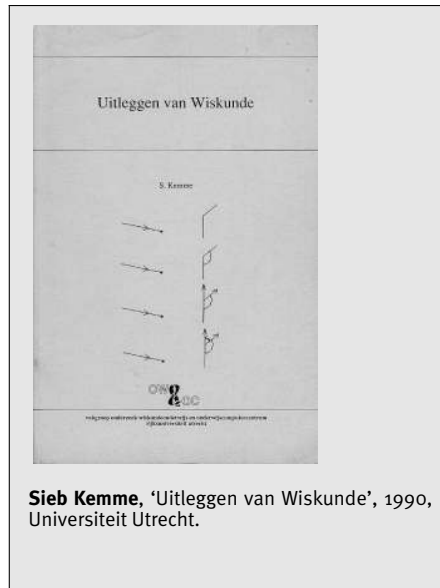
Het feit dat didactisch onderzoek door de praktijk nabijheid een hoog kwalitatief gehalte heeft en omdat de onderzoeker dikwijls het standpunt van de leraar vertolkt, maakt het onmogelijk om de inbreng van de onderzoeker volledig te negeren. Het is daarom beter om in didactisch onderzoek ook de rol van de onderzoeker in alle openheid te bespreken.

Het gaat dan in eerste instantie om een keuze tussen 'deelname of distantie'. Die keuze kan zich al aandienen voordat een begin wordt gemaakt met maken van een onderzoeksplan. Zoals onder meer het geval was bij de studies van Hendrik Mooij, Joop van Dormolen en Rijkje Dekker, toen de onderzoeksproblematiek in de eigen praktijk (van leraar wiskunde) naar voren kwam. In dergelijke situaties is de persoonlijke betrokkenheid van de onderzoeker zo groot, dat 'deelname' meer voor de hand ligt dan 'distantie'. Brandenburg, anno 1968, wilde in navolging van A.D. de Groot hiertegen nog waarschuwen: het doel van het experiment is verschillend van het doel van de lessen die in het kader van het experiment gegeven worden. En om redenen van zuiverheid moeten de rollen van onderzoeker en leraar onderscheiden worden. In hierboven besproken onderzoek bleek het ook mogelijk beide posities in te nemen: participeren in het onderwijs, reflecterend om enige afstand te nemen, triangulatie om ook 'anderen' te horen. In feite is de keus tussen kwalitatieve of kwantitatieve methode ook van het deelname-distantie karakter, we zagen hoe Jaap Vedder vanuit zijn positie in

het onderzoek van 'de 1-1' probeerde kwalitatief en kwantitatief te combineren. Dat doet Jacob Perrenet eveneens, met grotere nadruk, in zijn onderzoek van het leren van wiskundig probleemoplossen in samenwerkende groepjes. Hij onderzoekt verschillende aspecten van deze problematiek (probleemoplossen, groepswork, invloed van groepswork op het fouten maken (kleinschalig en grootschalig), controles toepassen, invloed van het leerboek op maken van specifieke fouten, kenmerk van goede groepsopgaven en hulp door het geven van hint(en)). Als wiskundeleraar en afgestudeerd psycholoog kan hij zijn onderzoek op de grens van onderwijskunde (quasi-experimenteel design met pre- en posttest en grote aantallen proefpersonen) en vakdidactiek (kwalitatief met casestudy karakter) positioneren. De zes onderzoeken worden in zes artikelen gepubliceerd, elk met een eigen probleemstelling en passend onderzoeksdesign. Perrenet ziet zijn proefschrift, een in samenhang gebrachte bundel van verwante artikelen, als voorbeeld van een wijze waarin de kloof tussen onderwijskundig en vakdidactisch onderzoek overbrugd kan worden. Interessant in dit verband is te constateren dat de keus tussen deelname en distantie, tussen leraar en onderzoeker en tussen kwaliteit en kwantiteit ook invloed heeft op de presentatievorm van de studie: men kiest tussen 'essay' en 'rapport', tussen de overtuigingskracht van narratives (praktijkverhalen) en cijfers (uitkomsten van statistische redeneringen en berekeningen), tussen reflectieve conversaties met het kwalitatieve onderzoeksmateriaal en formeel-logische redeneringen op basis van kwantitatieve uitkomsten. Het zal duidelijk zijn dat de persoon van de



**Anne van Streun**, 'Heuristisch wiskunde-onderwijs', 1989, Rijksuniversiteit Groningen.



**Sieb Kemme**, 'Uitleggen van Wiskunde', 1990, Universiteit Utrecht.



**Rijkje Dekker**, 'Wiskunde leren in kleine heterogene groepen', 1991, Universiteit Utrecht.

onderzoeker, zijn achtergrond in het wiskunde-onderwijs, de vakdidactiek en de algemene onderwijskunde, in didactisch onderzoek niet is te negeren. En ten behoeve van de toekomstige gebruiker van de onderzoeksresultaten, niet genegeerd mag worden.

#### De ontwikkeling van de onderzoeker

Promotieonderzoek heeft twee kanten. Aan de ene kant is het bedoeld om de promovendus in de gelegenheid te stellen onder deskundige leiding academische vaardigheden te verwerven. Aan de andere kant moet de promovendus ook laten zien dat hij in staat is op academisch niveau onderzoek te verrichten. In het geval van didactisch onderzoek kan er nog een leerproces aan toegevoegd worden als de onderzoeker een persoonlijke leervraag (bijvoorbeeld uit de eigen onderwijspraktijk) omzet in een onderzoeksprobleem. In het voorgaande hebben we daar enkele voorbeelden van ontmoet. Zo begon de studie van Joop van Dormolen tijdens didactische discussies met een collega wiskunde over het gebruik van het leerboek en het taalgebruik van de auteur. De discussie verliep moeizaam, de beide collega's begrepen elkaar niet goed bij gebrek aan de goede termen en het ontbreken van heldere doelstellingen. De behoefte daar meer over te weten te komen werd versterkt toen Van Dormolen zelf leerboeken ging schrijven en vervolgens toen hij als lerarenopleider zijn studenten van een bruikbaar instrument wilde voorzien om leerteksten te kunnen analyseren. De studie van deze problematiek vereiste veel tijd en een langlopend, diepgaand leerproces. Een leerproces waarin het analyseren van leerteksten, en niet in de eerste plaats academische vaar-

digheden, steeds beter onder de knie werden gekregen. Van Dormolen is zich dit ook bewust, en hij wil, als goed didacticus, de lezer zijn leerproces laten meebeleven. Volgens de 'heuristisch-biografische' manier, zoals hij dat noemt. Het komt uiteindelijk tot een compromis tussen hetgeen in het algemeen gebruikelijk is voor proefschriften en wat deze auteur graag had gewild. De invloed van het persoonlijk leerproces op het onderzoeksresultaat kan nog verder gaan. Voorbeelden daarvan zijn te vinden in ontwikkelingsonderzoek (Streefland, 1983). Het boven beschreven cyclische proces van ontwerpen, bespreken, uitproberen, bespreken en revisie biedt op twee momenten de gelegenheid om vanuit theoretisch standpunt op de praktijk te reflecteren en in het team te bediscussiëren. Zo kan er een ontwikkelproces bij de ontwerper-onderzoeker op gang worden gebracht, dat theorievorming over het onderzoeksobject tot gevolg heeft.

#### Motivatie en politieke geladenheid

Marjolijn Witte studeerde sociologie en andragologie aan de UvA en tracht in haar promotiestudie te achterhalen waarom meisjes in het wiskunde-onderwijs op het voortgezet onderwijs eerder afhaken dan jongens. Ze constateert dat de verschillende pogingen om hier verandering in te brengen (verklaringen van het verschijnsel, maatschappelijke aandrang en didactische vernieuwingen) niet tot een positief resultaat hebben geleid. Een analyse van de wiskunde in het huidige onderwijs en van de heersende opvatting over wiskundige begaafdheid geeft, vanuit haar specifieke standpunt op macroniveau, een idee om fundamenteel en veranderingsgericht in te grijp-

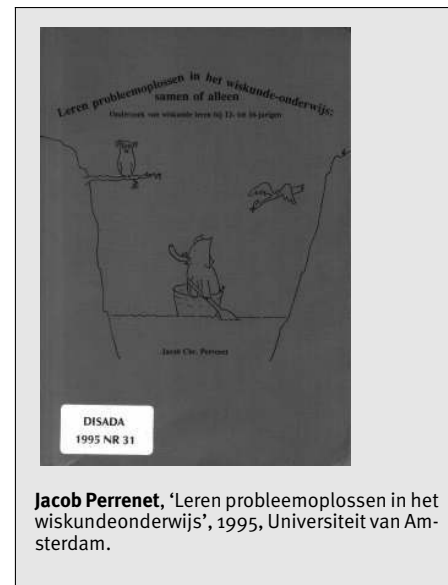
pen. Eigenlijk komt het er op neer dat de 'wereld' op z'n kop gezet moet worden. Dit didactisch onderzoek (ik ben bang dat velen deze term hier niet van toepassing vinden) vindt voornamelijk plaats in het hoofd van de onderzoeker, op basis van een omvangrijke literatuurstudie en gesprekken met haar promotoren. Het is begonnen ten gevolge van haar fascinatie voor het verschijnsel van het afhaken van meisjes, en die is naar haar zeggen al betrekkelijk oud. Ze was zelf goed in wiskunde, maar kon niet goed begrijpen waarom aan het vak wiskunde zo'n geweldige status op school en in de samenleving werd toegekend. Eigenlijk ergerde dat haar behoorlijk. Aan het verlangen van haar opa om wiskunde te gaan studeren, kwam ze niet tegemoet: "Puzzelen is wel leuk, dacht ik, maar daarmee is de wereld niet gebaat." In de literatuurstudie omzeilt ze overigens de wiskunde niet, op zoek naar een alternatieve wiskunde komt ze zelfs terecht bij de dissertatie van intuitionist L.E.J. Brouwer (1907) *Over de Grondslagen van de Wiskunde*. Hoever ze erin is doorgedrongen, kan op grond van haar studie niet gezegd worden, maar zeker is dat didactische onderzoekers 'uit het wereldje van het wiskunde-onderwijs' deze keus niet voor hun rekening hadden genomen. Witte neemt ook kennis van het bekende werk van Lakatos: *Proofs and Refutations. The logic of mathematical discovery*, uit 1977. Zijn uitspraak: "It has not sufficiently realised that present mathematical and scientific education is a hot bed of authoritarianism and the worst enemy of independent and critical thought" kan ze goed gebruiken bij haar kritiek op de zogenoemde expertwiskunde. Ze zegt daar zelf van: "Het zou vermoedelijk makkelijker kunnen wanneer de onderzoeker zelf



**Fré Riemersma**, 'Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs', 1991, Universiteit van Amsterdam.



**Marjolijn Witte**, 'Meisjes meegerekend', 1994, Universiteit van Amsterdam.



**Jacob Perrenet**, 'Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs', 1995, Universiteit van Amsterdam.

wiskundige en/of wiskundendidacticus is; dat ben ik echter niet. Ik heb mij, waar nodig, op de literatuur moeten baseren." (Zie p 31). De persoonlijke betrokkenheid bij de problematiek op microniveau, de professionele noodzaak om de oplossing op macroniveau te zoeken en de vrijmoedigheid om zich een eigen weg te banen door een overweldigende hoeveelheid literatuur, geven aan dit didactisch onderzoek een uitzonderlijk karakter.

#### *Microdidactische problematiek*

Een onderzoek dat drie jaar eerder haar beslag kreeg, van Rijkje Dekker, vertoont opmerkelijke verschillen en overeenkomsten met dat van Marjolijn Witte. Rijkje Dekker deed onderzoek op microdidactisch niveau, ze zat als het ware naast de brugklassers, als ze bezig waren met het pakketje 'Afzender Marlies', een educatief ontwerp van de onderzoeker zelf. Maar, evenals Marjolijn Witte is ze zeer betrokken op haar probleemstelling over niveauverhogingen en samenwerken in heterogene groepjes. Ook deze problematiek heeft een maatschappelijke achtergrond: ze gelooft in de idealen van de middenschool zoals die door haar idool H. Freudenthal waren geadopteerd. En toen de middenschool al tijdens haar onderzoek in de vergetelheid raakte door de introductie van de basisvorming, volhardde ze in haar onderzoek naar signalen van niveauverhoging om aan te tonen dat de Middenschool bestaansrecht heeft. De signalen zoekt ze in de interactie van de leerlingen. Door zorgvuldige audioregistraties van het werken in de groepen, aangevuld met notities over non-verbale elementen van de interactie, beschikt ze over letterlijke protocollen, die een diepgaande didactische analyse

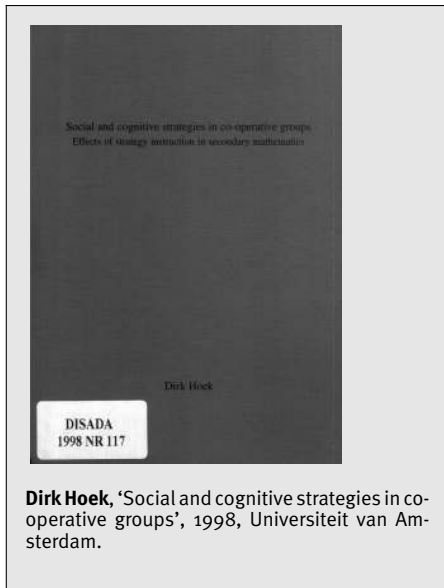
toelaten. Ze vindt haar inspiratie bij de werkwijze en inzichten van Freudenthal, ze praat dikwijls met hem en leest zijn onderwijskundige werken met grote aandacht. Verder leest ze niet veel (in tegenstelling tot Marjolijn Witte), slechts wat publicaties over coöperatief leren in groepen en over differentiatie. En met grote aandacht neemt ze kennis van de dissertaties van het echtpaar Van Hiele (over niveaus). De signalen: (a) tonen of vertellen van oplossingen, (b) uitleggen van oplossingen en (c) kritiseren en (d) verbeteren van oplossingen, zijn subtiel; waarschijnlijk te subtiel om door leraren te worden nagevolgd. Stonden bij Marjolijn Witte de maatschappelijke opvattingen over wiskunde en wiskunde-onderwijs een gladde aanpak van haar jongens/meisjes problematiek in de weg, bij Rijkje Dekker liggen de obstakels in het klaslokaal, waar opvattingen over de wiskunde les de subtiële observatie en begeleiding van leerprocessen buiten bereik houden.

#### **Een nieuw verschijnsel: de aio**

We gingen hierboven voorbij aan de mogelijkheid om een dissertatie op basis van (gepubliceerde) artikelen samen te stellen. Het waren Jacob Perrenet (1995) en Dirk Hoek (1998) die van deze gelegenheid gebruik maakten. Vanzelfsprekend is het in dergelijke gevallen van belang om de verschillende artikelen tot hoofdstukken om te vormen (zonder fundamentele ingrepen te plegen) en ze vervolgens samen te voegen tot een eenheid. Wanneer de didactisch onderzoeker zijn lezers ook als potentiële gebruikers ziet (Goffree, PME 2001), dan moet er nog veel gebeuren om het onderzoekswerk en de conclusies toegankelijk te maken voor een gro-

ter publiek dan de promotiecommissie. Als de promovendus van meet af aan zijn studie in het kader van artikelen ziet, kan in veel van die 'achteraf-problemen' voorzien worden. Dit was overduidelijk het geval bij de studie van Dirk Hoek. Maar daar speelde ook nog een nieuw fenomeen: Hoek was namelijk aangesteld als assistent in opleiding. Dat komt er op neer dat voor hem een academische leeromgeving werd geschapen, met veel expertise onder handbereik, een lopend project waaraan een welgedefinieerde bijdrage dient te worden geleverd in de vorm van een proefschrift. De (globale) probleemstelling staat in de meeste gevallen vast en in principe ook onderzoeksdesign en de te volgen methodologie. In vier jaar moet de klus, in verband met de financiering, geklaard zijn. De promotor en de vakgroep bepalen in hoge mate of tijdens de promotiestudie het leerproces van de aio of de bijdrage aan de didactiek het accent krijgen. Tegen deze achtergrond kunnen we rol, positie en persoon van Dirk Hoek als aio in zijn didactisch onderzoek proberen in te schatten. Vermeld moet overigens worden dat deze aio bij aanvang van zijn promotiestudie niet meer zo piepjong was (geboren in 1962). We noemden reeds enkele positieve omstandigheden. Nu gaan we op zoek naar mogelijke verschilpunten met voorgaande didactische onderzoekingen, die zich uit het werkstuk van Dirk Hoek laten afleiden.<sup>2</sup>

– Het grootschalig onderzoek noodzaakt in zekere zin een afstandelijke aanpak van het onderzoekswerk op de werkvloer. Deelnemende leraren krijgen een (zeer korte) scholing op het onderwijzen van cognitieve en sociale strategieën bij het probleemoplossen, hetgeen betekent dat



**Dirk Hoek**, 'Social and cognitive strategies in co-operative groups', 1998, Universiteit van Amsterdam.



**Lodewijk Schalkwijk**, 'Onderzoekend wiskunde leren', 1998, Katholieke Universiteit Nijmegen.



**Bert Zwaneveld**, 'Kennisgrafien in het wiskundeonderwijs', 1999, Open Universiteit Nederland.

de onderzoeker zelf de lessen niet verzorgt. Het programma wordt in de dagelijkse klassenpraktijk ingezet en de onderzoeker heeft geen invloed op de uitvoering en resultaten.

- Het grote aantal leerlingen (511 + 444) dat bij het onderzoek betrokken is vraagt om (betrouwbare) instrumenten en adequate statistiek voor bewerking van de kwantitatieve data. De instrumenten zijn voor een groot deel door anderen ontwikkeld en het rekenwerk kan worden uitgevoerd in dialoog met een gespecialiseerd methodoloog en aan de hand van een geavanceerd computerprogramma (multilevel-analyse).
- Voor een kwalitatieve onderzoeks aanpak op wiskundig didactisch terrein wordt de noodzaak niet gevoeld en er is eigenlijk ook geen tijd beschikbaar. Beschrijvingen van het onderzoekswerk in de klas gaan niet in op wat er met leerlingen, de leerstof en de leraar gebeurt. Het feit dat bij de attitudemeting alleen wordt gedacht aan 'attitude towards mathematics' (vind je het leuk? relevant? kun je 't aan? wil je er moeite voor doen?), en niet aan 'wiskundige attitude' (gespitst zijn op regelmaat en patronen, indien nodig een andere invalshoek zoeken, doorzetten als 't even tegenzit), die bij het probleemoplossen van belang wordt geacht.
- De betrokkenheid van de onderzoeker op het onderzoeksprobleem heeft een ander (zakelijk?) karakter dan die van de ex-wiskundeleraar. Dit geldt in zekere zin ook aanleiding en motivatie, die in dit geval (aanvankelijk) extrinsiek is.
- Het flankerend ontwerpwerk is in samenwerking met leraren geschied en er wordt

geput uit externe bronnen. 'WiskundeleerstoP' wordt, op twee aardige opgaven na, in de dissertatie niet in beschouwing genomen. Inhoudelijk geïnteresseerde lezers kunnen de lessenserie achteraf bij de auteur opvragen.

- Voor de kwaliteit van de gebruikte instrumenten (betrouwbaarheid) wordt verwezen naar ander onderzoek. Op de betekenis van de scores in individuele gevallen kan, bij het ontbreken van kwalitatieve analyses, niet worden ingegaan, evenmin komt zo de interne validiteit van het meetwerk goed uit de verf. Neem de 'Mathematical Reasoning Ability Test': welke lezer wil niet uitgelegd krijgen wat de score .80 precies zegt over het wiskundig redeneren in de klas. Een dergelijke uitleg is weliswaar niet gebruikelijk in onderwijskundige proefschriften, maar in een wiskundig didactische dissertatie zou hij niet mogen ontbreken, vind ik.

De rol van deze aio is die van de onderzoeker-op-afstand (distantie). De persoon van de onderzoeker komt, ook niet als lerende, in het stuk voor. En zijn positie is daardoor niet in de didactische driehoek te bepalen, maar in de omgeving ervan; vanwege het element van interventie aan de zijlijn, waar de leraar zich inspant de leerlingen iets extra's te leren.

Tenslotte: in het hierboven, op basis van voornamelijk promotiestudies geschetste beeld van wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland, komt nauwelijks samenhang en zeker geen ontwikkeling naar voren. Toch kan men zich nu een beeld vormen van de wiskundig-didactische onderzoeker. Deze is met grote waarschijnlijkheid wiskundeleraar geweest, heeft het onderzoeksprobleem

in de (eigen) praktijk ondervonden, is geneigd in de praktijk van het wiskundeonderwijs op onderzoek te gaan, neemt liever geen distantie maar kiest voor deelname, is gemotiveerd door de gedachte aan een microdidactische verbetering, voornamelijk in de praktijk maar ook theoretisch georiënteerd, kent zichzelf een duidelijke positie in de didactische driehoek toe, is geïnteresseerd in het leren en onderwijzen van wiskunde, leest zich met enige terughoudendheid in de literatuur in, wil ook wel kritisch kennis nemen van algemeen onderwijskundige, in het bijzonder psychologische, literatuur, is aanvankelijk kwalitatief ingesteld, staat open voor eigen ontwikkeling maar kan die nog niet bewust bij het onderzoek betrekken, kan wel door anderen methodologisch gestuurd worden en zich vervolgens open stellen voor kwantitatieve methoden en statistische bewerkingen van de data, maar gaat liever onbevangen de klas in met globale richtlijnen en een open oog (mind) voor onverwachte gebeurtenissen, wekt de indruk dat een wiskundige attitude met een voorkeur voor heuristieken boven algoritmen aan de onderzoeks aanpak kleur geeft. Maar er zijn uitzonderingen, we zagen namelijk ook een 'buitenstaander' zeer gemotiveerd op macroniveau onbevangen een politiek geladen problematiek betreffende het wiskundeonderwijs, grondig aanvatten. En we kwamen een aio tegen, die het didactisch onderzoek voornamelijk als academisch leerproces diende op te vatten en in relatief korte tijd onder goede begeleiding een gaaf stukje onderwijskundig onderzoek tot stand bracht.<sup>3</sup>

## Literatuur en noten

- 1 Dit idee krijgt een interessante uitwerking in een promotiestudie, die na afronding van dit artikel pas in mijn bezit kwam: B.A. van Amerom: *Reinvention of early algebra*. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Freudenthal Institute: Utrecht. Promotoren J. de Lange (wiskunde-didacticus en ontwerper) en K. Gravemeijer (wiskunde-didacticus en ontwerper), co-promotor J. van Maanen (geschiedenis van de wiskunde). Promotiedatum: 16 mei 2002.
  - 2 In zijn studie wil Hoek nagaan of je leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs via het 'aanleren' van bepaalde aanpakstrategieën voor probleemoplossen en het 'aanleren' van manieren om goed samen te werken in kleine groepjes bij het oplossen van problemen, tot betere leerresultaten kunt brengen en of hun houding met betrekking tot het vak wiskunde op school in positieve zin beïnvloed wordt. Dit onderzoek vertoont dus samenhang met die van Van Streun, Riemersma en Perrenet. Voor het werk in de klas wordt ongeveer drie maanden (van de reguliere lestijd) genomen.
  - 3 Ik mag met dit ene voorbeeld geen uitspraken doen over aio-onderzoek in het algemeen, het kwam toevallig op mijn weg tijdens mijn zoektocht naar wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland. Op 22 oktober 2001 promoveerde ook een aio op wiskundig-didactisch onderzoek, in dit geval op de basisschool. (Menne, 2001). Haar leeromgeving was gecreëerd op het Freudenthal Instituut, ze werd begeleid door A. Treffers en kwam tot een belangwekkende bijdrage aan de vakdidactiek. In praktische zin met een leergang 'productief oefenen voor zwakke rekenaars in groep 3' en in theoretische zin met de fundering van het concept productief oefenen in het realistisch reken-wiskundeonderwijs.
  - 4 Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. and B. Winkelmann (eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
  - 5 Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar*. Timmer, Wansink, Van Hiele, Vredenduin en Van Baalen in gesprek met Fred Goffree. SLO: Enschede.
  - 6 Goffree, F. (2001). A consumer's point of view. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed) *Proceedings of the 25th Conference of PME*. Vol 1 (80-86). Freudenthal Institute: Utrecht.
  - 7 Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.), (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
  - 8 Goffree, F. en H. Jansen (1989). *Wiskundeonderwijs Wereldwijd*. Terugblikken op de ICME-VI conferentie in Boedapest 1988. VALO wiskunde en informatica: Enschede.
  - 9 Goffree, F. (1996). 'Onderzoek en ontwikkeling: van en vóór het reken-wiskundeonderwijs in Nederland'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 15(1) 3-18.
  - 10 Groot, A.D. de, (1961). *Methodologie*. Grondslagen van onderzoek en denken in de gedragswetenschappen (1961), Mouton & Co: 's Gravenhage. (1970, vijfde druk).
  - 11 Hoeben, W. Th. J.G. (1981). *Praktijkgericht onderzoek en de groei van kennis*. SVO-reeks nr. 46: 's-Gravenhage.
  - 12 Hoeve, A.H. van der, Kohnstamm, Ph. en G. van Veen, (1937). *Over lees-rekenopgaven en hun didactische en diagnostische waarde*. Mededeling van het Nutseminarium nr. 31, Groningen.
  - 13 Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations- studies and teaching experiments*. Ph.D study Université du Québec a Montréal.
  - 14 Jong, R. de, en M. Wijers (red.) (1993). *Ontwikkelingsonderzoek*. Theorie en Praktijk. NVORWO Freudenthal Instituut: Utrecht.
  - 15 Lampert, M. & D. Loewenberg Ball, (1998). *Teaching, Multimedia, and Mathematics*. Investigations of Real Practice. Teachers College, Columbia University: New York.
  - 16 Poincaré, H., (1908). *Science et méthode*.
  - 17 Smaling, A. (1990). 'Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinisch interview'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(3) 4-10.
  - 18 Streefland, L. (1983). 'Theorievorming door ontwikkelingsonderzoek'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(2), 20-24.
  - 19 Wansink, Joh. H. (1966). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*. Wolters-Noordhoff: Groningen.
- Wiskundendidactisch promotieonderzoek in het basisonderwijs onder begeleiding van A. Treffers**
- 20 Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
  - 21 Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute: Utrecht.
  - 22 Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. CD-bèta Press: Utrecht.
  - 23 Jong, R. de, (1986). *Wiskobas in methoden*. Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965-1985). Vakgroep OW&OC: Utrecht (met N.A.J. Lagerweij).
  - 24 Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*. The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design. Freudentaal Instituut: Utrecht. (met M. Boekaerts en M. Beishuizen).
  - 25 Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit*. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getalengebied tot 100 - een onderwijsexperiment. Freudentaal Instituut: Utrecht.
  - 26 Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Een historisch didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Freudentaal Instituut: Utrecht.
  - 27 Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde*. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs. De Ruiter: Gorinchem. (met J.F. Vos, P. Span en W. van Doorn).
  - 28 Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
- Ander wiskundendidactisch onderzoek met betrekking tot de basisschool**
- 29 Baltussen, M. (1992) *7 trainingsvarianten voor rekenproblemen*. Een vergelijkend onderzoek uitgevoerd bij moeilijk lerende kinderen en kinderen met leerproblemen. KPC: 's Hertogenbosch.
  - 30 Eerde, H.A.A. van, (1996). *Kwantiwijzer*. Diagnostiek in Reken-Wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
  - 31 Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Onderwijsontwikkelingsonderzoek Wiskunde & Didactiek op de Pedagogische Academie. IOWO: Utrecht.
  - 32 Harskamp, E.G. (1988). *Rekenmethoden op de proefgesteld*. RION: Groningen.
  - 33 Heijden, M. K. van der, (1993). *Consistentie van aanpakgedrag: Een procesdiagnostisch onderzoek naar 8 aspecten van hoofdrekenen*. Swets en Zeitlinger: Lisse.
  - 34 Klep, J.H.F.M. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van wiskundige bekwamheid*. Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
  - 35 Kool, Marjolein (1999). *Die conste vanden getale*. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen. Uitgeverij Verloren: Hilversum.
  - 36 Koster, K.B. (1975). *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool*. Empirische studies over onderwijs. Tjeenk Willink: Groningen.
  - 37 Luit, J.H.E. (1987). *Rekenproblemen in het speciaal onderwijs*. Katholieke Universiteit Nijmegen.
  - 38 Mulken, F. van, (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen*. Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd. Vakgroep Onderwijsstudies, Rijksuniversiteit Leiden.
  - 39 Vos, W.A. de, (1998). *Het methodegebruik op basisscholen*. Shaker Publishing: Maastricht.
  - 40 Willemsen, Theo (1994). *Remediële rekenprogramma's voor de basisschool*. Een effectstudie. Monografieën onderwijsonderzoek 19. RION: Groningen.
  - 41 Wolters, Mirjam (1978). *Van rekenen naar algebra*. Een ontwikkelingspsychologische analyse. Rijksuniversiteit Utrecht.