

N.G. de Bruijn

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
n.g.d.bruijn@tue.nl

Set!

Het kaartspel SET! is bedacht door Marsha J. Falco, toen zij als populatie-geneticus werkte in Cambridge (Engeland). Daar deed ze onderzoek naar epilepsie bij Duitse herders. Het was ingewikkeld werk en voor haar studie gebruikte Falco genetische symbolen die ze op 3 bij 5 kaarten zette. Een paar dierenartsen die over haar schouder meekijken zagen de 'sets'. In eerste instantie werd het spel gespeeld door post-docs en graduate students. Later werd het een gezinsspel. Rond 1990 werd het spel officieel uitgebracht in Amerika, waar het al snel een hit werd. Veel later bereikte het Nederland, onder andere via de getaltheorieconferentie ANTS-III in Portland, waar Joe Buhler het spel introduceerde bij een aantal Nederlandse aio's. Tegenwoordig is SET! te koop in elke goedgesorteerde speelgoedwinkel.

Bij SET! liggen er steeds twaalf kaarten op tafel. N.G. de Bruijn, die het spel leerde kennen via zijn kinderen en kleinkinderen, bestudeert in dit artikel de verdeling van het aantal 'sets' in die twaalf kaarten.

In speelgoedwinkels is het spel SET! te koop (Ravensburger Spielverlag). Volgens de doos is het geschikt voor kinderen van 10–99 jaar. Die 99 zal wel zoiets als een millenniumfout zijn, want boven de honderd moet het ook nog wel kunnen. Maar of het dan nog leuk is? Het is een zenuwenspel: wie niet het snelst is verliest steeds. Geen spel voor oudere heren die hun hart ook nog voor andere dingen nodig kunnen hebben. Die laten het snelle denkwerk beter aan hun computer over, wanneer ze die tenminste nog kunnen programmeren. Ik deed dat op mijn huiscomputer van het jaar nul-nul (om misverstand te voorkomen, dat is het jaar 2000). Die liet ik een paar honderd miljoen keer spelen om wat inzicht in de spelkansen te krijgen.

Het spel SET! wordt gespeeld met 81 kaarten waarop figuurtjes staan. De kaarten zijn te onderscheiden door vier kenmerken. Het eerste kenmerk is het *aantal* figuurtjes: een kaart kan een figuurtje hebben, of twee onderling gelijke, of drie onderling gelijke. Het tweede kenmerk is de *kleur* van de figuurtjes. Ze kunnen rood, groen of paars zijn. Het derde kenmerk is de *vorm* van de figuurtjes. Het kunnen rechthoeken (soms ook wel ruiten) zijn, of ellipsen, of slingers. Het vierde kenmerk is de *vulling*: ze kunnen

massief gekleurd zijn, of gespikkeld, of leeg (dat wil zeggen dat alleen de randen gekleurd zijn).

Elke combinatie van de vier kenmerken zit precies een keer in de doos. Doorgewinterde numerici weten wel dat $81 = 3^4$.

Om er wat gemakkelijker over te kunnen schrijven vervang ik hier de kenmerken door tekens. Voor het eerste kenmerk geef ik de mogelijkheden 1, 2, 3, voor het tweede de kleine letters a, b, c , voor het derde de hoofdletters X, Y, Z , en voor het vierde de tekens $+, -, *$. Een kaart is nu een woord van vier tekens, bijvoorbeeld $3cZ*$ of $2bZ+$.

Set en sets

Ik zal hier niet alle spelregels noemen, maar het alleen hebben over de steeds terugkerende situatie van 12 kaarten die uit een geschud spel zijn gehaald en zichtbaar op tafel worden gelegd. Gemakshalve zal ik zo'n greep van 12 een *tafel* noemen. De kaarten worden grondig bestudeerd door de spelers (op de doos staat dat er 2 tot 8 deelnemers kunnen zijn, maar ik zou zeggen dat het ook wel gaat met 0, 1 of oneindig). Het is de kunst om in de collectie van 12 kaarten een drietal aan te wijzen die een SET vormen. Wie dat denkt te zien roept vlug SET!, maar als het daarna aangewezen drietal geen echte SET blijkt te zijn volgt een straf.

Wat is een SET? Dat is voor velen nogal verwarrend, maar de ervaring leert dat ook kinderen ermee overweg kunnen. Een SET is een stel van drie kaarten met de volgende eigenschap: voor elk van de vier kenmerken geldt dat de kaarten of alle drie gelijk of alle drie verschillend zijn. Een voorbeeld is het drietal

$$2bY*, 2aZ*, 2cX*.$$

Naar het eerste kenmerk zijn ze alle drie gelijk (2, 2, 2), naar het tweede alle drie verschillend (b, a, c), naar het derde ook (Y, Z, X), en naar het vierde weer alle drie gelijk ($*, *, *$).

Het is gemakkelijk in te zien dat bij elk tweetal kaarten uit het pak van 81 er precies een is die met die andere twee een SET vormt. Daaruit blijkt dat het aantal mogelijke SETs 1080 bedraagt

— het aantal paren is C_2^{81} (ik gebruik C_k^n voor de binomiaalcoëfficiënt $n!/(k!(n-k)!)$, en als men bij elk paar de bijbehorende derde kaart zoekt krijgt men elke SET drie keer). Tabel 1 geeft een voorbeeld van een tafel, zie ook figuur 1.

$2aZ-$	$3cY+$	$2bZ+$	$2cZ+$
$1bY*$	$3cZ*$	$3aY+$	$3bY-$
$2aZ*$	$3aX-$	$2cY-$	$3aZ*$

Tabel 1 Twaalf set-kaarten met drie sets.

$1aX+$	$1bY+$	$2aX+$	$2bY+$
$1aX-$	$1bY-$	$2aX-$	$2bY-$
$1aZ+$	$1bZ+$	$2aZ+$	$2bZ+$

Tabel 2 Twaalf kaarten zonder sets.

De verdeling in rijen en kolommen dient voor het overzicht maar heeft verder geen bijzondere betekenis. In tabel 1 zijn er drie SETs:

- 1: $1bY*$ $3aY+$ $2cY-$
 2: $1bY*$ $3aX-$ $2cZ+$
 3: $3aY+$ $3aX-$ $3aZ*$

Het komt ook wel voor dat er geen enkele SET op tafel ligt. Een voorbeeld staat in tabel 2 (zie ook figuur 2). Een redenering is hier: de 3 en de c komen niet voor, dus een SET moet drie keer 1 of drie keer 2 bevatten, en ook drie keer a of drie keer b . Het zou dus een van de 4 kolommen moeten zijn, maar die hebben allemaal twee keer $+$ en een keer $-$.

Ter oefening voor de lezer staan in tabellen 3 en 4 een tweetal tafels (ze hebben respectievelijk 5 en 6 SETs; zie ook figuren 3 en 4).

$2bX+$	$1aY-$	$2aY+$	$3bX+$
$2cZ+$	$3bZ+$	$1cX+$	$2aX+$
$3bY+$	$2aZ-$	$2bY*$	$3bX*$

Tabel 3 Twaalf kaarten met 5 sets

$1bY*$	$3aY+$	$3aX-$	$1aY+$
$3cX-$	$2bZ*$	$1cX-$	$1bZ*$
$3bX-$	$1cY-$	$2cY-$	$3bX+$

Tabel 4 Twaalf kaarten met 6 sets

Het ligt voor de hand een computer in te schakelen om experimenteel vast te stellen wat ongeveer de verdeling is van het aantal SETs in een aselechte trekking van 12 kaarten uit het pak van 81 stuks. Om een snel programma te maken dat een groot aantal gevallen achter elkaar behandelt, is het verstandig de kaarten te nummeren van 0 tot en met 80, en te beginnen met de aanleg van een 81×81 matrix waaruit voor elk paar i en j het nummer is af te lezen van de kaart die samen met kaart i en kaart j een SET vormt. Hier is het resultaat van een run van 250 miljoen stuks. Daarbij

was, als m_k het aantal gevallen met k SETs voorstelt:

$$\begin{aligned} m_0 &= 8077176, & m_1 &= 36294878, & m_2 &= 65238204, \\ m_3 &= 68149583, & m_4 &= 45063382, & m_5 &= 19968806, \\ m_6 &= 5829548, & m_7 &= 1169702, & m_8 &= 170948, \\ m_9 &= 29468, & m_{10} &= 7326, & m_{11} &= 571, \\ m_{12} &= 322, & m_{13} &= 73, & m_{14} &= 13, & m_{15} &= m_{16} = \dots = 0. \end{aligned}$$

We zien dat er maar een paar procent kans is dat er geen enkele SET op tafel ligt, en dat er maar een doodenkele keer een tafel tevoorschijn komt met 14 SETs. In tabel 5 staat er zo een (zie ook figuur 5).

Zouden we nog hoger dan 14 kunnen komen? Na zoiets als een half miljard probeersels bleek 14 nog steeds het absolute record te zijn, en 14 kwam zo om de 23 miljoen keer voor.

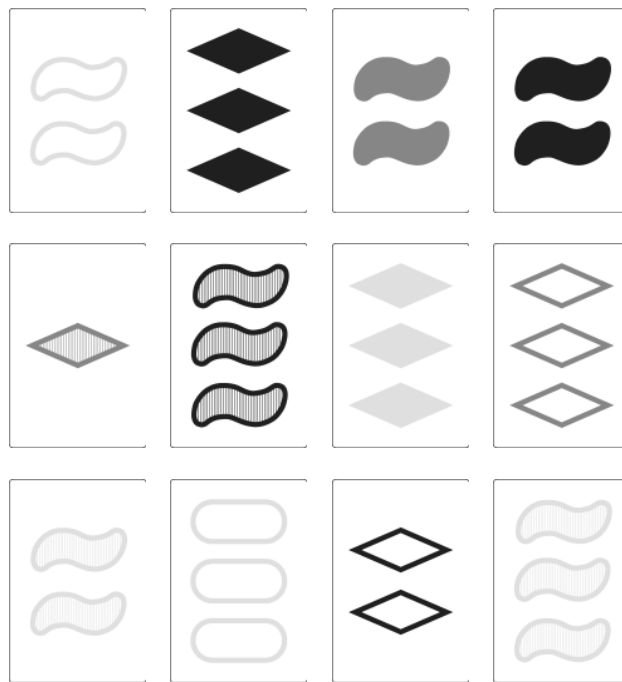
$2bX*$	$3cY*$	$2cY+$	$3cY-$
$2aZ-$	$2cY-$	$1cY*$	$1aZ+$
$3aZ*$	$2cY*$	$1bX-$	$3bX+$

Tabel 5 Twaalf kaarten met 14 sets

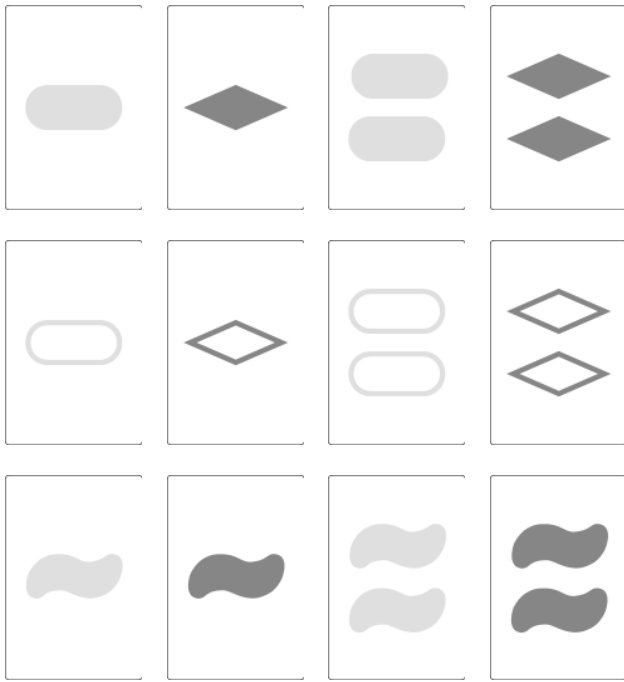
Een beetje wiskunde

Laten we er nu eens wat wiskunde omheen gaan bouwen. Eerst gaan we over op een notatie die wat lastiger is te lezen dan de hierboven gebruikte, maar duidelijk beter is voor de wiskundige behandeling: bij elk kenmerk geven we de waarden met 0, 1 of 2 aan. Een kaart is nu een getal van 4 cijfers (soms beginnend met nullen, zoals 0201) in het drietallige stelsel. Deze drietallige codes representeren de getallen van 0 tot en met 80.

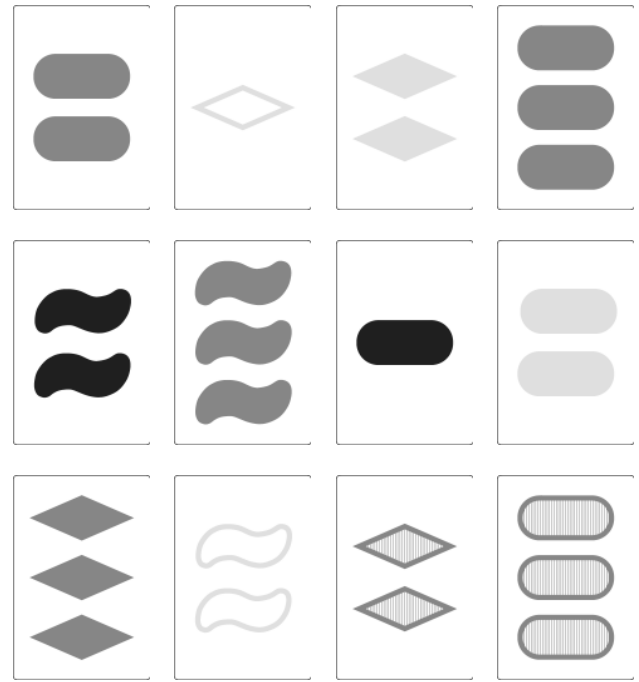
Nog leuker is het om kaarten als punten in een eindige lineaire ruimte te zien. We werken dan in de vierdimensionale affiene ruimte met F_3 als grondlichaam. Deze F_3 wordt ook wel aange-



Figuur 1 Een 'tafel' met twaalf set-kaarten. Er zijn drie sets.



Figuur 2 Twaalf kaarten zonder sets.



Figuur 3 Twaalf kaarten met 5 sets

duid als $GF(3)$, of als $Z(\text{mod } 3)$, of $Z/(3Z)$, of $Z/(3)$. Maar F_3 laat zich het gemakkelijkst schrijven. De elementen zijn 0, 1 en 2, en de operaties zijn de gewone optelling en vermenigvuldiging modulo 3.

De verzameling kaarten is nu de verzameling punten in de ruimte $(F_3)^4$. Een paar belangrijke opmerkingen:

1. Laat x, y, z elementen van F_3 zijn. Dan is de conditie

of ze zijn alle drie gelijk, of ze zijn alle drie verschillend

gelijkwaardig met de conditie $x + y + z = 0$.

2. Een SET is dus een drietal verschillende punten

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4), \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

met

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 &= 0, & x_2 + y_2 + z_2 &= 0, \\ x_3 + y_3 + z_3 &= 0, & x_4 + y_4 + z_4 &= 0. \end{aligned}$$

3. Als $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ twee verschillende punten uit de ruimte $(F_3)^4$ zijn, dan is het derde punt van de rechte lijn die door deze punten gaat het punt $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ bepaald door de conditie dat $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$. De punten van de verbindingslijn zijn namelijk gegeven door $u\mathbf{x} + v\mathbf{y}$ met $u, v \in F_3, u + v = 1$. De waarde $u = 0$ (dus $v = 1$) levert het punt $\mathbf{x}$ op, de waarde $u = 1$ (dus $v = 0$) het punt $\mathbf{y}$, het derde punt komt daarom van $u = 2$ (dus ook $v = 2$), en is daarom het punt $2\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$. Opgeteld bij $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ geeft dat $\mathbf{0}$.
4. Een SET is dus hetzelfde als een drietal verschillende punten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die op één lijn liggen.

Lijnen, vlakken en hypervlakken

We bekijken een affiene ruimte en geen vectorruimte, dus lijnen, vlakken en hypervlakken hoeven niet door de oorsprong te gaan. Laten we ze even tellen.

Er zijn in de ruimte $81 \cdot 80/2$ puntenparen, en op elke lijn lig-

gen er drie, zodat er $81 \cdot 80/6 = 1080$ lijnen zijn. Dit werd al eerder gevonden bij het tellen van de SETs.

Het aantal hypervlakken kunnen we tellen door naar hun vergelijkingen te kijken. Die hebben de vorm $ax + by + cz + dw = e$ (E. Landau zou hieraan toegevoegd hebben: waarin e niet de basis van de natuurlijke logaritmen is). Met $e = 0$ zijn er 80 combinaties voor a, b, c, d , want we moeten het geval $a = b = c = d = 0$ uitsluiten. Dan hebben we wel alles dubbel geteld, want vermenigvuldiging van een vergelijking met een van nul verschillende factor levert geen nieuw hypervlak op. We krijgen er dus 40. Om dezelfde reden kunnen we ons, als e van 0 verschilt, beperken tot $e = 1$, en we krijgen er nog eens 80. Totaal 120 hypervlakken.

Op dezelfde manier kunnen we, door naar vergelijkingen te kijken, het aantal vlakken binnen een hypervlak tellen. In plaats van drie keer $(81 - 1)/2$ krijgen we drie keer $(27 - 1)/2$, dus 39 stuks. En weer een dimensie lager: het aantal lijnen in een vlak is drie keer $(9 - 1)/2$, dus 12.

Tafels met 14 SETs.

De tafels met 14 SETs, voorzover ik die aantrof, hadden allemaal dezelfde structuur, en konden door (niet-homogene) lineaire transformaties uit elkaar worden afgeleid. De structuur is eenvoudig te beschrijven. In de eerste plaats merk je op dat alle 12 punten in één hypervlak liggen. En binnen dat hypervlak liggen er 9 van de twaalf in eenzelfde vlak V (dat ze dus helemaal opvullen). Binnen het hypervlak zijn er twee andere vlakken evenwijdig aan V . De drie resterende punten P, Q, R liggen in deze evenwijdige vlakken, maar niet alle drie in hetzelfde. Laat P in het ene liggen, Q en R in het andere. De verbindingslijnen PQ en PR snijden het vlak V en leveren dus SETs op. Samen met de 12 lijnen uit het vlak V komen we tot 14 SETs.

Tafels met deze speciale structuur zal ik 3D14-tafels noemen.

Tabel 6 geeft een voorbeeld (terwille van de algebraïsche discussie zijn de kaarten als viercijferige getallen in het drietallig stelsel aangegeven).

1200	1101	2101	2220
0101	1002	2002	1012
0220	0200	2200	0002

Tabel 6 Een 3D14-tafel

In tabel 6 zijn er 14 SETs:

1200 1101 1002, 1200 2101 0002, 1200 0101 2002,
 1200 0200 2200, 1101 2101 0101, 1101 2002 0200,
 1101 2200 0002, 2101 1002 0200, 2101 2002 2200,
 2101 1012 0220, 2220 0101 1012, 0101 1002 2200,
 0101 0200 0002, 1002 2002 0002.

In dit stel van 12 kaarten zijn er negen die een vlak vormen: 1200, 1101, 1002, 2200, 2101, 2002, 0200, 0101, 0002. In dat vlak liggen 12 lijnen, dus 12 SETs. Buiten dat vlak vallen 1012, 2220, 0220.

De lijn van 2220 naar 0220 loopt evenwijdig aan het vlak, maar die van 1012 naar 2220 snijdt het vlak in 0101, zodat dit drietal een SET vormt. Ook de verbinding van 1012 met 0220 snijdt het vlak, en wel in 2101. Dat levert dan de veertiende SET op.

Als vergelijkingen van het vlak (in de variabelen x, y, z, w) kan men opgeven: $z = 0, y + w = 2$. Een parametervoorstelling van het vlak is: $(1200) + k * (0201) + m * (1000)$.

Het hypervlak dat alle 12 punten bevat heeft de vergelijking $y + w = 2$.

Hoeveel van zulke 3D14-tafels zijn er binnen een gegeven hypervlak? Er zijn, zoals boven vastgesteld, 39 mogelijke vlakken om vol te leggen met de eerste negen punten, daarna nog 18 mogelijkheden voor P , en dan nog C_2^9 voor het paar Q, R . In dat hypervlak liggen dus $39 \cdot 18 \cdot C_2^9 = 25272$ kopieën van die 3D14-tafel.

Door een volledige zoekactie naar *alle* gevallen met 14 of meer SETs in een gegeven hypervlak kon worden vastgesteld dat er daarvan ook precies 25272 zijn. Daaruit volgt dat, nog steeds binnen een hypervlak, *alle* gevallen met 14 SETs zulke 3D14-tafels zijn, en dat er geen zijn met 15 of meer SETs.

Overigens is het amusant gebruik te maken van de mogelijkheid de zoekactie met een factor $117/22$ te verkorten door beperking tot tafels die twee gefixeerde kaarten uit het hypervlak bevatten. Met een eenvoudige redenering laat je eerst zien dat het er niet toe doet welke kaarten je fixeert: het levert steeds hetzelfde aantal. Door te sommeren over alle mogelijke paren van twee te fixeren kaarten krijg je een 66 keer te grote uitkomst, want $66 = C_2^{12}$ is het aantal paren in een stel van 12 (dit is een geval van de schaapherderstelling: om vast te stellen hoeveel schapen er in een wollige kluwen zitten, gaat de herder op de grond liggen, telt het aantal poten en deelt door 4. In dit geval zijn poten puntenpa-



ren, waarvan elk schaap er 66 heeft). Op deze manier werkende kan je je beperken tot het doorploegen van C_{10}^{25} tafels in plaats van C_{12}^{27} , en dat scheelt die genoemde factor $117/22$. Erg belangrijk is het overigens niet, want de afwerking van $C_{12}^{27} = 17383860$ tafels kost maar een half uurtje (mijn programma doet er 10000 per seconde). Maar het gebruik van symmetrieargumenten is charmant, altijd leerzaam en soms knapjes gevaarlijk (het gevaar van wishful thinking).

De conclusie is dat, wanneer er binnen de gehele $(F_3)^4$ een geval met 15 of meer SETs zou liggen, dat geen driedimensionale zou zijn.

Als we met random tafels werken zonder beperking tot lagerdimensionale, komen we af en toe zo'n 3D14-tafel tegen. Hoe vaak is dat te verwachten?

Zoals eerder werd gezegd, zitten er in elk hypervlak 25272 van deze. En er zijn 120 hypervlakken. We komen daarmee op 3032640 stuks, want een tafel kan nooit in twee verschillende hypervlakken liggen (de doorsnede van twee verschillende hypervlakken heeft nooit meer dan 9 punten).

Het totale aantal tafels is $C_{12}^{81} = 70724320184700$. Dus zo één op de 23 miljoen keer kan je een 3D14-tafel tegenkomen. Bij een wilde zoektocht over meer dan een half miljard tafels naar gevallen van 14 of meer SETs kwam ik er nooit eentje tegen die niet driedimensionaal is. Wat ik vond waren dus allemaal 3D14's. Ik merk op dat het checken op driedimensionaliteit een fluitje van een cent is, en veel gemakkelijker dan het checken of een tafel isomorf is met een 3D14-tafel.

Dit is voor mij dan de stand van de wetenschap. Maar het kan heel goed zijn dat de een of andere slimmerik met een eenvoudig bewijs laat zien dat alle tafels met 14 SETs in hypervlakken liggen, en dat tafels met meer dan 14 SETs er helemaal niet zijn. Dan sta ik een beetje voor schut met al mijn machinekracht.

Naschrift

Dit stukje "Set!" verscheen als bijdrage aan het "Liber Amicorum" aangeboden aan J.K.M. Jansen, numericus aan de Technische Universiteit Eindhoven, ter gelegenheid van zijn 65ste verjaardag.

Ger Koole moedigde mij aan het in het Nieuw Archief voor Wiskunde een ruimer publicatie te geven, en Chris Zaal gaf enkele tekortkomingen aan die ik hierboven heb hersteld. De belangrijkste was dat ik een verkeerde tafel had laten afdrucken als voorbeeld van een situatie zonder enige SET.

Projectiemethode

Aan het eind van het stukje vroeg ik me af of er iemand was die met een eenvoudig bewijs kon laten zien dat alle tafels van 14 SETs in hypervlakken liggen en dat tafels van meer dan 14 SETs er helemaal niet zijn.

Zo iemand was er inderdaad. Joe Buhler, Portland (Oregon, U.S.A) gaf een idee aan waarmee uit het feit dat er geen driedimensionale tafels met 15 SETs zijn kan worden afgeleid dat tafels met 15 SETs helemaal niet bestaan. Dat idee kan ook worden gebruikt om te laten zien dat alle tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn.

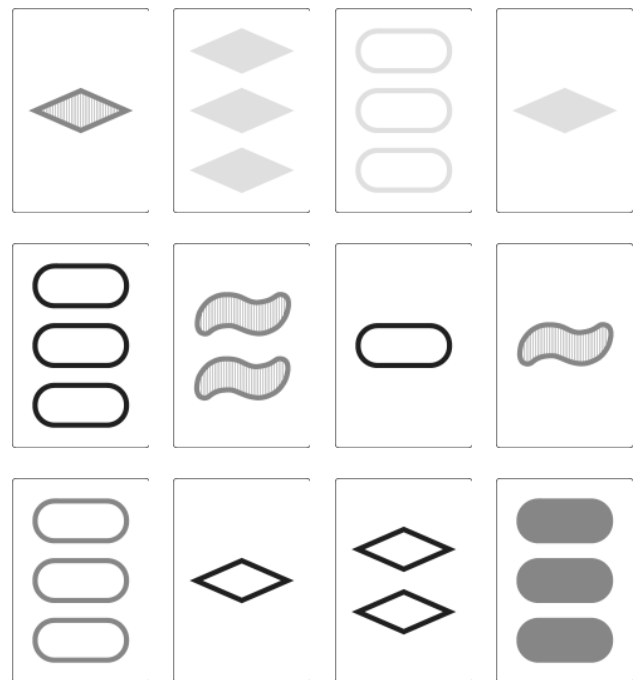
Joe Buhler stelde voor om te laten zien dat er bij een tafel met 15 SETs, dus bij een in de ruimte $(F_3)^4$ gelegen verzameling van 12 punten met 15 collineaire drietallen, er in de $(F_3)^4$ een richting te

vinden is zodanig dat geen enkele lijn in die richting meer dan één punt van de twaalf bevat. Deze richting kan worden gebruikt om evenwijdig te projecteren op een hypervlak dat die richting niet bevat, en dan is de rest van de zaak eenvoudig.

Laten we uitgaan van een tafel, dus een verzameling V van 12 punten in $(F_3)^4$, met m SETs waarbij $m \geq 14$. We willen weten hoeveel lijnen er in $(F_3)^4$ kunnen zijn waarop meer dan één punt van V ligt. Er zijn C_2^{12} , dus 66 paren van punten van V . Maar er zijn m SETs, en de 3 puntenparen die op een SET liggen leveren 3 keer dezelfde verbindingslijn op. Dus met 66 hebben we er m keer twee teveel geteld. Daarmee stellen we vast dat er maar $66 - 2m$ lijnen in $(F_3)^4$ zijn met meer dan één punt van V . Doordat $m \geq 14$ is dit aantal ≤ 38 . Dit aantal is kleiner dan het aantal richtingen in $(F_3)^4$. Dat bedraagt namelijk 40, wat we zien door een punt P te kiezen en te verbinden met de 80 resterende punten, die twee aan twee op lijnen door P liggen. Daarmee is bewezen dat er een richting bestaat zo dat geen enkele lijn in die richting meer dan één punt van V bevat. We kiezen vervolgens een (driedimensionaal) hypervlak dat de gekozen richting niet bevat, en projecteren de verzameling V in die richting op dat hypervlak. Dat geeft een verzameling V^* van 12 verschillende punten. Als drie punten van V op één lijn liggen, geldt dat ook voor de projecties van die drie punten. De driedimensionale tafel V^* heeft derhalve m of meer SETs.

Uit onze zoekerij met computer weten we dat er geen driedimensionale tafels met meer dan 14 SETs zijn, zodat nu bewezen is dat er ook in $(F_3)^4$ geen tafels met meer dan 14 SETs zijn.

Ook de vraag of werkelijk *alle* tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn is met deze projectiemethode gemakkelijk te beantwoorden. Als V 14 SETs heeft weten we dat de projectie V^* er 14 of meer heeft, en mijn door computer ondersteunde tellerij had voor dat driedimensionale geval vastgesteld dat het er dan precies 14 moeten zijn en dat de structuur van V^* daarmee geheel vast ligt. Die structuur had ik 3D14-tafels genoemd.



Figuur 4 Twaalf kaarten met 6 sets

Laat V bestaan uit de punten $A_1, \dots, A_{12}$. De projectie V^* , bestaande uit de punten $A_1^* \dots A_{12}^*$, is een 3D14-tafel. We nemen aan dat de nummering zo gekozen was dat $A_1^* \dots A_9^*$ de 9 punten van een vlak vormen, A_{10}^* buiten dat vlak ligt, A_{11}^* op de verbindingslijn van A_{10}^* met A_8^* , A_{12}^* op de verbindingslijn van A_{10}^* met A_9^* . Ook nemen we aan dat de nummering zo gekozen was dat de overige 12 SETs in V^* zijn:

$$\begin{aligned} &\{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}, \{A_4^*, A_5^*, A_6^*\}, \{A_7^*, A_8^*, A_9^*\}, \{A_1^*, A_4^*, A_7^*\}, \\ &\{A_2^*, A_5^*, A_8^*\}, \{A_3^*, A_6^*, A_9^*\}, \{A_1^*, A_5^*, A_9^*\}, \{A_2^*, A_6^*, A_7^*\}, \\ &\{A_3^*, A_4^*, A_8^*\}, \{A_1^*, A_6^*, A_8^*\}, \{A_2^*, A_4^*, A_9^*\}, \{A_3^*, A_5^*, A_7^*\}. \end{aligned}$$

Als $\{A_i^*, A_j^*, A_k^*\}$ met $1 \leq i < j < k \leq 12$ een SET vormen moeten ook $\{A_i, A_j, A_k\}$ een SET opleveren, want anders zou V geen 14 SETs kunnen hebben. We gaan nu uit van drie punten die niet op één lijn liggen, waarvoor we kiezen A_1^*, A_3^* en A_5^* . Het vlak door de hiermee corresponderende punten A_1, A_3, A_5 noemen we α . Op de lijn $A_1^*A_3^*$ ligt A_2^* . Bijgevolg ligt A_2 op de lijn A_1A_3 , zodat ook A_2 in α ligt. Op analoge wijze vinden we A_9 op de lijn A_1A_5 en A_7 op de lijn A_3A_5 , dus ook A_9 en A_7 liggen in α . Verder gaande merken we op dat A_8 op A_2A_5 ligt, A_6 op A_3A_9 en A_4 op A_1A_7 . Daarmee is vastgesteld dat $A_1, \dots, A_9$ allemaal in α liggen. Het vlak α en het punt A_{10} bepalen een driedimensionale ruimte. Gemakkelijk zien we dat tenslotte ook A_{11}^* en A_{12}^* in die ruimte liggen, want omdat A_{11}^* op $A_{10}^*A_8^*$ ligt zal ook A_{11} op $A_{10}A_8$ moeten liggen, en evenzo A_{12} op $A_{10}A_9$.

Hiermee is aangetoond dat *alle* tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn.

Zonder krukken

Ik heb me tot nu toe op computerresultaten beroepen voor het feit dat alle driedimensionale tafels met 14 SETs die 3D14-structuur hebben en voor het feit dat er geen driedimensionale tafels met meer dan 14 SETs zijn. Ik laat nu zien dat deze uitspraken ook zonder computer kunnen worden afgeleid.

Laat W een verzameling van 12 punten zijn in $(F_3)^3$ met m SETs, waarbij $m \geq 14$. Dan zijn er twee van deze SETs evenwijdig, want W heeft meer SETs dan er richtingen zijn. Er zijn namelijk in $(F_3)^3$ maar 13 verschillende richtingen, wat we constateren door een punt te nemen en dat met alle andere 26 punten te verbinden; die lijnen vallen twee aan twee samen.

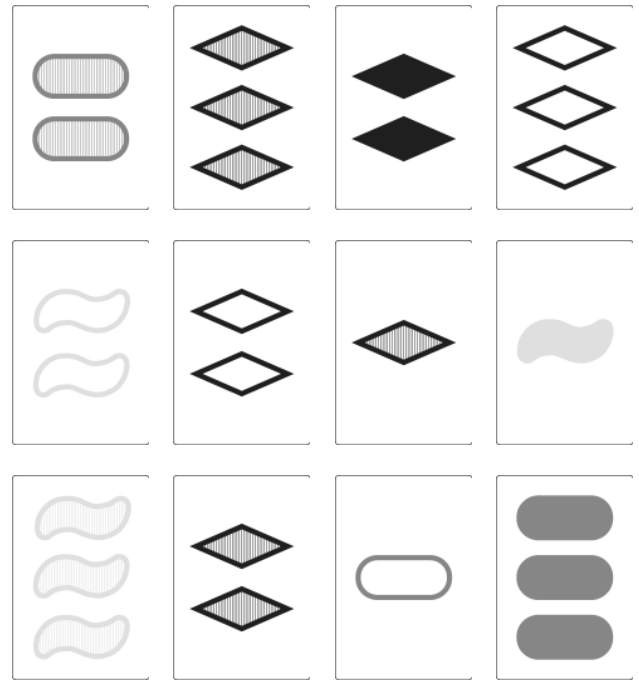
Neem nu twee evenwijdige SETs van W . Laat β het vlak zijn dat deze lijnen bevat. Laat verder γ en δ de twee vlakken zijn die evenwijdig zijn met β , zodat de verzameling der 27 punten van $(F_3)^3$ is opgesplitst: 9 punten in elk van β, γ en δ .

Laat p, q, r de aantallen punten voorstellen die W respectievelijk in β, γ, δ heeft, dus $p + q + r = 12$.

Het grootste aantal SETs dat een deelverzameling van k punten in een vlak (van 9 punten) kan hebben stellen we door $\theta(k)$ voor. Gemakkelijk valt te constateren dat

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta(1) = \theta(2) = 0, \theta(3) = \theta(4) = 1, \theta(5) = 2, \\ \theta(6) &= 3, \theta(7) = 5, \theta(8) = 8, \theta(9) = 12. \end{aligned}$$

Nu kan een ongelijkheid worden afgeleid voor m , het aantal SETs van W . Een SET van W zal óf geheel in één van de vlakken β, γ, δ liggen, óf ze alle drie snijden. Van de laatste soort kunnen er niet meer dan qr zijn omdat er q resp. r mogelijkheden zijn voor het



Figuur 5 Twaalf kaarten met 14 sets

snijpunt in γ respectievelijk δ . Daarmee is een bovengrens voor m afgeleid:

$$m \leq \theta(p) + \theta(q) + \theta(r) + qr.$$

Wanneer $p = 6$ mag de eerste term in het rechterlid worden vervangen door het getal 2, want er is vastgelegd dat de 6 punten in β langs twee evenwijdige lijnen zijn gerangschikt, zodat het aantal van 3 SETs daar niet kan worden gehaald.

Alle gevallen (p, q, r) met $p + q + r = 12$ kunnen nu worden onderzocht. Daarbij is $6 \leq p \leq 9$, terwijl het geen beperking is om te onderstellen dat $q \geq r$. Voor (p, q, r) komen dan alleen in aanmerking de tripels $(6,6,0)$, $(6,5,1)$, $(6,4,2)$, $(6,3,3)$, $(7,5,0)$, $(7,4,1)$, $(7,3,2)$, $(8,4,0)$, $(8,3,1)$, $(8,2,2)$, $(9,3,0)$, $(9,2,1)$, waarbij als bovengrens voor m respectievelijk gevonden wordt: 5, 9, 11, 13, 7, 10, 12, 9, 12, 12, 13, 14. Al deze getallen zijn ≤ 14 , en het enige geval dat 14 oplevert is $(9,2,1)$. Dat is precies de situatie van de 3D14-tafels: het vlak β helemaal vol, één punt in δ en twee punten in γ .

Hiermee is de zaak van het maximale aantal SETs geheel afgerond zonder hulp van computers. Een wiskundige kan ook nog wel eens een eindje zonder krukken lopen! $\Leftarrow$

Verwijzingen

De referee van dit artikel maakte mij attent op verschillende stukjes van de hand van Chris Zaal in Pythagoras, december 1999, en op het artikel "Het tellen van Sets" van Dion Gijswijt in Pythagoras, december 2000, p.18-21. Ook wees hij op de website <http://setgame.com/set> waar men de 'Set Puzzle Contest of the Day' kan spelen (vind 6 SETs in een gegeven stel van 12 kaarten). Dat stel wordt dagelijks ververs.