



Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Toon aan dat

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)}.$$

Opgave B

Definieer, voor $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t}{n^2}\right).$$

Toon aan dat de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/\sqrt{t}$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Opgave C

Bewijs voor alle $n, k \geq 1$ met $n \geq 2k$ de volgende identiteit:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{k-j}.$$

Ster-opgave

Zij $\mathbf{x}$ een toevalsvector in $\mathbf{R}^n$ met onafhankelijke coördinaten die met gelijke kans $\frac{1}{2}$ de waarden ± 1 aannemen. Zij $\mathbf{y}$ een vast gekozen eenheidsvector in $\mathbf{R}^n$. Hoe groot is de kans dat het inwendige product $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ kleiner is dan 1?

Editie Oplossingen 2002/1

Op de ronde 2002/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 3 inzendingen.

Opgave 2002/1-A

Zij $f(t)$ een monisch polynoom in de variabele t van oneven graad n en met gehele coëfficiënten; we nemen bovendien aan dat $f(0) = -1$. Zij p een priemgetal. Bewijs dat $f(t^2)$ *reducibel* is modulo p , dat wil zeggen er bestaan niet-constante monische polynomen $g(t)$ en $h(t)$ zodanig dat

$$f(t^2) = g(t)h(t) \quad \text{modulo } p.$$

Oplossing Voor $q = p^n$ met p priem en $n \geq 1$ zij $\mathbf{F}_q$ het lichaam van orde q . We beschouwen $f(t)$ als element van de ring $\mathbf{F}_p[t]$ over $\mathbf{F}_p$. Stel, algemener, dat $n \geq 1$ en $f(0) = (-1)^n$ in $\mathbf{F}_p$. Als $f(t) = a(t)b(t)$, dan geldt ook $f(t^2) = a(t^2)b(t^2)$. Als $p = 2$ dan geldt $f(t^2) = f(t)^2$. Neem dus vanaf nu aan dat $f(t)$ irreducibel is over $\mathbf{F}_p[t]$ en dat p oneven is. Zij μ het ringhomomorfisme van $\mathbf{F}_p[t]$ gegeven door $\mu(x) = x^p$. Dan geldt voor zekere $a \in \mathbf{F}_{p^n}$ dat

$$f(t) = (t - a)(t - \mu(a)) \dots (t - \mu^{n-1}(a)).$$

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijszen toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendingstermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendingstermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven

Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Optiver
DERIVATIVES TRADING

UWC

oplossingen

Omdat $f(0) = (-1)^n$ geldt dus dat

$$a \cdot \mu(a) \cdot \dots \cdot \mu^{n-1}(a) = a^{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}} = 1.$$

Daar $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$ een cyclische groep is met orde $p^n - 1 = (p-1)(1+p+\dots+p^{n-1})$, is dus a een $(p-1)^e$ macht in $\mathbb{F}_{p^n}$, en dus zeker een kwadraat in $\mathbb{F}_{p^n}$ (want p is oneven). Zeg $a = b^2$. Dan geldt $(t - \mu^k(a)) = (t - \mu^k(b))(t + \mu^k(b))$ en dus $f(t) = -g(t)g(-t)$, met

$$g(t) = (t-b)(t-b^p)\dots(t-b^{p^{n-1}}).$$

Maar op grond van symmetrie zijn de coëfficiënten van $g(t)$ invariant onder μ en daarmee element van $\mathbb{F}_p$. Dus $f(t) = -g(t)g(-t)$ is de gevraagde ontbinding over $\mathbb{F}_p$.

Opgave 2002/1-B

Bewijs dat op de kubus van Rubik niet drie hoeken kunnen worden verwisseld door met slechts twee zijvlakken te draaien.

Oplossing Twee inzendingen maakten gebruik van computeralgebra pakketten. Hier volgt een geheel algebraïsche oplossing.

De vraag is equivalent met: "De ondergroep G van S_6 voortgebracht door de twee viercyclen (1234) en (3456) bevat geen driecykel".

Zij T de verzameling van alle 15 partities van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in drie blokken van de lengte twee. Zij V de deelverzameling van T bestaande uit de volgende vijf partities:

$$A = (12)(35)(46),$$

$$B = (23)(45)(16),$$

$$C = (34)(15)(26),$$

$$D = (41)(25)(36),$$

$$E = (13)(24)(56).$$

De groep S_6 werkt op natuurlijke wijze op T (door middel van conjugatie, als we de elementen van T als producten van drie disjuncte tweecykels zien). Daar de beide voortbrengers van G de verzameling V als geheel vast laten (met (1234) correspondeert de viercykel $(ABCD)$ en met (3456) de viercykel $(BEDC)$), werkt de ondergroep G dus op V . Merk nu op dat elk van de 15 paren uit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in precies één van de vijf partities uit V voorkomt en stel dat $g = (ijk)$ een driecykel is in G . Zij $\{l, m, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{i, j, k\}$. Dan verwisselt g in V de drie partities die (ij) , (jk) en (ki) bevatten en laat de drie partities die (lm) , (mn) en (nl) bevatten vast. Maar er zijn slechts vijf partities in V , een tegenspraak.

Opgave 2002/1-C

Bewijs dat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \log m}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = 1. \quad (1)$$

Hierin stelt $\log \log m$ de geïtereerde natuurlijke logaritme voor.

Oplossing Beide inzenders die deze vraag hebben opgelost splitsten de integraal in twee of meer stukken en bepaalden vervolgens van ieder afzonderlijk de limiet. Hieronder volgt een iets kortere oplossing.

Schrijf $\rho_m = \log(m(\log m)^2)$. Dan geldt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \times \frac{\log \log m}{\log(m^2)} = 1. \quad (2)$$

UWC

oplossingen

We beginnen met te bewijzen dat

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \leq 1. \quad (3)$$

Daartoe bekijken we eerst:

$$\begin{aligned} & \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_{\log(m^2)}^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{(\log(m^2))^2}{(\log(m^2))^2 - 1} \int_{\log(m^2)}^\infty \frac{1}{x^2} \log x dx \\ & = \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{(\log(m^2))^2}{(\log(m^2))^2 - 1} \left[\frac{\log(\log(m^2))}{\log(m^2)} + \frac{1}{\log(m^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Als m naar oneindig gaat, dan convergeert de uitdrukking in (4) naar 1. De integraal

$$\int_0^{\log(m^2)} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx$$

kan als volgt naar boven geschat worden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\log(m^2)} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \left(1 - \frac{\log(m^2)}{\exp(\frac{1}{2} \log(m^2)) - \exp(-\frac{1}{2} \log(m^2))}\right)^{m/2} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \left(1 - \frac{2 \log m}{m}\right)^{m/2} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \leq \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt de bewering in (3), want

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{1}{m} = 0.$$

We bewijzen nu ook nog dat

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1. \quad (6)$$

Daartoe schatten we de uitdrukking in het rechterlid van (6) naar beneden:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_{\rho_m}^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \int_{\rho_m}^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \int_{\rho_m}^\infty \frac{\log x}{x^2} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \frac{\log \rho_m}{\rho_m} \\ & = \left(1 - \frac{2a_m}{m}\right)^{\frac{m}{2a_m} a_m}, \end{aligned} \quad (7)$$

UWC

oplossingen

waarbij

$$a_m := \frac{\log(m(\log m)^2)}{(\log m)^2 - \frac{1}{m^2(\log m)^2}}$$

naar 0 convergeert, als m naar oneindig gaat. De uitdrukking in (7) convergeert naar $(e^{-1})^0 = 1$. Dit bewijst dat

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1.$$

Wegens (2) volgt dan

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1. \quad (8)$$

Uit (3) en (8) volgt dan de bewering in (1).

Uitslag Editie 2002/1

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	9	9	8	103
2. Filip De Smet (Gent)	-	8	9	77
3. Filip Cools/Joeri van der Veken (Leuven)	-	3	-	12

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

Naam	Punten
1. Jan Tuitman	261
2. Filip de Smet	250
3. Roelof Oosterhuis	211
4. Filip Cools/Joeri van der Veken	165
5. Hendrik Hubrechts/Steven Delvaux	156