

Fred Goffree

Bremlaan 16

3735 KJ Bosch en Duin

f.goffree@fi.uu.nl

Een halve eeuw onderzoek

Wiskundendidactiek in Nederland

De didactiek van de wiskunde kent in Nederland een rijke en lange traditie. Fred Goffree beschrijft in twee delen de ontwikkeling van de wiskundendidactiek na de oorlog aan de hand van de in deze periode verschenen dissertaties. Hij is vanaf 1985 bijzonder hoogleraar aan de universiteit van Amsterdam met de leeropdracht op het terrein van het educatief ontwerpen. Dit is het eerste deel van zijn overzicht. Het tweede zal in het volgende nummer verschijnen.

Met didactiek van de wiskunde wordt in het algemeen het gedachtegoed bedoeld dat ingezet kan worden om (onderdelen van) de wiskunde aan leerlingen (op school) over te brengen. Dat gedachtegoed is tot stand gekomen in het onderwijs zelf, meestal in de schoolklassen en via reflectie op hetgeen daar ervaren wordt. Didactiek zit dus vol praktijkkennis. Volgens sommigen is praktijkkennis een narratieve manier van weten.¹⁰ Naar vorm dus een verzameling verhalen, al dan niet met een theoretische lading. Lerarenopleiders zijn geneigd om hier te spreken van praktijktheorie (met subjectieve kanten), in bepaalde gevallen zelfs van 'subjectieve theorieën', die al dan niet stroken met wat wetenschappers aan het publieke domein van de onderwijskundige kennisbasis hebben toegevoegd. Deze wetenschappers zijn in het gebied van de didactiek van de wiskunde niet eenduidig te lokaliseren. Ze vertegenwoordigen verschillende disciplines en vaak is de enige overeenkomst dat ze het wiskundeonderwijs onderzoeken. De doelstellingen, het object van onderzoek,

de gevolgde methodologie, de opvatting over wat 'waar' is en de persoonlijke betrokkenheid op het wiskundeonderwijs kunnen wezenlijk verschillen. Toch dragen deze wetenschappers gezamenlijk bij aan de wiskundendidactiek, die ze op basis van hun inspanningen graag tot wetenschappelijke discipline zouden verheffen.

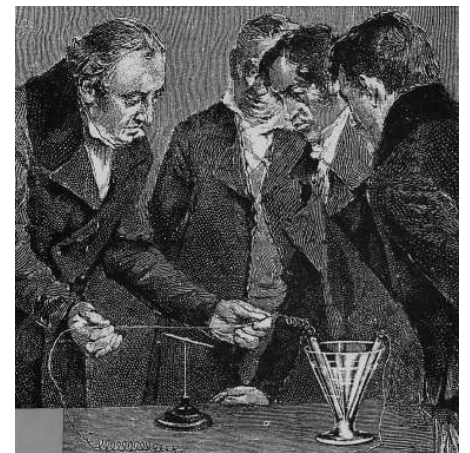
Wiskundendidactiek

In 1994 verscheen de bundel *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. De redactie van deze uitgave merkt op dat de wetenschappelijke belangstelling voor het wiskundeonderwijs niet dateert van de laatste jaren. Sinds de start van de International Commission for Mathematics Instruction (ICMI), aan het begin van de twintigste eeuw, is die belangstelling zichtbaar geworden in ontwikkeling en onderzoek van het wiskundeonderwijs. Het onderzoekswerk werd, aldus de redactie, uitgevoerd door wiskundigen, psychologen, onderwijskundigen, opleiders van wiskundeleraren en wiskundeleraren zelf. Pas in de jaren zestig ontstond er in bredere kring belangstelling voor deze zaken.

De signalen zijn nog duidelijk te traceren. In 1969 werd de eerste conferentie van de International Commission for Mathematics Education (ICME) in Lyon gehouden. (De volgende, in 1972, was in Exeter en sindsdien komt een groeiend aantal wetenschappers om de vier jaar in ICME-verband samen; recentelijk nog in 2000, in Japan.) De doorbraak vindt plaats in de jaren zeventig en tachtig, er ontstaat een soort saamhorigheidsgevoel onder

de onderzoekers en ontwikkelaars van het wiskundeonderwijs, te zien in het uitbrengen van tijdschriften als *Educational Studies in Mathematics* (opgericht door H. Freudenthal in 1969), de inhoud van Ph.D-programma's en onderzoeksprogramma's en niet te vergeten de oprichting van International Group for the Psychology in Mathematics Education (IGPME, meestal afgekort tot PME) in 1976, een onderzoeksgroep die in 2001 haar 25-jarig bestaan vierde in Utrecht, de stad waar Freudenthal de eerste bijeenkomst opende. (Zie: Address to the first conference of I.G.P.M.E.; *Educational Studies in Mathematics* 9 (1978) 1-5.²⁵)

Het genoemde boek *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* bestaat uit acht hoofdstukken die in zekere zin ook de onderzoeksdomeinen van de wiskundendidac-



Figuur 1 Een gravure op het omslag van het themanummer van *Kennis en Methode* (1989,1): het experiment.



Fred van der Blij, 1979

tiek representeren.

- Onderwijsontwikkeling op het gebied van wiskunde
- Lerarenopleiding en onderzoek van het onderwijs
- Interactie in de wiskundeles
- Technologie en wiskundeonderwijs
- Psychologie van het wiskundig denken
- De didactiek van het differentiëren (in verband met verschillen tussen leerlingen)
- Geschiedenis en epistemologie van de wiskunde en het wiskundeonderwijs
- Het culturele referentiekader bij het leren en onderwijzen van wiskunde

Genoemde tijdschriften, het bovengenoemde boek en de ICME- en PME-proceedings zijn in de Engelse taal geschreven. Dat is in zekere zin opmerkelijk, want het woord 'didactiek' (bekend in Frans, Duits en Nederlands) werd nog niet zo lang geleden door Engelssprekende wetenschappers weinig serieus genomen. Daarin is pas sinds kort verandering gekomen.

Onderzoek

Voor dit artikel is die taalkwestie evenwel niet relevant, want we beperken ons tot het Nederlandse onderzoek van het wiskundeonderwijs, om precies te zijn tot het didactisch onderzoek in het Nederlandse voortgezet onderwijs. Daartoe kijken we eerst in de schoolklassen van hoofdzakelijk eerstegraads wiskundeleraren die over hun belevenissen en ervaringen publiceerden in het daartoe geëigende tijdschrift *Euclides*, in oktober 1924 gestart als

Bijvoegsel bij het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en al in 1927 uitgegroeid tot zelfstandig tijdschrift. Later publiceren leraren ook in de *Wiskrant*, gestart in 1973 en na 1981 *Nieuwe Wiskrant* geheten, maar dan hoofdzakelijk in het kader van de vigerende vernieuwingen. Vervolgens gaan we ons bezighouden met de didactische onderzoekingen waarvan de neerslagen verschenen zijn als proefschriften. Systematische aanpak, zorgvuldigheid en methodologie krijgen op dat niveau van promotieonderzoek speciale aandacht, die in didactische verkenningen in de klas natuurlijk ontbreekt.

Het woord onderzoek roept in Nederland het beeld op van een elitair gebeuren, verricht in universitaire vakgroepen, en waarvan de uitkomsten bewijskracht bezitten. "Onderzoek heeft aangetoond dat ..." Naar mijn ervaring gebruikt men in de Engelse taal voor dat soort onderzoek het woord 'research', maar soms ook 'investigation'. Verder heeft men in de Angelsaksische landen de beschikking over 'inquiry', dat in eerste instantie aan 'gerechtelijk onderzoek' doet denken, maar dat je ook kunt tegenkomen in *Dictionary of Qualitative Inquiry*.¹⁹ Ik denk dat 'research' in de context van wetenschapsbeoefening dient te worden gezien. Dus beperk ik de gedachte aan 'research' hier voor het onderzoek dat is verricht in het kader van promotiestudies. Het onderzoek van de leraren in hun eigen klas verbind ik, gevoelsmatig en gesteund door het onderzoek van Lampert & Ball (1998),¹⁶ met 'investigations', en spreek in dat geval hier van didactische verkenningen.

Bij het bestuderen van al die dissertaties bemerkte ik ook dat louter 'literatuuronderzoek' niet in mijn begrip van onderzoek (research) past. Ik houd het dus apart, zet het in de buurt van 'inquiry' en blijf het literatuuronderzoek noemen. Didactisch onderzoek (van het wiskundeonderwijs), didactische verkenningen (in de eigen wiskundeles) en wiskundig-didactisch literatuuronderzoek, daarmee moeten we het hier dus doen.

Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren

Hoewel er in de loop van de tijd diverse neerslagen van didactisch onderzoek zijn gepubliceerd, over de aard ervan is naar mijn weten niet veel gezegd. Iemand die daar een begin mee maakte, was Joh. H. Wansink, wiskundeleraar te Arnhem en didacticus aan andere de TH Delft en de COCMA te Utrecht, waar hij cursisten voor de akten wiskunde middelbaar onderwijs A en B oriënteerde op het examen voor de akte pedagogische en didactische voorbereiding. Zijn aantekeningen

voor die lessen didactiek gebruikte Wansink bij het schrijven van zijn (driedelige) *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren*.²⁶ Deel 1 uit 1966 is te beschouwen als de neerslag van zijn gereflecteerde praktijkervaringen als wiskundeleraar, die door middel van psychologisch literatuuronderzoek in een nieuw licht geplaatst worden. Psychologen uit die tijd, zoals Ph. Kohnstamm (bekend van zijn onderzoek in de hoogste klassen van de basisschool op het gebied van redactiesommen en parate kennis), C. van Parreren (bij leraren vooral bekend van *Leren op school*) en A.D. de Groot (die internationale bekendheid verwierf met zijn dissertatie *Het denken van de schaker*) experimenteerden zelf in laboratoria, soms in schoolklassen, en beriepen zich op onderzoeksresultaten van anderen. Wansink kwam daar blijkbaar van onder de indruk en zag mogelijkheden om zelfs de laboratoriumproeven van Katona (leren leggen van luciferpatronen) en de proeven met chimpansees van Köhler (over leren en het ontstaan van inzicht) aan het wiskundeonderwijs ten goede te laten komen. De wiskundeleraar wilde hij aanmoedigen kennis te nemen van onder meer de opbrengsten van denkpsychologie (Selz), de Würzburgse School, de associatietheorie van Herbart, de psychologie van het leren op school (Van Parreren) en de Gestaltpsychologie, van het werk van Karl Duncker (productief denken) en Piaget. In zekere zin was hij daarmee zijn tijd vooruit, want tien jaar later, in 1976, wordt zoals eerder gezegd, de (IG)PME opgericht. Overigens gaat Wansink er in zijn derde deel (1970) in hoofdstuk 3 nog een keer uitvoerig op in.²⁶

Methode van onderzoek

Pas aan het eind van deel 1 gaat Wansink expliciet in op de eisen, die men aan onderzoek in de praktijk moet stellen. Niet om de wiskundeleraren aan te moedigen zelf op didactische verkenning te gaan in de klas, maar om ze erop te wijzen dat het geven van proefwerken, en het beoordelen ervan, met de grootste zorgvuldigheid dient te geschieden: met de zorgvuldigheid van een psychologisch onderzoeker. A.D. de Groot heeft in die dagen juist bekendheid verworven met zijn Vijven en Zessen (1966), waarin het geven van cijfers op school onder de loep wordt gehouden. A.D. de Groot komt in volgende delen ook aan het woord, onder meer in de verslaggeving van zijn Meetkundeproject II (1958–1962), een echt didactisch onderzoek waarin twee aanpakken van het aanvankelijk meetkundeonderwijs — de klassieke manier volgens de opbouw van Euclides en de transformatiemeet-

kunde, geïnspireerd op Félix Klein (Erlanger Programm) — met elkaar in de praktijk worden vergeleken. Naast de onderzoekers van het Research-instituut voor toegepaste psychologie van de Universiteit van Amsterdam (RITP) waren er natuurlijk leraren bij het project betrokken om het onderwijzen voor hun rekening te nemen. Onder hen was Rudolf Troelstra, die met zijn collega's op basis van de bevindingen en de gebruikte stencils in 1962 een leerboek in drie deeltjes publiceerde.²² De Groot, in die dagen al hoogleraar aan de UvA, was zelf ex-wiskundeleraar.

Om A.D. de Groot kunnen de onderzoekers van het wiskundeonderwijs na 1961 voorlopig niet meer heen. Zijn *Methodologie* zal gedurende vele jaren verplichte stof voor sociale wetenschappers in opleiding en hét handboek voor universitaire onderzoekers blijven.

Wansink heeft ook kennis genomen van de methodologische eisen die men aan onderzoek in de menswetenschappen stelde. Dat blijkt onder andere uit zijn positieve reactie op de voornemens van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) om nieuw te ontwerpen leerplannen voor wiskunde vergezeld te doen gaan van didactisch onderzoek. Hij verzucht: "En dan maar hopen op experimenten die de toets der kritiek van de zijde van de onderwijsresearch zullen kunnen doorstaan."

Deel 3 van Wansinks Didactische Oriëntatie bestaat uit bijdragen van diverse auteurs: wiskundigen als F. van der Blij, A.S. van der Sluis, J. Hemelrijk en B. van Rootselaar en de niet onbekende didactici E.J. Dijksterhuis, A.M. Koldijk, W.J. Brandenburg en J. van Dormolen. De voorlaatstgenoemde schrijft in het eerste hoofdstuk over de modernisering van het wiskundeonderwijs, gebaseerd op zijn dissertatie van een jaar eerder. Daarop komen we straks terug, nu beperken we ons tot een citaat uit paragraaf 1.7.2 van Wansinks boek over didactisch onderzoek. Hierin geeft Brandenburg een definitie van didactisch onderzoek naar de geest (je kunt ook zeggen 'geestigheid') van die tijd, verpakt in de moderne wiskundige terminologie van de nieuwe

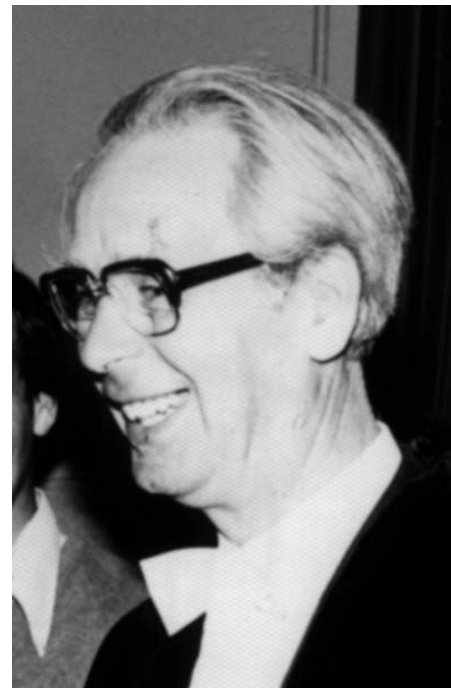


Figuur 2 Brouwer aan de wiskunde in de tuin. uit L.E.J. Brouwer. *Een biografie*, pagina 139.

schoolboeken. Het betreft didactisch onderzoek naar de invloed van een bepaalde didactische werkvorm op de leerprestaties in een gegeven situatie: "de werkvorm behoort tot de bronverzameling, de leerprestaties tot de functiewaardenverzameling. De geanalyseerde beginsituatie leidt tot de existentievoorwaarde van de functie. Leerstofordening en het leertheoretisch aspect van het didactisch proces zijn de parameters van de functie. Ze betekenen de variërende karakteristieken van de situatie. De genoemde parameters zijn onderling afhankelijk." Opmerkelijk is dat Brandenburg, onder verwijzing naar de methodologie van de onderwijsresearch (natuurlijk via A.D. de Groot), meent dat in didactisch onderzoek de rollen van deelnemende leraar en onderzoeker 'scherp gescheiden' dienen te worden. Die opvatting zal in de jaren die volgen snel veranderen als vanaf 1971 op het IOWO het ontwikkelwerk gepaard gaat met ontwikkelingsonderzoek. Daar komen we later op terug.

Ten slotte nog een opmerking over de aard van wiskundig-didactisch onderzoek. We bedoelen nu niet het onderscheid tussen kwalitatief en kwantitatief onderzoek in de sociale wetenschappen. Daarover is inmiddels zeer veel gepubliceerd, de tijd dat men sprak van twee kampen is voorbij en in de promotiestudies, die in in het vervolg ter sprake komen, zullen we daar nog even over spreken. Nee, bedoeld worden hier de essentiële verschillen tussen 'onderzoek door wiskundigen', 'onderzoek door natuurkundigen' en 'onderzoek door wiskundendidactici'. Wie zich een beeld tracht te vormen van de onderzoekers in elk van deze drie categorieën, tracht zich voor te stellen waar een ieder mee bezig is, hoe er gewerkt wordt, wat de onderzoeksruimte is, hoe men tot het onderzoeksprobleem gekomen is, waardoor men zich bij het onderzoeken laat leiden, waarop men zich bij het onderzoeken baseert en dergelijke. De natuurkundige heeft een vermoeden, scheidt een situatie en doet een experiment. Men kan zich een voorstelling maken van deze onderzoeker met behulp van figuur 1, waar men de Deense fysicus Ørsted aan het werk ziet.

Degene die iets van het onderwerp (magnetische velden en elektriciteit) weet, en zo mogelijk ook van de geschiedenis, kan bij bovenstaande vragen een antwoord bedenken. En deze experimentele aanpak van de natuurkundige vertoont overeenkomsten met hetgeen de didacticus in de schoolpraktijk doet. Of beter, gezien de geschiedenis, hoe de sociale wetenschapper graag de schoolpraktijk zou willen onderzoeken. In plaats



J. Sixma, 1979

van stroomdraad en magneetnaald zie je dan (school)kinderen, geobserveerd en mogelijk bevroegd door een volwassene. Maar hoe zit het nu met die wiskundige?

Een visuele voorstelling van een 'wiskundige op onderzoek' is wel voorhanden. Het is te vinden in de biografie van L.E.J. Brouwer³ (figuur 2). Er is evenwel niet veel te zien, in elk geval niet genoeg om ook maar een begin van een antwoord op een van de bovengestelde vragen te krijgen. Wat er kan omgaan in het hoofd van de wiskundige onderzoeker, en wat niet rechtstreeks in de opbrengst te vinden is, wordt onder meer vanuit eigen ervaring beschreven door H. Poincaré (1908). De geweldige emoties waarmee dergelijk onderzoekswerk gepaard kan gaan, en die studenten in de wiskunde op kleinere schaal ook ervaren kunnen hebben, is prachtig beschreven door János Bolyai.¹³

János (geboren op 15 december 1802) was van jongs af aan ingewijd in de wiskunde door zijn vader, Farkas Bolyai, een goede bekende van Gauss. De jonge János krijgt de gedachte mee dat de Euclidische meetkunde de werkelijkheid beschrijft, zoals die is. Vader is ook geïnteresseerd in de grondslagen van de wiskunde. De gedachte aan de al ruim 2000 jaar oude behoefte om het vijfde (parallellen)axioma van Euclides uit de andere axioma's te bewijzen, deed ook bij János, vóór zijn 18de jaar al, een vonk overslaan. Sinds zijn vijftiende is hij uit huis en voelt zich zeer ongelukkig als student aan de militaire academie te Wenen. Desondanks, misschien

dankzij, gaat hij op onderzoek. "... Finally, one winter night of 1823 he established the relation connecting the so-called angle of parallelism with the distance of parallelism. This was the second decisive step in his investigations. Rejoicing over the discovery, a fairly common experience in research work, the complete contour of the structure of non-Euclidean geometry occurred to him. This sudden occurrence of the final form directed his pen when writing the famous letter to his father on 3rd November 1823: "... I have created another world, a new world from nothing." (Zie pagina 33 van genoemd boek.)

Waarom dit uitstapje naar de andere wereld van wiskundige onderzoekers? Omdat in het wiskundig didactisch onderzoek ook wiskundigen betrokken zijn. Meestal als wiskundeleraars, die tijdens de doctoraalstudie min of meer in die wereld vertoefd hebben. Maar ook als promotor, ten tijde van de begeleiding van het didactisch onderzoek, ook zelf nog in die 'andere' wereld actief. Te noemen zijn prof. dr. J.G. van de Corput (Hendrik Mooij, 1948), prof. dr. H. Freudenthal (Pierre van Hiele, 1957), prof. dr. J.C.H. Gerretsen (Willem Brandenburg, 1968), prof. dr. F. van der Blij (Joop van Dormolen, 1982; Jan de Lange, 1987; Jan van Maanen, 1987; Sieb Kemme, 1990; Rijkje Dekker, 1991) en prof. dr. J. van de Craats (Bert Zwaneveld, 1999). De vraag, die nu gesteld kan worden, ligt voor de hand: is de opvatting over onderzoek in de sociaal wetenschappelijke traditie beïnvloed door de aanwezigheid van wiskundige onderzoekers? En zo ja, hoe? Het enige wat daar nu al over te zeggen valt, is, na kennisname van de dissertaties en in reflectie op eigen ervaringen in die wereld, dat wiskundigen neigen tot kwalitatief onderzoek, en dat zij zich door statistische methoden

voor het verkrijgen en analyseren van onderzoeksdata, niet graag laten beperken. Kort gezegd: men gaat graag met open mind, open vragen en een open design creatief op onderzoek naar fundamentele zaken.

Didactische verkenningen van leraren

Het nadenken over wiskundeonderwijs, de didactiek dus, nam in het begin van de negentiende eeuw een aanvang toen het onderwijs als een serieus element van de samenleving kon worden opgevat.¹⁷ Zo verscheen in 1874 het eerste wiskunde-didactiekboek van Jan Versluys. Een witte raaf, aan de wortel van een veelbelovende aanplant. Er begint enige groei in te komen als Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, sinds 1912 uit St. Petersburg naar Leiden gekomen, een groepje wiskundeleraars (en een enkele andere belangstellenden), bij haar thuis ontvangt om over wiskundeonderwijs te praten. Evert J. Dijksterhuis is zo'n wiskundeleraar. Hij heeft omstreeks 1924 met mevrouw Ehrenfest een penstrijd gevoerd over haar brochure *Wat kan en moet het wiskundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Die discussie is destijds aanleiding geweest tot het oprichten van *Euclides*, het maandblad voor de didactiek van de wiskunde.

Uit de kring rond mevrouw Ehrenfest ontstaat in 1936 de Wiskunde Werkgroep, onderdeel van de New Educational Fellowship, een internationaal platform voor de discussie over nieuwe onderwijsvormen. Binnen de Wiskunde Werkgroep komt het didactisch denken op gang en worden ongemerkt bouwstenen aangedragen voor komend didactisch onderzoek. Leden van het eerste uur, Evert W. Beth en Philip Kohnstamm, gaan zelf op onderzoek. Beth in het kader van (1938) ingestelde Meet-



Hendrik Mooij

Promotor

J.G. van der Corput
Ph. Kohnstamm

Proefschrift (1948) 'Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen.'

Problematiek Verbeteren de leerresultaten van eersteklassers bij meetkunde als de leermethode in een klassengesprek wordt besproken?

Context Het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo omstreeks 1946

kunde Studiegroepen, Kohnstamm op het gebied van lees-rekenopgaven en parate kennis. Beth probeert na te gaan of de uitkomsten van denkpsychologisch onderzoek aangewend kunnen worden voor het verbeteren van het meetkundeonderwijs aan twaalfjarigen. Kohnstamm wil nagaan of de gealgoritmiseerde redactiesommen van het toelatingsexamen voor het middelbare onderwijs een meer heuristisch karakter kunnen krijgen. Beth (wiskundige) onderzoekt middels didactisch denkwerk, Kohnstamm (pedagoog) ontwerpt materiaal (lees-rekenopgaven, 1937) en gaat de klas in.

Dan komt er oorlog. De periode 1940-1945 legt veel activiteiten stil, zo ook die van de Wiskunde Werkgroep. Toch laten nog twee wiskundeleraars van zich horen, P.G.J. Vredenduin en L.H.N. Bunt. Piet Vredenduin was zo'n wiskundige, op jonge leeftijd (22 jaar) in no time (18 dagen) gepromoveerd op een puur wiskundig onderwerp.⁴ Zijn didactisch onderzoek bestaat uit puur denkwerk over meetkunde en meetkundeonderwijs. In 1942 vertelt hij erover aan collega leraren, bijeen op de jaarvergadering van hun vereniging WIMCOS. De kernvraag luidt: zijn de opvattingen over aanschouwelijkheid bij meetkunde, en het feit dat bewijzen nimmer mogen berusten op wat figuren laten zien, niet strijdig? En vervolgens: is een oplossing te vinden in de introductie van verplaatsingen? Tien jaar later, in 1952, is Vredenduin nog steeds zoekende, maar dan benoemt hij de problematiek met 'strengheid en inzicht'.

Bunt wijdt zich ook aan didactisch onderzoek aan het bureau. Hij probeert zich in te leven in het denken van een (virtuele) leerling, met de bedoeling zich een voorstelling te



Farkas Bolyai, Hongaars wiskundige (1775-1856)



János Bolyai, zoon van Farkas, wiskundige (1802-1860)

**Dieke Geldof**

Promotor
M.J. Langeveld

Proefschrift (1957) 'De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.'

Problematiek Kun je een didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs bedenken waarbij leerlingen van aanschouwelijk tot abstract denken geraken?

Context Het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo en de didactische discussie in de Wiskunde Werkgroep

**Pierre van Hiele**

Promotor
H. Freudenthal
M.J. Langeveld

Proefschrift (1957) 'De problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.'

Problematiek Een bijdrage aan de theorievorming over inzicht in wiskunde en denkniveaus.

Context Het aanvankelijk meetkundeonderwijs zoals gerealiseerd in Dieke van Hieles onderwijsexperiment en beschreven in haar protocollen.

Willem Brandenburg

Promotor
J.C.H. Gerretsen
L. van Gelder

Proefschrift (1968) 'De modernisering van het wiskundeonderwijs.'

Problematiek Een studie ter beschrijving van de problematiek, ontstaan door de modernisering van de schoolwiskunde, vernieuwing van onderwijsmethoden en wijzigingen in het onderwijsstelsel door de Wet op het Voortgezet Onderwijs

Context De New Math-beweging sinds 1957, de CMLW sinds 1961 en de experimentele heroriëntatiecursussen in Groningen.

kunnen maken van hoe intuïtie en wiskundige vaardigheden bij het maken van opgaven samengaan. Zijn onderzoeksdomein is (natuurlijk!) ook de meetkunde, en wel het gebied van de 'regressieve bewijzen'. Dat zijn bewijzen waarbij je achteraan begint, bij het 'te bewijzen' (Euclides, 1946).

Opmerkelijk is het feit dat jarenlang de meetkundige leerstof hetzelfde is gebleven, naar onderwerpen, naar opbouw en zelfs naar opgaven. In principe was dit onderwijs dus op het lijf van wiskundigen (die leraar waren geworden) geschreven. Bij didactische verkenningen in de meetkundeles kon men dus uitgaan van een constante, de leerstof. En de didactiek was in de geest van de wiskunde: zorgvuldig omgaan met begrippen en procedures (definities!), formeel werken en streng redeneren. In de jaren na de oorlog leidden de didactische verkenningen van wiskundeleraren in toenemende mate tot twijfel aan de haalbaarheid van deze werkwijze en zelfs tot pogingen om er iets anders voor in de plaats te stellen. Zo analyseert Bronkhorst (Euclides, 1951) de inbreng van leerlingen op meetkundeproefwerken en komt tot de conclusie dat het beter is geen creativiteit van de leerlingen, bij het oplossen van vraagstukken, te eisen. Geursen (Euclides, 1953) volgt in gedachten een leerling die zich in zekere tijd door het meetkundeprogramma heen moet werken. Hij identificeert knelpunten waarvan hij nu een verklaring kan geven zonder in eerste instantie de leerling de schuld te geven. De uitkomst van deze verkenning bestaat uit het voorstel voor een nieuw meetkundeprogramma. G. Krooshof experimenteert omstreeks 1950 in zijn klas met een nieuwe, zelfbedachte introductie van de alge-

bra via telproblemen in figurale getallen, en gaat ook na hoe informatie uit de geschiedenis op dit terrein bij de leerlingen valt. En als hij in 1954 op werkweek is, experimenteert hij met het maken van kartonnen modellen voor stereometrie en beschrijvende meetkunde en probeert hij na te gaan of dit bijdraagt aan het verwerven van inzicht.

W.J. Bos (1954) (bekend van de methode 'Bos en Lepoeter') analyseert het leren van meetkunde en ziet kans om verbanden te zien met de Gestalt Psychologie, waar aandacht is voor 'flexibele structuren' met mogelijkheden voor 'omstructureren'. Dit is precies wat het werken met figuren (structuren) in de meetkunde, en het veranderen van de invalshoek (omstructureren) behelst. Mischien hebben de beschouwingen van Karl Duncker (Zur Psychologie des Produktiven Denkens, 1935), bijvoorbeeld over 'fixedness of thought-material' en Max Wertheimer (Productive Thinking, 1943), bijvoorbeeld over het omstructureren van parallelogrammen, hem op het spoor gebracht. Beide auteurs zijn experimentele psychologen, en ze voorzien hun experimenten veelvuldig van didactische consequenties.

W. Burgers laat in 1956 zien hoe hij een manier heeft uitgevonden om zijn leerlingen de goniometrische formules te laten memoriseren. Het referentiekader bestaat uit globale kennis van de formules, de finishing touch moet nog aangebracht worden. Daartoe maken ze gebruik van hun kennis van de functies $\sin x$ en $\cos x$. De praktijk in de eigen klas heeft laten zien dat de didactische vondst 'werkt', ieder ander kan dat uitproberen met zijn eigen leerlingen. Hetgeen dan ook tot een didactische verkenning leidt. J. de Miran-

da experimenteert in zijn klassen met grafieken. Hij is van oorsprong natuur- en scheikundeleraar en ziet in grafieken beschrijvingen van een stukje werkelijkheid. Om dat bij de leerlingen over te brengen, bekijken ze een grafiek eerst globaal, de vraag is dan: welk verhaal vertelt de grafiek ons? De Miranda is hier bezig met een didactiek die ongeveer een kwart eeuw later centrale aandacht krijgt van didactische onderzoekers als Claude Janvier (1978)¹⁴ en leerplanontwikkelaars van de sectie wiskunde van de Stichting leerplanontwikkeling (SLO).

In 1959 vindt een conferentie van de Organisatie voor Europese Economische Samenwerking (OECD) plaats in Royaumont: *New thinking of school mathematics*. In 1961 wordt in Nederland de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) ingesteld en vanaf dan krijgen de didactische verkenningen in de wiskundelessen van het voortgezet onderwijs een ander karakter. Het kleine werk van individuele wiskundeleraren in hun klassen, zoals hiervoor genoemd, komt niet vaak meer in *Euclides* terecht. Alle aandacht lijkt te gaan naar de nieuwe leerstof, die met veel aplomb naar voren wordt gebracht in heroriënteringcursussen voor eerstegraads leraren en in de nieuwe leerplanvoorstellen. Die laatste worden, in opdracht van het Ministerie vergezeld van experimenten. Wat in de vorige periode decennia lang constant was gebleven, de leerstof, wordt in de periode van de CMLW volkomen op zijn kop gezet. De kernvraag luidt steeds: is deze nieuwe leerstof haalbaar, kunnen de leerlingen dit aan, zijn leraren in staat om die stof uit te leggen? Men sprak in CMLW-kring eerst van 'proeven', later van experimenten. Voorlopers zijn onder

**Adri Treffers**

Promotor
J. Sixma
H. Freudenthal

Proefschrift (1978) 'Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens Wiskobas', vertaald in 1987: 'Three Dimensions'

Problematiek Hoe moeten, in een innovatieve context, de doelen van (wiskunde-)onderwijs beschreven worden? En welke zijn die doelen in het geval van het wiskobasproject?

Context Het wiskobasproject sinds 1971 en wat eraan voorafging sinds 1969.

**Joop van Dormolen**

Promotor
R.S. Mossel
F. van der Blij

Proefschrift (1982) 'Aandachtspunten. De a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs'

Problematiek Hoe kun je van te voren leerteksten in het wiskundeboek analyseren in het perspectief van een te geven les?

Context Wiskundeonderwijs in het vhm.

**Fred Korthagen**

Promotor
W.J. Brandenburg
D.W. Bresters
J.J. Elshout

Proefschrift (1983) 'Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding. Een model voor de opleiding van leraren, in het bijzonder wiskundeleraren.'

Problematiek Hoe kijken studenten van de SOL (Stichting Leraren Opleiding) tegen hun opleiding aan?

Context De opleiding van tweedegraads leraren op N.L.O.'s (Nieuwe Lerarenopleidingen)

meer A.D. de Groot met het tweede meetkunde-project, J. van Lint en J. van Dormolen met het algebra-analyseproject en W. Burgers met twee didactische experimenten: 'Groepen van eindige orde' en 'Lineaire transformaties'.

In *Euclides* van 1968 maakt L. van den Brom bezwaar tegen de term 'experiment', en wel op methodologische gronden. Van objectiviteit zou geen sprake zijn, en van een evenwicht tussen participatie en distantie, evenmin. Leraren zijn geen betrouwbare onderzoekers in hun eigen klas, ze zijn betrokken bij hun leerlingen en hebben andere doelstellingen dan onderzoekers. Toch zal men voorlopig op deze weg voortgaan. Tot in 1971 het Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO, hoogleraar-directeur is Hans Freudenthal) wordt ingesteld en men in teamverband didactisch onderzoek in de vorm van ontwikkelingsonderzoek gaat doen. In de schoolklassen, samen met de leraren en leerlingen. Daar komen we later nog op terug. Nu bekijken we eerst twee didactische onderzoeken op het niveau van promotiestudies, de allereerste van 7 juli 1948 en de tot op de dag van vandaag de allerlaatste (4 juni 1999).¹

Om mee te beginnen

Op 7 juli 1948 promoveert Hendrik Mooij aan de Universiteit van Amsterdam bij prof. dr. J.G. van der Corput op het proefschrift *Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van een hoek in gelijke delen*. Een proefschrift, net zoals de spreekwoordelijke medaille, met twee kanten. Enerzijds de kant van wiskundig onderzoek, anderzijds die van didactisch onderzoek. Enerzijds om te laten zien dat de

promovendus wiskundig zijn mannetje stond, anderzijds om aan te tonen dat didactisch onderzoek mogelijk, wenselijk en misschien zelfs noodzakelijk is.

Hendrik Mooij is in die tijd wiskundeleraar. Hij vertelt onder meer in zijn eerste hoofdstuk, De psychologische gesteldheid van de leerlingen ten opzichte van het aanvangsonderwijs in de wiskunde, dat hij in 1944 de gelegenheid kreeg om een didactisch experiment(je) te doen in drie parallelklassen van het eerste leerjaar van zijn school voor voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs (vhmo). Het betrof meetkundeonderwijs. In twee klassen volgde hij de traditionele methode waarin stellingen door de leraar voor het bord werden afgeleid en bewezen. In één klas liet hij de leerlingen constructies maken en eigenschappen ontdekken; voorlopig geen bewijzen. Hij houdt er een goed gevoel aan over, de leerlingen van die experimentele klas behielden de belangstelling en motivatie. Maar met enige spijt moet Mooij ook bekennen dat hij er geen statistiek van heeft bijgehouden en dat rapportcijfers alleen onvoldoende aanwijzingen gaven. Hij neemt zich dan voor zijn nieuwe aanpak systematisch uit te bouwen. Wellicht is hier, tijdens zijn didactische verkenning, de gedachte aan een didactisch onderzoek op het niveau van een promotie geboren. Mooij is omstreeks 1944 ook al psychologisch geïnteresseerd. Het is bovendien zeer waarschijnlijk dat hij bekend was met het werk van de Wiskunde Werkgroep, waarvan ook de Amsterdamse hoogleraar-pedagoog Ph. Kohnstamm deel uitmaakte.²³ De stand van zaken in de psychologie levert hem evenwel nog niet veel bruikbare tips voor de praktijk van het wiskundeonderwijs op, maar hij

ziet wat dat betreft de toekomst, waarin psychologie en wiskundeonderwijs samenwerken, optimistisch tegemoet.

Wiskundeleraren in de tijd voor en kort na de tweede wereldoorlog werden, als ze er oog voor hadden, voortdurend heen en weer geslingerd tussen de deductieve inrichting van de schoolboeken en de 'psychologische gesteldheid' van de leerlingen.²³ Zo ook Mooij, die daarover onder meer opmerkt dat de opbouw van de meetkunde volgens de Elementen van Euclides in de geschiedenis voorafgegaan was door zo'n 2000 jaar van experimentele meetkundige activiteiten. Hij schrijft een hoofdstuk De geschiedenis van de wiskunde en de didactiek. En hoewel hij toen al weet moet hebben gehad van het werk van mevrouw Ehrenfest, blijft in het didactisch onderzoek dat hij onder leiding van de wiskundige J.G. van der Corput en met hulp van pedagoog Ph. Kohnstamm opzet, de meetkundeleerstof onaangetaast. Wat Hendrik Mooij wil onderzoeken is of een andere didactische aanpak bij de bestaande meetkundeboeken van de eerste klas, betere leerresultaten oplevert.

In feite is dat precies wat Bert Zwaneveld, ruim vijftig jaar later, ook heeft beoogd met zijn promotiestudie *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*, onder leiding van de wiskundige J. van de Craats en met hulp van de wiskunde-didacticus A. van Streun. In zijn geval betreft de andere didactische aanpak niet het gebruik van klassengesprekken om de wijze waarop je meetkunde uit het boek kunt leren bewust te maken (zoals bij Mooij), maar het maken van kennisgrafen van gegeven leerstof, om die gestructureerde leerstof beter te verwerken en toe te passen. Zwaneveld is ook wiskundeleraar, vele jaren in

Hein Kramer*Promotor*

E. Warries

W.J. Brandenburg

Proefschrift (1984) 'Leerboek en leraar. Een proces-product-onderzoek in 50 klassen op havo en vwo naar verbanden tussen leerboekkenmerken, onderwijsactiviteiten en leerresultaten voor wiskunde'

Problematiek Heeft het leerboek voor wiskunde invloed op de onderwijsactiviteiten van leraren en op de leerresultaten van leerlingen?

Context Het IEA-project (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) in 2de klassen havo en vwo.

Jaap Vedder*Promotor*

M. Geensen

Jac. Schouten

Proefschrift (1984) 'Oriëntatie op het beroep van leraar. Praktische vorming en reflecteren aan het begin van de lerarenopleiding'

Problematiek De evaluatie van een bepaalde opleidingsdidactische aanpak (1-1- begeleiding), ook ter beantwoording van essentiële vragen van de lerarenopleiding.

Context Het 1-1 project van het Pedagogisch-didactisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

**Jan de Lange***Promotor*

F. van der Blij

A. Treffers

Proefschrift (1987) 'Mathematics, insight and meaning. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences.'

Problematiek Ontwikkeling en onderzoek van een bepaalde didactische aanpak (Wiskunde A) en het ontwerp van daarbij passende toetsen.

Context Innovatie van het wiskundeonderwijs in bovenbouw vwo, HEWET, wiskunde A.

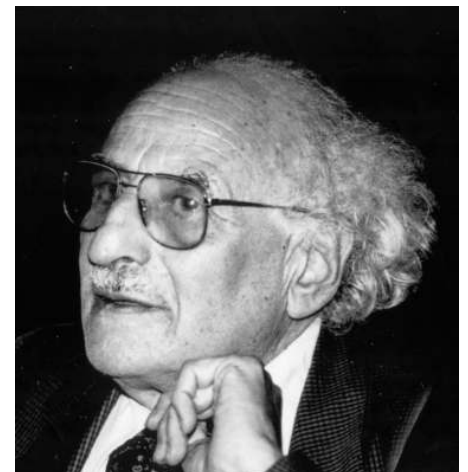
het voortgezet onderwijs, de laatste jaren aan de Open Universiteit. Ook zijn extra belangstelling voor de didactiek van de wiskunde springt in het oog. In zijn tijd is inmiddels de Wiskunde Werkgroep aan haar eind gekomen, maar daarvoor kwam in zekere zin de Didactiek Commissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) in de plaats. In dat verband werkt hij mee aan publicaties als *Vaardigheden: 1001 redenen waarom leerlingen geen routine hebben* (1975), *Handelen om te begrijpen: Een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen* (1977) en *Instappen en toepassen: Over het benutten van probleemsituaties als middel om wiskunde te leren en te leren gebruiken*. Net als Mooij vijftig jaar eerder, ziet hij in het vigerende wiskundeonderwijs een didactische onvolkomenheid: door het probleemgeoriënteerde wiskundeonderwijs, met een accent op toepassen, zijn de leerlingen in de bovenbouw meer bezig met het maken van opgaven dan met de theorie die er achter zit. Je zou kunnen zeggen dat het reflectieve moment in dat onderwijs ontbreekt. Een omissie die sterker opbreekt naarmate de leerlingen meer zelfstandig en minder interactief bezig zijn, zoals het geval is in het voortgezet onderwijs ten gevolge van het 'studiehuis' en in de Open Universiteit door het afstandsonderwijs. Ook Zwaneveld kan zich beroepen op eigen ervaringen in de klas, bijvoorbeeld op het Ignatiuscollege in Amsterdam, toen geëxperimenteerd werd (de didactische mogelijkheden verkennend) met zogenoemde 'kennen-en-kunnenlijstjes', die als voorbode van de kennisgrafen kunnen worden beschouwd. Om zijn didactisch onderzoek historisch te kunnen plaatsen hoeft

hij niet, zoals Mooij, 2000 jaar terug te gaan. Dertig jaar is blijkbaar omstreeks de millenniumwisseling voldoende. In die dertig jaar zijn fundamentele veranderingen in het wiskundeonderwijs aangebracht, het is de tijd van CMLW en IOWO, echte bolwerken van innovatie en onderwijsontwikkeling voor wiskunde. Ook moeilijk te bestrijden of zelfs maar te bekritisieren, want H. Freudenthal en zijn medewerkers dwongen respect af in binnen- en buitenland. Anne van Streun, Zwanevelds didactische 'helpdesk', heeft die kritische opstelling diverse malen wel aangedurfd. Bijvoorbeeld, zonder blad voor de mond te nemen, in zijn promotiestudie *Heuristisch wiskundeonderwijs* van 1989, die in samenhang met de ontwikkeling van de methode *Wiskunde lijn* tot stand kwam. De bredere onderwijskundige inbedding van het kennisgrafenonderzoek, en de mooie combinatie van een kwalitatieve en kwantitatieve onderzoeksmethodologie, zijn wellicht mede door de inbreng van Van Streun tot stand gekomen. Misschien is het interessant om hier vast op te merken dat Van Streun is gepromoveerd onder leiding van A.D. de Groot (met W. Schaafsma en M. van der Kamp als medepromotoren).

Waarom toch deze poging om overeenkomsten te vinden in twee didactische onderzoekingen, die een halve eeuw uit elkaar liggen? Het antwoord op die vraag is eenvoudig: bij de bestudering van beide dissertaties vielen de overeenkomsten op: wiskundeleraar, didactische verkenning in de eigen praktijk als voorafje, op zoek naar verbetering van vigerend wiskundeonderwijs, begeleid door wiskundige en hulp uit onderwijskundige hoek, bredere inbedding in de onderwijspsychologie, aandachtspunten zijn leer-

processen en leerresultaten, een essentieel element is de reflectie van leerlingen op het verwerven van kennis, de leerstof staat vast en er wordt niet aan getornd, er wordt een stand van zaken over het wiskundeonderwijs opgemaakt, de studie krijgt een plaats in de geschiedenis, over de methodologie wordt serieus en met wiskundige deskundigheid nagedacht. Bert Zwaneveld maakte lange tijd deel uit van de redactie van *Euclides*, Hendrik Mooij ook.

Mogen we deze overeenkomsten hier opmerkelijk noemen, natuurlijk zijn in het kader van dit artikel de verschillen van meer belang. In verschillen kunnen we misschien ontwikkelingen zien, die in de tussenliggende dissertaties wellicht tot stand zijn gekomen en op punten zijn ingevuld. Of, minder ambitieus, wordt slechts een voortschrijdend inzicht gesignaleerd. De kans op het laatste is vrij groot, omdat de dissertaties niet onder één bepaalde regie tot stand zijn geko-



Hans Freudenthal

**Jan van Maanen**

Promotor
F.van der Blij
H.J.M. Bos

Proefschrift (1987) 'Facets of 19th century mathematics in the Netherlands'

Problematiek Eigenlijk is dit geen didactisch onderzoek. Maar er komt een belangwekkend didactisch voorstel in naar voren: verrijk de didactiek van de wiskunde met elementen uit de geschiedenis van de wiskunde.

**Anne van Streun**

Promotor
A.D. de Groot
W. Schaafsma
M. van der Kamp

Proefschrift (1989) 'Heuristisch wiskundeonderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment'

Problematiek Is het waar dat expliciete aandacht voor probleem-, oplossingsmethoden en -aanpakken en het geven van hints, tot betere leerresultaten leiden?

Context Invoering van Wiskunde A in de bovenbouw vwo en het werken aan een nieuwe methode (Wiskundelij)

**Sieb Kemme**

Promotor
F. van der Blij
E.G.F. Thomas

Proefschrift (1990) 'Uitleggen van Wiskunde'

Problematiek Op zoek naar een theorie van het uitleggen in de wiskundeles.

Context Wiskundeonderwijs in het algemeen en het wiskunde-didactiekonderwijs op een eerstegraads lerarenopleiding.

men. De betreffende wiskundig-didactische onderzoekers behoorden voor een groot deel wel tot het netwerk van wiskundeleraren (lid van de NVvW of abonnee op *Euclides*), maar van een wiskundig-didactische onderzoeksgemeenschap was en is in Nederland geen sprake, laat staan dat er een onderzoeksagenda bestond. Men kan voor zichzelf, na lezing van dit artikel, uitmaken of dit als een voordeel of als een nadeel dient te worden beschouwd. We gaan op zoek naar punten waarin de promotiestudies van Mooij en Zwaneveld verschillen, en wel met de bedoeling om de tussenliggende dissertaties vooral op die punten nader te bestuderen.

Onderwijskundige ontwikkelingen

Mooij komt tot de conclusie dat er nog weinig te halen is bij de (onderwijs)psychologie. Zwaneveld heeft heel wat onderwijskundig werk aan den lijve mee kunnen maken. Hij noemt zelf Blooms taxonomie van doelstellingen en het daaruit volgende Mastery Learning, de leerpsychologie van Van Parren, het model BHV (basisstof, herhalingsstof en verrijgingsstof) ten behoeve van differentiatie, het model OSaEV (van Van Doremolen) ten behoeve van lesvoorbereiding in het geval van begripvorming: Oriënteren, Sorteren, Abstractie, Expliciteren, Verwerken. Gal'perins leerstappen voor het leren van algoritmen, Skemps psychologische analyses van wiskunde leren, de psychologie van leren en instructie van Boekaerts en Simon, het onderwijskundige werk van Freudenthal, de theorie van Van Hiele en het constructivisme vanaf Von Glaserfeld. En nog veel meer.

Onder dit kopje is het ook interessant om na te gaan welke van de eerder verschenen

dissertaties in de literatuur zijn genoemd. Mooij hoeft niet eens te zoeken, Zwaneveld vermeldt: Krammer (1984): *Leerboek en leraar*, De Lange (1987): *Mathematics, Insight and meaning*, Perrenet (1995): *Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs: samen of alleen*, Riemersma (1991): *Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs*, Van Streun (1989): *Heuristisch wiskundeonderwijs: Verslag van een onderwijsexperiment* en Treffers (1978): *Wiskobas doelgericht*.

Methodologische overwegingen

Mooij beschrijft zijn didactisch onderzoek in hoofdstuk VI: "Een experimenteel onderzoek in verband met de didactiek van de meetkunde." De term 'experimenteel' kan in 1948 nog simpel worden opgevat als 'het onderzoek gebeurt in de klas'. De onderzoeksvraag is helder: "Kan er verbetering aangebracht worden in het reproduceren en toepassen van geleerde meetkundewerk door de methode, hoe een opgegeven les geleerd wordt, met de klas te bespreken?" Er zijn 4 eerste klassen beschikbaar (A, B, C en D), over de samenstelling wordt niets gezegd. Er zijn drie onderdelen van de leerstof (driehoeksstellingen, congruentiegevallen en vierhoeksstellingen). Het gehele onderzoek speelt zich af in drie gedeelten, deel 1 in begin november 1947, deel 2 in eind november 1947 en deel 3 in januari 1948. Het design is weldoordacht, maar methodisch eenvoudig, zie tabel 1.

Er is een kleine oneffenheid, die Mooij zelf aangeeft: eigenlijk kun je de c (congruentiegevallen) pas goed leren, als je eerst d (driehoeksstellingen) hebt gehad. Een herkenbare bijzonderheid: het bespreken met de klas

komt er in grote trekken op neer dat de kinderen met potlood en papier ook moeten doen wat in het boek staat: goed doorlezen en figuur zelf tekenen met gegevens erin, en dan het gelezene begrijpen aan de hand van de figuur. Volgende stap: zonder boek het bewijs geven met de zelfgetekende figuur. Dan helemaal zelf, figuur tekenen en bewijs geven. Sommige leerlingen begrijpen de bedoeling daarvan niet, en schrijven gewoon wat in het boek staat letterlijk over. De verzamelde data bestaan uit het percentage goed opgeloste opgaven in de klassen A, B, C en D, over de gebieden d, c en v, in de drie perioden. Mooij concludeert dat het klassengesprek een gunstige invloed heeft op de leermethode en leerresultaten van het leren van de meetkundeles. Voor het geval van 'toepassen' van het geleerde kan geen overtuigend bewijs worden gevonden. Men kan dus zeggen dat de methodologie bij Mooij weinig aandacht krijgt, je kunt niet zien dat er van buiten af (Kohnstamm?) hoge eisen zijn gesteld en of er sprake is van een kwantitatief of kwalitatief onderzoek, is nauwelijks te zeggen.

klassen/periode	A	B	C	D
1	d	d	c	c
	*	-	*	-
2	c	c	d	d
	- !	*	- !	*
3	v!!	v!!	v!!	v!!

Tabel 1 Het onderzoek van Mooij. Verklaring van de symbolen:

* de leermethode wordt in/met de klas besproken
! is er verbetering opgetreden in A en C, en niet in B en D?
!! is er verbetering opgetreden in alle vier klassen?



Rijkje Dekker

Promotor

F. van der Blij

F. Goffree

P. Span

Proefschrift (1991) 'Wiskunde leren in kleine heterogene groepen'

Problematiek Leidt het samenwerken van leerlingen in kleine heterogene groepen aan wiskundige problemen tot niveauverhoging van alle leerlingen?

Context Het slo-project 'Interne Differentiatie' onder leiding van J. Terwel, de ideeën van H. Freudenthal over realisering Middenschool.



Fré Riemersma

Promotor

J.J. Elshout

Proefschrift (1991) 'Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs'

Problematiek Is het mogelijk programma's te maken voor wiskunde, om het oplossen van problemen te leren?

Context Probleemgeoriënteerd wiskundeonderwijs in de onderbouw van het v.o.



Marjolijn Witte

Promotor

G.de Zeeuw

F. Goffree

Proefschrift (1994) 'Meisjes meegerekend. De constructie van wiskundige begaafdheid.'

Problematiek Wat is de oorzaak van het feit dat meisjes bij wiskunde nog steeds afhaken? Wat kan een oplossing bieden? Biedt 'gebruikers-wiskunde' een oplossing?

Context Kies exact, Wiskunde voor allen, Realistisch wiskundeonderwijs, Vrouwen en wiskunde, de politica Ginjaar-Maas.

Zwaneveld, vijftig jaar later, besteedt meer aandacht aan de methodologie. Evenals Van Streun tien jaar, en Perrenet vier jaar eerder deden, wisselt hij kwalitatief en kwantitatief af. De uitwerking van zijn globale probleemstelling (in het kort: helpt het construeren van een kennisgraaf studenten hoger onderwijs en leerlingen voortgezet onderwijs bij het verwerven van wiskundige competentie?) in zeven onderzoeksvragen, maakt die afwisseling goed mogelijk. Het promotieonderzoek begint met een historisch-didactische literatuurstudie van de laatste dertig jaar wiskundeonderwijs. Deze wordt gevolgd door een literatuurstudie en vingeroefening betreffende het begrip wiskundige competentie. Via structurering van wiskundige competentie dient zich het idee van een kennisgraaf aan als didactisch hulpmiddel.

Vervolgens gaat de onderzoeker de praktijk van het onderwijs in om een exploratief onderzoek ('niet kwantitatief' wordt vermeld) met vier informaticastudenten van de Open Universiteit, in het leerstofdomein lineaire algebra, te verrichten. Het resultaat stemt tot optimisme en dus tot vervolgonderzoek.

Nu worden zeven experts op dit terrein aangesproken met de vraag een kennisgraaf bij de leerstof van lineaire algebra te maken. Hiertoe heeft de onderzoeker eerst zelf een 'voorbeeldgraaf' ontworpen. Het onderzoek bestaat uit een procesonderzoek (de experts doen hun werk in aanwezigheid van de onderzoeker, drie individueel en twee tweetallen; het computerprogramma KennisGraaf staat hen ter beschikking) en een productevaluatie: kunnen experts dit wel en stemmen de resulterende kennisgrafen overeen? Kwalitatief onderzoek dus met de conclusie dat

deze experts niet allemaal dezelfde (de unieke) kennisgraaf over dezelfde stof maken.

Interviews met de experts geven wel aan dat men het structureren van kennis met behulp van kennisgrafen positief waardeert. Maar ook dringt men aan op het stellen van criteria waaraan een kennisgraaf moet voldoen. Dit gebeurt in de volgende stap, en op basis van de verzamelde data uit de literatuur (waarin de *Gestaltpsychologie* een interessante plaats krijgt toebedeeld) en eigen ontwerpwerk komt een wiskundig kennisgraafmodel tot stand. Nu is het moment aangebroken om voor de tweede maal de praktijk van de Open Universiteit, cursus Lineaire Algebra te betreden.

Er worden vijf studenten bereid gevonden in een zitting van circa drie uur een kennisgraaf te produceren, met behulp van de voorbeeldgraaf en KennisGraaf. De onderzoeker geeft een introductie op de taak en registreert vervolgens met videocamera wat de student doet en denkt. Dat laatste wordt mogelijk, omdat de student gevraagd is hardop te denken. De vraag is weer of ze het kunnen en van welke kwaliteit de gemaakte kennisgrafen zijn. Vervolgens vullen ze een vragenlijst in in verband met hun oordeel over de structureringsactiviteit en inschatting van het effect voor het leren van de wiskunde. Het is een voorbeeld van kwalitatief onderzoek naar de haalbaarheid en het nut van deze werkwijze, in het bijzonder voor leerlingen van 5 en 6 vwo. Hoewel slechts drie studenten aan de norm voldoen, wordt besloten toch weer verder te gaan.

De onderzoeksgroep bestaat dan uit de 38 leerlingen van twee klassen 5 vwo wiskunde B. Er wordt geen gebruik gemaakt van de computer met KennisGraaf. Het domein is 'limie-

ten en continuïteit', een onderwerp dat in de onderzoeksperiode juist op het programma stond. Dezelfde onderzoeksvraag als hierboven, een aangepaste voorbeeldgraaf, 40 minuten om individueel de kennisgraaf te maken, de (aangepaste) vragenlijst aan het eind van dit lesuur. Geen individuele observaties, maar een proefwerk na twee weken met twee vragen over de theorie in het hoofdstuk, hetgeen niet gebruikelijk was.

De dataverzameling en -analyse heeft een kwantitatief tintje: de frequentie van in de kennisgrafen voorkomende begrippen, overeenstemming tussen de gemaakte grafen en de scores op de beoordelvingsvragen worden bepaald. Ook de gemaakte proefwerken krijgen een nette (beschrijvend) statistische behandeling en worden in verband gebracht met het voorgaande. Het proefwerk blijkt niet best te zijn gemaakt en de kennisgrafen zijn van geringe kwaliteit. Het is duidelijk dat deze vwo-leerlingen niet gewend zijn leerstof te structureren en evenmin zijn ze gewend theoretische (wiskundige) kennis te memoriseren. Ook blijkt dat klas 5V-1 over de hele linie beter scoort dan klas 5V-2.

In het laatste onderzoek van deze studie gaat men met dezelfde leerlingen, nu in de klassen 6V-1 en 6V-2, aan de slag. Het wordt een vergelijkend onderzoek, met een controle- (6V-2) en een experimentele klas (6V-1). In de experimentele groep wordt dit keer in kleine groepjes geoefend met het maken van kennisgrafen, in 6V-2 worden gewoon opgaven gemaakt, de gebruikelijke voorbereiding op het schoolonderzoek voor wiskunde B. Beide groepen worden statistisch, met *t*-toets, op wiskundige competentie vergeleken. Het resultaat van dit kwantitatieve

**Jacob Perrenet***Promotor*J. Terwel
A. van Streun

Proefschrift (1995) 'Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs. Samen of alleen. Onderzoek van wiskunde leren bij 12-16-jarigen. (Op basis van artikelen.)'

Problematiek Moet het leren oplossen van wiskundige problemen individueel gebeuren, of in samenwerkende groepen?

Context Project Adaptief Groepsonderwijs 12-16, Onderwijskunde, Rijksuniversiteit Utrecht; Project Transfertest voor wiskunde Psychonomie en Didactiek Wiskunde, Vrije Universiteit Amsterdam; Ontwikkelingspsychologisch onderzoek, Kinderstudies, Universiteit Utrecht.

Dirk Hoek*Promotor*J. Terwel
B.H.A.M. van Hout-Wolters
P.J.W.M. van den Eeden

Proefschrift (1998) 'Social and cognitive strategies in co-operative groups. Effects of strategy instruction in secondary mathematics.'

Problematiek Wat zijn de algemene en differentieële effecten van het onderwijzen van cognitieve en sociale strategieën op prestaties en attitudes van leerlingen in het v.o., die in groepen samenwerken aan wiskunde?

Context Het onderzoeksprogramma 'Learning and Instruction of Cognitive Strategies' an het Instituut voor de Lerarenopleiding (ILO) aan de Universiteit van Amsterdam.

**Bert Zwaneveld***Promotor*J. van de Craats
A. van Streun

Proefschrift (1999) 'Kennisgrafien in het wiskundeonderwijs'

Problematiek Is gestructureerde wiskundige kennis beter toepasbaar? Helpt het maken van een kennisgraaf om de leerstof te structureren, bij het verwerven van die kennis?

Context Zelfstandig werken om wiskundige competentie te verwerven in Studiehuis en op Open Universiteit.

onderzoek (op kleine schaal) is verrassend: de groep zonder structurering (6V-2) maakt de opgaven (centraal schriftelijk eindexamen, baankrommen) beter dan de experimentele groep klas 6V-1.

Tussen Mooij en Zwaneveld is methodologisch het een en ander gebeurd, hetgeen blijkt uit de rijke methodologische omgeving die het promotieonderzoek van de laatste siert. De zorgvuldigheid waarmee de onderzoeksvragen betreffende het gebruik van de kennisgraaf zijn behandeld, is evenwel ook zichtbaar bij de bescheiden onderzoeksvraag van Mooij. Het verschil zit in de beschikbare kennis van methodologische zaken.

De context van het onderzoek

Voor het onderzoek van Mooij wordt de context gevormd door het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo. Veel verder gaat het niet, in zekere zin verschilt het niet zoveel van een didactische verkenning in de klas van de leraar zelf. Doen we daarmee het werk van Mooij tekort? Misschien wel, want hij

maakt twee opmerkingen die de context van het meetkundeonderwijs in klas 1 ver overstijgen. De eerste op bladzijde 70: "Er wordt algemeen aangenomen dat er een verschil in wiskundige begaafdheid bij jongens en meisjes bestaat. Een onderzoek, of dit werkelijk zo is, zou zeer belangrijk zijn. 't Zou best kunnen zijn, dat het feit, dat minder meisjes dan jongens zich tot de wiskunde aangetrokken voelen, geen psychologische of intellectuele oorzaak heeft, maar een maatschappelijke. In de vrouwelijke beroepen wordt over het algemeen weinig wiskunde geëist."

In het verlengde van deze opmerking omstreeks 1948, is de studie van Marjolijn Witte (*Meisjes meegerekend*, 1994) te plaatsen. Zij tilt dit onderwerp op het niveau van een promotie-onderzoek. Ook aardig om te weten is in dit verband, dat in 1999 het resultaat van een onderzoek naar 'verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde in de basisschool' wordt gepubliceerd. Deze publicatie is bekend geworden als het Mooij-rapport.

De tweede opmerking staat op bladzijde 1: "In tegenstelling tot de mening, die in sommige kringen steeds weer tot uiting komt, zijn we ervan overtuigd, dat het wiskundeonderwijs in de toekomst voor een groter aantal leerlingen noodzakelijk zal zijn, dan tegenwoordig..." Deze opmerking heeft een verlengde, want vijftien jaar later zal de staatssecretaris van onderwijs bij de instelling van de CMLW erop aandringen dat in de toekomst meer leerlingen aan het wiskundeonderwijs kunnen deelnemen en nog eens vijftien jaar later kan men in kringen van ontwikkelaars van wiskundeonderwijs veel de slogan 'Wiskunde voor allen' horen klinken.

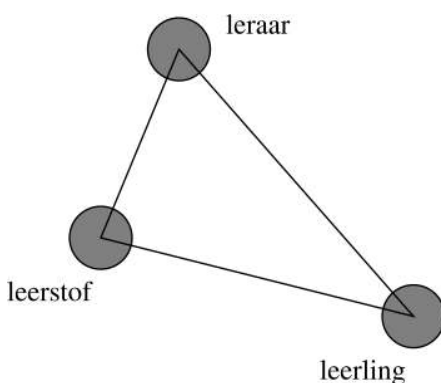
Het onderzoek van Zwaneveld kan begrepen worden in de context van 'studiehuis' en 'afstandsonderwijs', maatschappelijke ontwikkelingen die duizenden leerlingen, docenten en politici in de greep houden. Het is opmerkelijk te noemen dat dit onderzoek, dat beoogde een didactische bijdrage aan het zelfstandig leren werken te leveren, een omissie in het leren blootlegde: theoretische kennis van wiskunde is uit de mode.

Positie in de didactische driehoek

Onderwijs in het algemeen, en dus ook wiskundeonderwijs, laat zich beschrijven in termen van leraar, leerling en leerstof, en de relaties tussen die drie: leraar → leerling, het pedagogisch-didactisch handelen van de leraar; leerling → leerstof, leerprocessen van de leerling; leerstof → leraar, hoe de leraar door zijn leerboek of programma dagelijks wordt geleid om onderwijs te geven (maken).

Je kunt het rondje langs de hoekpunten en zijden van de didactische driehoek ook andersom maken: leraar → leerstof, ontwerpen en didactiseren; leerstof → leerling, toetswerk, knelpunten en eisen; leerling → leraar, cognitieve respons en gedrag van leerlingen in de wiskundeles. Om maar eens wat te noemen.

In elke onderwijsbeschrijving worden accenten geplaatst op een of meer van de elementen van de driehoek. Ook in de onderzoeken van Mooij en Zwaneveld zijn dergelijke accenten op te merken. In beide gevallen werd aan de leerstof, in principe, niet getornd, leerstof krijgt dus geen accent. Door Mooij wordt wel een accent geplaatst bij het didactisch handelen van de leraar (maak in een klassengesprek de leermethode bewust).



De didactische driehoek.

In het onderzoek van Zwaneveld wordt een instrument ontworpen om het leren van de leerlingen te verbeteren (de kennisgraaf). In

zijn hoofdonderzoek krijgen leerlingen, leren en leerstof een accent. In het voorbereidend werk, om tot een goed didactisch instrument

te komen, krijgen eigenlijk alle elementen van de didactische driehoek, elk op hun beurt, een accent.

Literatuur en noten

- 1 In de tussentijd is verschenen: Amerom, B.A. van, (2002). *Reinvention of early algebra*. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 2 Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. and B. Winkelmann (eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
 - 3 Daalen, D. van, (2001). *L.E.J. Brouwer. Een biografie*. Bert Bakker: Amsterdam.
 - 4 Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar*. Timmer, Wansink, Van Hiele, Vredenduin en Van Baalen in gesprek met Fred Goffree. SLO: Enschede.
 - 5 Goffree, F. (2001). A consumer's point of view. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed) *Proceedings of the 25th Conference of PME*. Vol 1 (80–86). Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 6 Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.), (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 7 Goffree, F. en H. Jansen (1989). *Wiskundeonderwijs Wereldwijd*. Terugblikken op de ICME-VI conferentie in Boedapest 1988. VALO wiskunde en informatica: Enschede.
 - 8 Goffree, F. (1996). *Onderzoek en ontwikkeling: van en vóór het reken-wiskundeonderwijs in Nederland*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 15(1) 3–18.
 - 9 Groot, A.D. de, (1961). *Methodologie*. Grondslagen van onderzoek en denken in de gedragswetenschappen (1961), Mouton & Co: 's Gravenhage. (1970, vijfde druk).
 - 10 Gudmundsdottir, S. (1995). *The narrative nature of pedagogical content knowledge*. In: H. McEwan & K. Egan, (Eds.), *Narrative in teaching, learning and research*. (24–38). Teachers College, Columbia University: New York.
 - 11 Hoeben, W. Th.J.G. (1981). *Praktijkgericht onderzoek en de groei van kennis*. SVO-reeks nr. 46: 's-Gravenhage.
 - 12 Hoeve, A.H. van der, Kohnstamm, Ph. en G. van Veen, (1937). *Over lees-rekenopgaven en hun didactische en diagnostische waarde*. Mededeling van het Nutseminarium nr. 31, Groningen.
 - 13 János Bolyai, (1987). *Appendix The theory of space*. With introduction, comments and addenda. Ed. Prof. Frenc Kárteszi, doctor of the mathematical sciences. Akadémiai Kiadó: Budapest.
 - 14 Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations-studies and teaching experiments*. Ph.D study Université du Québec a Montréal.
 - 15 Jong, R. de, en M. Wijers (red.) (1993). *Ontwikkelingsonderzoek*. Theorie en Praktijk. NVORWO Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 16 Lampert, M. & D. Loewenberg Ball, (1998). *Teaching, Multimedia, and Mathematics*. Investigations of Real Practice. Teachers College, Columbia University: New York.
 - 17 Moor, E. de, (2000). *Didactische pioniers*. De Wiskunde Werkgroep 1936–1974. In Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 18 Poincaré, H., (1908). *Science et méthode*.
 - 19 Schwandt, T. (2000). *Dictionary of Qualitative Inquiry*. SAGE Publications, Thousand Oaks: London, New Delhi.
 - 20 Smaling, A. (1990). *Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinisch interview*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 8(3) 4–10.
 - 21 Streefland, L. (1983). *Theorievorming door ontwikkelingsonderzoek*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 12(2), 20–24.
 - 22 Troelstra, Habermann, De Groot en Bulens, (1962). *Transformatiemeetkunde*, Wolters: Groningen.
 - 23 Goffree, Van Hoorn en Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden. Op blz. 201 is een foto opgenomen van de deelnemers aan een tweedaagse conferentie van de Wiskunde Werkgroep in Doorn. Op die foto staat, met tussen van vele didactische corifeëen uit die tijd, Hendrik Mooij.
 - 24 Van Hiele, P.M. (2001). *De illusie van het streng redeneren*. In Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 25 Freudenthal was ten tijde van deze opening inmiddels al 6 jaar hoogleraar-directeur van het Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO). Hij beschouwde zichzelf als medewerker, en hij werkte ook met grote inzet en open mind mee aan het ontwikkelwerk voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs. Het was vanuit die ervaring dat hij een opmerking over onderzoek kon maken: "When it (IOWO) was founded, we considered ourselves as engineers rather than researchers; but as early as at that time I foresaw and predicted a future where the clouds of our engineering work would produce fall-out that could rightly be called research. Indeed, I believe this is still the way for educational research: from educational practice to theory."
 - 26 Wansink, Joh. H. (1966). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*. Wolters-Noordhoff: Groningen.
- Wiskundendidactisch promotieonderzoek in het basisonderwijs onder begeleiding van A. Trefers**
- 27 Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
 - 28 Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 29 Heuvel-Panhuizen, M. van de (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. CD-bêta Press: Utrecht.
 - 30 Jong, R. de, (1986). *Wiskobas in methoden*. Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965–1985). Vakgroep OW&OC: Utrecht (met N.A.J. Lagerweij).
 - 31 Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*. The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design. Freudenthal Instituut: Utrecht. (met M. Boekaerts en M. Beishuizen).
 - 32 Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit*. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekeners in het getalengebied tot 100 — een onderwijsexperiment. Freud. Instituut: Utrecht.
 - 33 Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Een historisch didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 34 Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde*. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs. De Ruiter: Gorinchem. (met J.F. Vos, P. Span en W. van Doorn).
 - 35 Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
- Ander wiskundendidactisch onderzoek met betrekking tot de basisschool**
- 36 Baltussen, M. (1992) *7 trainingsvarianten voor rekenproblemen*. Een vergelijkend onderzoek uitgevoerd bij moeilijk lerende kinderen en kinderen met leerproblemen. KPC: 's Hertogenbosch.
 - 37 Eerde, H.A.A. van, (1996). *Kwantiwijzer*. Diagnostiek in Reken-Wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 38 Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Onderwijsontwikkelingsonderzoek Wiskunde & Didactiek op de Pedagogische Academie. IOWO: Utrecht.
 - 39 Harskamp, E.G. (1988). *Rekenmethoden op de proefgesteld*. RION: Groningen.
 - 40 Heijden, M. K. van der, (1993). *Consistentie van aanpakgedrag: Een procesdiagnostisch onderzoek naar 8 aspecten van hoofdrekenen*. Swets en Zeitlinger: Lisse.
 - 41 Klep, J.H.F.M. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van wiskundige bekwaamheid*. Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 42 Kool, Marjolein (1999). *Die conste vanden getale*. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen. Uitgeverij Verloren: Hilversum.
 - 43 Koster, K.B. (1975). *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool*. Empirische studies over onderwijs. Tjeenk Willink: Groningen.
 - 44 Luit, J.H.E. (1987). *Rekenproblemen in het speciaal onderwijs*. Katholieke Universiteit Nijmegen.
 - 45 Mulken, F. van, (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen*. Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd. Vakgroep Onderwijsstudies, Rijksuniversiteit Leiden.
 - 46 Vos, W.A. de, (1998). *Het methodegebruik op basisscholen*. Shaker Publishing: Maastricht.
 - 47 Willemsen, Theo (1994). *Remediële rekenprogramma's voor de basisschool*. Een effectstudie. Monografieën onderwijsonderzoek 19. RION: Groningen.
 - 48 Wolters, Mirjam (1978). *Van rekenen naar algebra*. Een ontwikkelingspsychologische analyse. Rijksuniversiteit Utrecht.