UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Zij p een oneven priemgetal en zij $a \geq 2$ en $m \geq 1$ geheel. Toon aan: als $a^m \equiv 1 \bmod p$ en $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$, dan is $a^m \equiv 1 \bmod p^2$.

Opgave B

Zij $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Voor alle paren natuurlijke getallen (i,j) met $1 \leq i < j \leq n$ kiezen we een getal $q_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Veronderstel dat er reële n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$x_i y_j - x_j y_i = q_{i,j} \qquad (1 \leq i < j \leq n). \tag{1}$$

Toon aan dat er dan eveneens twee rationale n-tallen bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen (1).

Opgave C

Voor gehele $m \geq 1$ en reële $x \in (-1,1)$ definiëren we

$$G_m(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}\right).$$

Ga na dat de $G_m(x)$ goed gedefinieerd is, toon aan dat de limiet $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \ln G_m(x)$ bestaat en bepaal zijn waarde.

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Met ingang van Editie 2002/1 zullen per nummer drie editieprijzen worden toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
J.vanNeerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Editie 2001/4

Op de ronde 2001/4 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we in totaal 13 inzendingen.

Opgave 2001/4-A

Zij $a > 0$ een positief reëel getal. Een *maximaal termproduct* van a is een product van reële getallen $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ zo dat

$$\begin{cases} a_i > 0 \text{ voor alle } i = 1, \ldots, n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \text{ is zo groot mogelijk.} \end{cases}$$

Welke $a > 0$ hebben meer dan één maximaal termproduct?

Oplossing We geven de oplossing van Filip de Smet. Aangezien alle a_i's strikt positief zijn en aangezien steeds geldt dat

$$\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2 \geq a_i a_j \qquad \forall\, i,j \in \{1, \ldots, n\},$$

zal voor een maximaal termproduct steeds moeten gelden:

$$a_i = a_j = \frac{a}{n} \qquad \forall\, i,j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Bijgevolg wordt het maximaal termproduct $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. Aangezien voor $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ voor alle $x \in \mathbf{R}_+$ geldt dat $f'(x) = f(x)(\ln(a) - \ln(x) - 1)$ zien we dat $f(x)$ in het interval $(0, \infty)$ eerst strikt stijgend is, een maximum bereikt en daarna strikt dalend is.

UWC oplossingen

Als een $a > 0$ meer dan één maximaal termproduct heeft, dan zal het er dus precies twee hebben, met opeenvolgende n-waarden, zodat moet gelden:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1},$$

waaruit volgt:

$$a = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \qquad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Uit het verloop van $f(x)$ volgt onmiddellijk dat we de redenering kunnen omkeren, zodat alle a-waarden, gegenereerd door deze uitdrukking twee maximale termproducten zullen hebben.

Opgave 2000/4-B
Zij $x_1 = 1$ en definieer inductief

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} \qquad (n \geq 1).$$

Ga na voor welke reële $p > 0$ de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^p}$ convergeert.

Oplossing We geven de oplossing van Mark Veraar. Met volledige inductie is eenvoudig na te gaan dat $\frac{1}{16}n^2 \leq x_n \leq n^2$, waaruit volgt dat

$$\frac{1}{n^{2p}} \leq \frac{1}{x_n^p} \leq \frac{16^p}{n^{2p}}.$$

Nu convergeert de reeks $\sum_n \frac{1}{n^{2p}}$ dan en slechts dan als $p > \frac{1}{2}$. Hieruit volgt dat de reeks $\sum_n \frac{1}{x_n^p}$ convergeert dan en slechts dan als $p > \frac{1}{2}$.
Algemener kunnen we $x_{n+1} = x_n + cx_n^\theta$ beschouwen, met $c > 0$ en $0 \leq \theta \leq 1$ en vinden dat de reeks $\sum_n \frac{1}{x_n^p}$ convergeert voor $p > 1 - \theta$.

Opgave 2001/4-C
Zij p een oneven priemgetal. Een polynoom f met geheeltallige coëfficiënten heeft graad kleiner dan $p-1$ en heeft de eigenschap dat

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\} = \{1, \ldots, p-1\}.$$

Toon aan dat $f(0)$ een geheel veelvoud is van p.

Oplossing We geven een generalisatie, waarbij we de eis dat de coëfficiënten geheel zijn laten vallen.
Zij g het interpolatepolynoom van Lagrange gegeven door $g(k) = f(k)$ voor $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Expliciet:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p-1} f(j) \frac{p_j(x)}{p_j(j)} \quad \text{met } p_j(x) = \prod_{k \in \{1,\ldots,p-1\} \setminus \{j\}} (x-k).$$

Dan is g, net als f, van graad $< p-1$ en $f - g$ is dus 0, want anders heeft $f - g$ meer wortels dan zijn graad. In het bijzonder zijn dus alle coëfficiënten van f rationaal en

$$f(0) = g(0) = \sum_{j=1}^{p-1} f(j) \frac{p_j(0)}{p_j(j)}.$$

Nu is p oneven. Dus $jp_j(0) = (-1)^{p-2}(p-1)! = -(p-1)!$ en $jp_j(j) = (-1)^j j!(p-1-j)!$, zodat

$$f(0) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} f(j) \binom{p-1}{j}.$$

UWC oplossingen

Dit is een geheeltallige uitdrukking, zodat $f(0) \in \mathbf{Z}$. Modulo p geldt verder dat $jp_j(j) \equiv j! \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (j+1) \equiv (p-1)!$, en dus

$$f(0) \equiv -\sum_{j=1}^{p-1} f(j) \equiv -\sum_{k=1}^{p-1} k \equiv -\tfrac{1}{2}p(p-1) \equiv 0,$$

want p is oneven. Conclusie: $p | f(0)$ in $\mathbf{Z}$.
Het feit dat de coëfficiënten niet geheeltallig hoeven te zijn werd expliciet opgemerkt door het team van Gerben Stavenga, die ook een voorbeeld gaven:

$$f(x) = 5 - \tfrac{47}{6}x + \tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}x^3$$

De grafiek van f gaat door de punten $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$ en $(4,3)$.
Een andere generalisatie, die is gebaseerd op de oplossing van Jan Maas, krijgt men door $\mathbf{Z}_p$ te vervangen door een willekeurig eindig lichaam F van orde $p > 2$. Zij z een voortbrenger van de multiplicatieve groep F^*. Dan geldt $z^k - 1 = 0 \Leftrightarrow k \equiv 0 \bmod (p-1)$ en dus

$$\sum_{j=0}^{p-2} (z^j)^k = \sum_{j=0}^{p-2} (z^k)^j = \begin{cases} p-1, & \text{als } k \equiv 0 \bmod (p-1), \\ (z^{k(p-1)}-1)(z^k-1)^{-1}, & \text{als } k \not\equiv 0 \bmod (p-1). \end{cases}$$

Stel nu dat $f : F \to F$ voldoet aan $\sum_{x \in F^*} f(x) = 0$ (dit is in het bijzonder het geval als f de elementen van F^* permuteert). Zij

$$g(x) = a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

het Lagrange polynoom met $f(k) = g(k)$ voor alle $k \in F$. Daar F een lichaam is, ligt g in $F[x]$ en herhaaldelijk toepassen van (2) leert dat

$$0 = \sum_{x \in F^*} f(x) = \sum_{x \in F^*} g(x) = (p-1)a_{p-1} + 0 + \ldots + 0 + (p-1)a_0.$$

Dus is $f(0) = g(0) = a_0 = -a_{p-1}$. Als nu de graad van f kleiner is dan $p-1$, dan is $a_{p-1} = 0$ en $f(0) = 0$ in F.

Uitslag Editie 2001/4
De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	8	9	10	110
2.	Mark Veraar (Delft)	9	10	8	107
3.	Filip De Smet (Gent)	8	10	8	104
4.	Sybren Botma (Utrecht)	8	8	9	101
	Jan Maas (Delft)	8	8	9	101

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie
We vermelden alleen de top 5 van deelnemers die in de laatste vier edities tenminste eenmaal hebben meegedaan. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Herbert Beltman	289
2.	Jan Tuitman	261
3.	Filip De Smet	211
	Roelof Oosterhuis	211
5.	Hendrik Hubrechts e.a.	156