

Bert Zwaneveld

afdeling Natuur- en Technische Wetenschappen

Open Universiteit Nederland

Postbus 2960, 6401 DL Heerlen

bert.zwaneveld@ou.nl

Het Wiskunde A1,2 examen

Dinsdag 28 mei werd het vwo-examen Wiskunde A1,2 afgenomen. Vorig jaar is op deze plaats aandacht besteed aan het eindexamen Wiskunde B1,2 bestemd voor de vwo-ers met het profiel natuur en techniek. Het A1,2 examen wordt afgenomen aan vwo-ers met het profiel economie en maatschappij. Bert Zwaneveld legt uit wat de verschillen zijn.

Met de invoering van de mammoetwet in 1968 is er veel veranderd in het voortgezet onderwijs: de oude hbs en het oude gymnasium gingen over in (het havo en) het vwo. Er kwamen op het vwo twee wiskundevakken, wiskunde I en II. Wiskunde I was verplicht voor alle leerlingen die wiskunde nodig hadden voor hun vervolgopleiding op de universiteit op de terreinen van de economische, sociale, technische en natuurwetenschappen. Wiskunde II was bedoeld als keuzevak voor met name de wiskundig betere leerlingen.

Wiskunde I, II, A en B

De inhoud van wiskunde I bestond uit onderwerpen uit de analyse, de kansrekening en statistiek, wiskunde II had meetkunde en lineaire algebra tot onderwerp. In de loop van de jaren tachtig zijn wiskunde I en II vervangen door wiskunde A en B. Voor die vervanging zijn de volgende oorzaken aan te wijzen. Onder invloed van Freudenthal koos men ervoor om wiskunde in een context aan te bieden. Ook wilde men de vwo-wiskunde beter laten aansluiten op de economische en sociaal-wetenschappelijke opleidingen, die structureel efficiëntiecurstussen wiskunde moesten verzorgen voor studenten die geen wiskunde I in hun pakket hadden, omdat met name het analysedeel een groot struikelblok vormde.

De hervorkaveling van wiskunde I en II tot wiskunde A en B betekende het volgende. Wiskunde A was verplicht voor aankomen-

de studenten economische en sociale wetenschappen, wiskunde B voor aankomende studenten natuur- en technische wetenschappen. Wiskunde A bestond uit het toepassen van de analyse, kansrekening en statistiek, grafen en matrices en lineair programmeren; wiskunde B uit analyse en ruimtemeetkunde. Wiskunde A was contextrijk, wiskunde B niet.

De recente veranderingen, bekend onder naam 'studiehuis', komen op het volgende neer. Er zijn vier profielen gedefinieerd; *cultuur en maatschappij*, *economie en maatschappij*, *natuur en gezondheid* en *natuur en techniek*. Bij elk profiel hoort een eigen wiskunde programma: respectievelijk A1, A1,2, B1 en B1,2. Inmiddels zijn alle vier de programma's contextrijk.

Het examenprogramma wiskunde A1,2

De domeinen en subdomeinen die door alle vwo-leerlingen (A en B) gedaan moeten worden zijn *Functies en grafieken*: machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies, vergelijkingen en ongelijkheden, *Discrete analyse*: veranderingen, differenties en differentiequotienten, rijen, *Meetkunde*: lineair programmeren met twee variabelen, *Kansrekening*: combinatoriek, kansen, rekenen met kansen, uniforme discrete verdelingen en de binomiale verdeling.

De specifieke A1,2-domeinen en subdomeinen zijn: *Differentiaalrekening en toepassing* afgeleide (inclusief de rekenregels) en optimaliseren *Discrete dynamische modellen*: rijen zowel impliciet als expliciet gegeven, rekenkundige en meetkundige rijen, hun somrijen, convergentie hierbij, stelsels van impliciet gegeven rijen, webgrafieken *Lineair programmeren* *Statistiek en kansrekening*: populatie en steekproef, ordenen, verwerken en samenvatten van gegevens, kansverdelingen met name de normale verdeling en toet-

sen van hypothesen.

Voor de volledigheid moet worden opgemerkt dat het domein grafen en matrices wel tot het programma hoort maar niet behandeld hoeft te worden en dus niet geëxamineerd wordt, omdat het totale vwo-programma te omvangrijk wordt gevonden. Op het eindexamen zijn de kandidaten verplicht een grafische rekenmachine gebruiken.

Discrete dynamische modellen

De belangrijkste verandering bij de overgang van wiskunde A naar wiskunde A1,2 is de invoering van het domein discrete dynamische modellen. De inhoud van dit domein is vastgesteld nadat het een aantal jaren in twee scholen is uitgetoetst. Bij dit domein is de grafische rekenmachine onontbeerlijk. Om de lezer een indruk te geven van dit onderdeel geven we de, hier in wiskundige termen geformuleerde, opgave over dit domein van het vorig jaar.

De voorraad van een wijnboer verandert in de loop van de jaren onder invloed van nieuwe oogst en verkoop. De voorraad $G(t)$ in het jaar t is bepaald door

$$G(t) = (1 - p/100)G(t-1) + 400 - 4p, \quad t \geq 3$$

met beginwaarden $G(0) = G(1) = G(2) = 0$. Hier is p het percentage van de voorraad dat jaarlijks verkocht wordt. De eerste twee vragen van de opgave gaan over het berekenen van $G(6)$ bij $p = 15$ en het afleiden van de evenwichtswaarde voor de voorraad. Vervolgens wordt gevraagd bij welke p de opslagcapaciteit van 280.000 flessen van 0,75 liter op den duur niet meer voldoende is en in welk jaar voor het eerst de tot 2400 hl vergrote opslagcapaciteit niet meer voldoende is bij $p = 10$.

Examen VWO

Vorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **02**

Tijdvak 1
Dinsdag 28 mei
13.30 – 16.30 uur

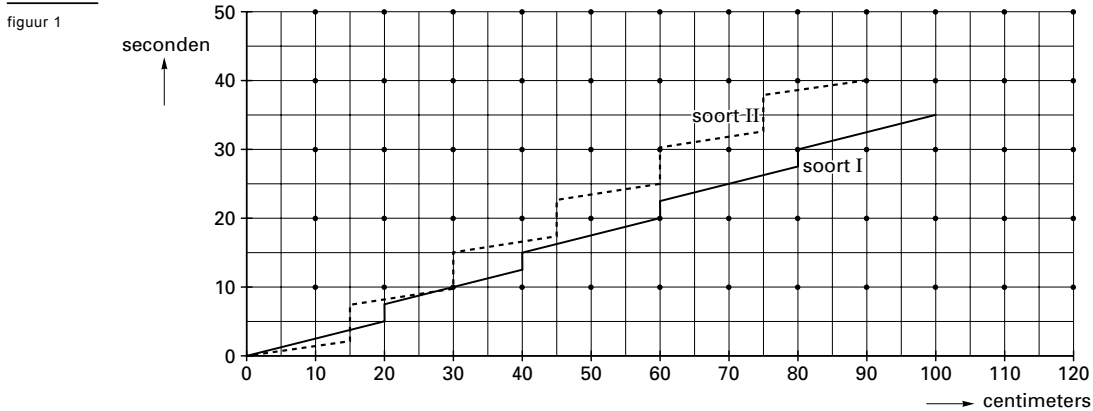
Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 2, 3, 5 en 18 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg, of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vogels die voedsel zoeken

Vogels die voedsel zoeken op de grond vertonen vaak een karakteristiek patroon van lopen en stilstaan. In figuur 1 is dit patroon voor twee vogelsoorten schematisch weergegeven.



Het patroon van soort I heeft de volgende drie kenmerken:

- het stilstaan duurt telkens $2\frac{1}{2}$ seconden;
- tussen twee stops legt de vogel telkens 20 cm af;
- tussen twee stops loopt de vogel met een snelheid van 4 cm per seconde.

4p 1 Lees uit figuur 1 af wat deze drie kenmerken zijn van het patroon van soort II.

Om van een andere vogel (soort III) dit patroon te bepalen, is zo'n vogel gedurende een reeks van 24 keer lopen-en-stilstaan geobserveerd.

De vogel stond in totaal 180 seconden stil.
De afgelegde afstand was in totaal 480 cm.
Het geheel duurde 420 seconden.

5p 2 Teken in het assenstelsel op de bijlage een grafiek zoals figuur 1 van het patroon van deze vogel voor ten minste 45 seconden. Geef een toelichting.

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte.

Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In tabel 1 staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

tabel 1 **400 waarnemingen bij pimpelmezen**

hoogte in meters	<1,5	1,5–3	3–5	5–7	7–10	10–15	>15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

8p 3 Toon aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn; maak gebruik van het normaal waarschijnlijkheidspapier op je bijlage. Lees uit je tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in dm nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

De hoogtes waarop boomklevers en glanskoppen werden waargenomen, waren ook bij benadering normaal verdeeld. Per soort staan het gemiddelde en de standaardafwijking van deze waargenomen hoogtes in tabel 2 in meters vermeld.

tabel 2	soort	gemiddelde hoogte	standaardafwijking
	boomklevers	10,0	4,0
	glanskoppen	4,5	1,5

Een onderzoeker let bij elk van beide vogelsoorten op de relatieve frequentie van de waarnemingen tussen 6,0 en 8,0 meter.

4p 4 Onderzoek met een berekening of deze twee relatieve frequenties even groot zijn.

Energiebronnen

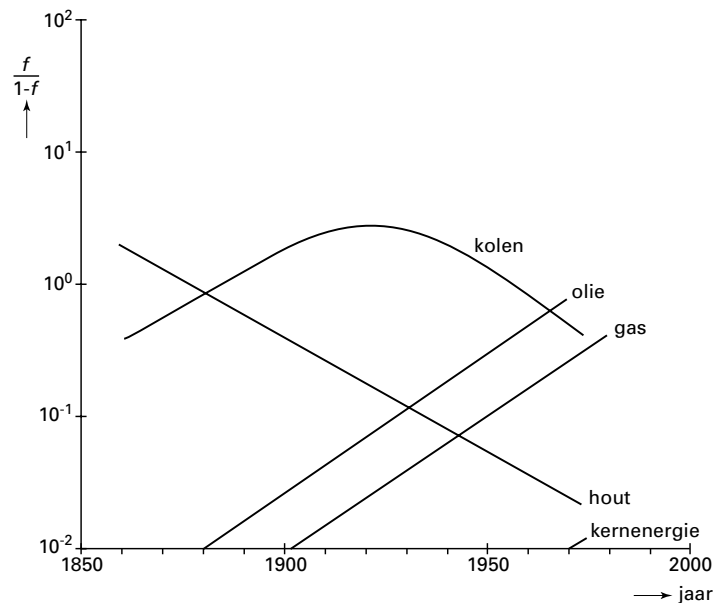
Hout was vroeger de belangrijkste energiebron. In het begin van de negentiende eeuw werd de rol van de belangrijkste energiebron overgenomen door kolen. De laatste jaren is het aandeel van olie en gas in het totale energieverbruik steeds groter geworden.

In het boek 'Energie, een economisch perspectief' besteden de schrijvers Th. v.d. Klundert en H. Peer aandacht aan de ontwikkeling van energiebronnen. Zij gebruiken daarbij de variabele f voor het aandeel van een energiebron zoals dat zich in de loop van de tijd ontwikkeld heeft ten opzichte van het totale energieverbruik. Dit aandeel f is een getal waarvoor geldt dat $0 \leq f \leq 1$. Hierbij betekent $f = 0$ dat deze energiebron helemaal niet gebruikt wordt en $f = 1$ dat uitsluitend van deze energiebron gebruik gemaakt wordt.

In het boek staat een afbeelding zoals in figuur 2. Door niet f maar $\frac{f}{1-f}$ uit te zetten en

bovendien op de verticale as een aangepaste schaalverdeling te gebruiken, worden de meeste grafieken rechte lijnen. Figuur 2 staat ook op de bijlage.

figuur 2



3p 5 □ In welk jaar leverde hout 50% van het totale energieverbruik? Licht je antwoord toe.

Met figuur 2 hebben de auteurs informatie willen geven over het belang van verschillende

energiebronnen door de jaren heen. Opvallend is dat daarbij niet f maar $\frac{f}{1-f}$ wordt

gebruikt. Dat kan omdat bij elke waarde van $\frac{f}{1-f}$ precies één waarde van f hoort. Immers,

als f toeneemt van 0 tot 1, dan stijgt $\frac{f}{1-f}$ voortdurend.

4p 6 □ Toon die laatste bewering aan met behulp van de afgeleide van $\frac{f}{1-f}$.

Aan de hand van figuur 2 kunnen we voor f_{hout} , het aandeel van hout in het totale energieverbruik, de volgende formule afleiden:

$$\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t$$

In deze formule is t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1850.

Het verband tussen f_{hout} en t kan ook in een directe vorm worden weergegeven: $f_{\text{hout}} = \dots$

- 5p **7** Stel met behulp van de gegeven formule voor $\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}}$ een formule in een directe vorm voor f_{hout} op.

Dergelijke formules in directe vorm zijn ook op te stellen voor f_{olie} en f_{gas} , het aandeel van olie respectievelijk van gas in de totale energievoorziening. Deze formules zien er als volgt uit:

$$f_{\text{olie}} = \frac{0,0023 \cdot 1,05^t}{1+0,0023 \cdot 1,05^t} \quad \text{en} \quad f_{\text{gas}} = \frac{0,0008 \cdot 1,05^t}{1+0,0008 \cdot 1,05^t}$$

Op zeker moment leverden, volgens deze formules, olie en gas samen 25% van het totale energieverbruik.

- 5p **8** Onderzoek in welk jaar dat het geval is.

De olievoorraden raken uitgeput en het kolenverbruik heeft veel milieuproblemen tot gevolg. Daarom verwacht men dat het gasverbruik in de komende tijd zal blijven toenemen. Al jaren stijgt het gasverbruik jaarlijks met 3,5% en men gaat ervan uit dat dit in de komende tijd niet zal veranderen.

Deze stijging betekent dat de huidige gasreserves toereikend zijn tot het jaar 2050. Om er voor te zorgen dat de wereld na 2050 nog voldoende gas kan blijven gebruiken, moeten nieuwe voorraden worden ontdekt. Om een indruk te geven van wat dat laatste betekent, is in het boek 'De grenzen voorbij' de volgende figuur opgenomen. In deze figuur 3 geeft elk vierkant en elke rechthoek de verbruikte of benodigde hoeveelheid gas voor een bepaalde periode aan.

figuur 3

vóór 1950	1950- 1970	1990-2010	2030-2050
1970-1990			
2010-2030			De hoeveelheid gas die nog ontdekt moet worden om ook in de periode 2050-2070 de wereld van gas te kunnen voorzien.

- 5p **9** Leg met behulp van een berekening uit hoe een jaarlijkse stijging van het gasverbruik met 3,5% in figuur 3 is te herkennen.

Jongen of meisje

In 1988 vond het Onderzoek Gezinsvorming plaats. Hierbij werd onder andere de gezinssamenstelling onderzocht (hoeveel kinderen, hoeveel meisjes, enzovoort). Men waagde zich vervolgens ook aan voorspellingen hoe gezinnen in de toekomst samengesteld zullen zijn. Daarbij beperkten de onderzoekers zich tot een voorspelling over de gezinnen van vrouwen die geboren zijn in 1960. De resultaten staan in tabel 3.

tabel 3

Verwachte uiteindelijke gezinssamenstelling van vrouwen geboren in 1960

	% van alle vrouwen	% van vrouwen met kinderen
<u>geen kinderen</u>	18,5	
<u>1 kind (totaal)</u>	15,2	18,7
1 jongen	7,9	9,7
1 meisje	7,3	9,0
<u>2 kinderen (totaal)</u>	40,1	49,2
2 jongens	10,1	12,4
1 jongen en 1 meisje	20,9	25,6
2 meisjes	9,1	11,2
<u>3 kinderen (totaal)</u>	18,2	22,3
3 jongens	2,5	3,0
2 jongens en 1 meisje	7,3	9,0
1 jongen en 2 meisjes	6,3	7,7
3 meisjes	2,1	2,6
<u>4 of meer kinderen (totaal)</u>	8,0	9,8
uitsluitend jongens	0,5	0,6
uitsluitend meisjes	0,5	0,6

Een gezin met zowel jongens als meisjes noemt men een gemengd gezin.

- 3p **10** Hoeveel procent van alle in 1960 geboren vrouwen zal volgens tabel 3 uiteindelijk een gemengd gezin hebben? Licht je antwoord toe.

In tabel 3 staat in de rechterkolom het getal 18,7.

- 3p **11** Laat zien hoe dit getal afgeleid kan worden uit de gegevens in de kolom met opschrift '% van alle vrouwen'.

Neem in het vervolg van de opgave aan dat onder geboorte wordt verstaan de geboorte van één kind, dus geen twee- of meerlingen.

Uit bevolkingsstatistieken van Nederland en andere West-Europese landen vanaf de 18e eeuw is duidelijk dat er steeds iets meer jongens dan meisjes geboren worden. Daaruit is gebleken dat de kans op een jongen bij elke geboorte ongeveer 0,51 is.

In het verleden hebben velen gezocht naar de factoren die het krijgen van een jongen dan wel een meisje zouden kunnen beïnvloeden. Een van de factoren die mogelijk van belang zijn, is de hormoonspiegel in het bloed van de ouders. Een aanwijzing hiervoor vormen de gegevens die men heeft verkregen over geboortes die tot stand kwamen na toediening van hormonen. Bij 900 van dergelijke geboortes kwam 412 keer een jongen ter wereld.

- 7p **12** Onderzoek of je op grond hiervan mag concluderen dat bij dergelijke geboortes de kans op een jongen kleiner is dan 0,51. Neem hierbij een significantieniveau van 1%.

Lentevoordeelweken

Een supermarkt houdt elk jaar in de lente een actie onder de naam 'Lentevoordeelweken'. Tijdens die actie ontvangt iedere klant bij ten minste 50 euro aan boodschappen twee krasloten. Op elk kraslot staat één vakje. Als men dat openkrast, wordt de afbeelding van een kievitsei, een lammetje, een narcis of een vogelverschrikker zichtbaar.

De klant moet direct aan de kassa, voordat hij de supermarkt heeft verlaten, de twee opengekraste krasloten inleveren. Wanneer op beide krasloten dezelfde afbeelding staat, wint de klant een tegoedbon.

De kans op een tegoedbon hangt af van de verdeling van de vier afbeeldingen over de krasloten.

Neem aan dat de vogelverschrikker op 10% van de krasloten voorkomt en de andere drie afbeeldingen elk op 30% van de krasloten. De krasloten liggen, in willekeurige volgorde, op een stapel bij de kassa.

Een klant heeft zojuist twee krasloten ontvangen.

- 3p **13** Bereken de kans dat de klant met deze twee krasloten een tegoedbon wint.

De eigenaar van de supermarkt wil niet te veel tegoedbonnen weggeven. Daarom onderzoekt hij of een andere verdeling van de afbeeldingen over de krasloten gunstiger is. Hij gaat er daarbij van uit dat de vogelverschrikker met een kans k op de krasloten voorkomt en de overige drie afbeeldingen elk met een kans $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k$. Daarmee kan hij uitrekenen hoe groot de kans is dat een klant met twee krasloten een tegoedbon wint. Die kans is gelijk aan:

$$P(\text{tegoedbon met twee krasloten}) = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$

- 5p **14** Toon aan dat de formule voor $P(\text{tegoedbon met twee krasloten})$ juist is.

Met behulp van deze formule kan de eigenaar nu onderzoeken voor welke waarde van k de kans op een tegoedbon zo klein mogelijk is.

- 4p **15** Voer dit onderzoek uit.

De eigenaar van de supermarkt overweegt de mogelijkheid om elke klant die ten minste 50 euro aan boodschappen besteedt, niet twee, maar drie krasloten te geven. De klant wint dan een tegoedbon wanneer ten minste twee keer de vogelverschrikker op deze drie krasloten voorkomt.

Veronderstel dat de vier afbeeldingen in gelijke mate verdeeld zijn over de krasloten.

- 5p **16** Bereken de kans dat een klant in deze situatie een tegoedbon wint.

Aardbeien

Seizoensgebonden fruit en groenten zijn maar een beperkt deel van het jaar verkrijgbaar in de winkel. Aardbeien zijn daar een voorbeeld van. De prijs van aardbeien is afhankelijk van vraag en aanbod. Als er weinig aanbod is, zullen liefhebbers van aardbeien meer willen betalen voor aardbeien: de prijs stijgt. Die hogere prijs zet aardbeientelers ertoe aan om een jaar later meer aardbeien op de markt te brengen: het aanbod is dan hoger. Dat leidt ertoe dat de prijs weer zakt. En zo zet dit proces zich voort.

Dit proces kan in een wiskundig model worden weergegeven:

$$Q_t^v = -2P_t + 40 \quad (\text{vraagvergelijking})$$

$$Q_t^a = c \cdot P_{t-1} + d \quad (\text{aanbodvergelijking})$$

$$Q_t^v = Q_t^a \quad (\text{evenwichtsvergelijking})$$

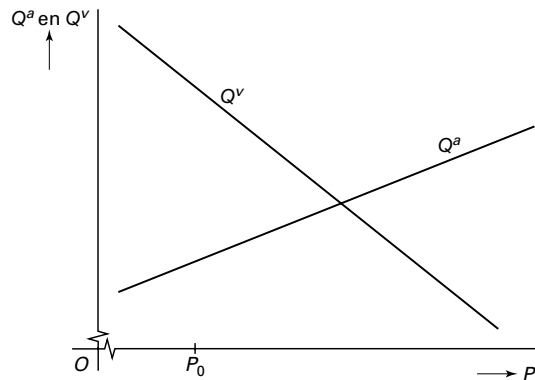
Hierin zijn Q_t^v en Q_t^a de gevraagde, respectievelijk de aangeboden hoeveelheden in het jaar t , uitgedrukt in miljoenen kg. P_t is de prijs per kg in het jaar t , uitgedrukt in euro.

Neem eerst $c = 1$ en $d = 10$. Verder is gegeven dat $P_0 = 4$.

4p 17 □ Bereken P_2 .

In onderstaande figuur 4 zijn de grafieken getekend, die bij het beschreven model horen (met $c = 1$ en $d = 10$). In deze figuur staat de prijs langs de horizontale as en de hoeveelheid langs de verticale as. Deze figuur staat, vergroot, ook op de bijlage.

figuur 4



4p 18 □ Teken in de figuur op de bijlage de webgrafiek in het model van P_0 tot en met P_3 . Geef daarbij P_1 , P_2 en P_3 op de P -as aan.

Het model zal uiteindelijk in de evenwichtsprijs stabiliseren. Bij die evenwichtsprijs hoort een evenwichtshoeveelheid.

4p 19 □ Bereken de evenwichtsprijs en de bijbehorende evenwichtshoeveelheid.

In de Europese Unie wil men maatregelen nemen om het aanbod beter te regelen. Doel van deze maatregelen is dat aardbeientelers op den duur een betere prijs krijgen voor hun product. Men streeft naar een evenwichtsprijs van 12 euro. Dit betekent voor het model dat de vraagvergelijking en de evenwichtsvergelijking niet veranderen. De aanbodvergelijking verandert echter wel: c en d hoeven niet meer gelijk te zijn aan 1 respectievelijk 10.

In het jaar dat de maatregelen van kracht worden is $P = 6$. Dit leidt in het jaar erop tot $Q^a = 13$.

Neem aan dat de evenwichtsprijs van 12 euro inderdaad bereikt gaat worden.

5p 20 □ Stel de nieuwe aanbodvergelijking op.

Einde