

Wim Veldman

Subfaculteit Wiskunde Katholieke Universiteit  
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen  
veldman@sci.kun.nl

Boekbespreking De negen hoofdstukken over de wiskunst

# Het Chinese begin

China kent een grote wiskundige traditie. Dat blijkt vooral uit vele prominente bijdragen aan bijvoorbeeld de getallentheorie en de analyse. Veel minder bekend is het feit dat de Chinese wiskunde een andere oorsprong heeft dan de westerse. Het Chinese equivalent van de *Elementen* van Euclides is het anonieme *Boek der negen hoofdstukken over de wiskunst* dat honderd jaar voor Christus zijn uiteindelijke vorm vond en een paar eeuwen later door Liu Hui van een commentaar werd voorzien. Dit boek is voor het eerst in het Engels vertaald. Hoe verhoudt het zich tot de westerse literatuur uit dezelfde periode? Behandelt het boek dezelfde stellingen?

Wiskunde is een ambacht en wie dit vak beoefent staat in een traditie. Hij bouwt voort op de wijsheid en de inzichten van grote voorgangers en probeert zich met ijver en geduld de eer van het lidmaatschap van het illustere gilde waardig te betonen. Wij hebben een boek dat onze traditie als het ware definiëert: *De Elementen van Euclides*. Dit boek, rond 300 voor Christus geschreven door een verder onbekende hoogleraar aan de toen net opgerichte Universiteit van Alexandrië in Egypte, is een indrukwekkende en richtinggevende uiteenzetting van de diepe resultaten die geniale wiskundigen als Eudoxos en Theaetetos enkele generaties eerder, in de Griekse Gouden Eeuw, hadden weten te bereiken. Met Archimedes en Apollonios zette de bloei van de Griekse wiskunde zich voort in de derde eeuw voor Christus.

In China was 'ons' boek niet bekend. Pas in 1606, toen de jezuïeten pogingen deden

China tot het Christendom te bekeren, werden de eerste zes van de dertien boeken van de *Elementen* in het Chinees vertaald, door Xu Guangqui en pater Matteo Ricci. De jezuïeten hoopten dat de Chinezen, wanneer zij eenmaal de superioriteit van de westerse wetenschap zouden hebben erkend, gemakkelijker de redelijkheid van het Christendom zouden inzien. De Chinezen, trots op hun eigen beschaving waaraan ook wij het papier, het buskruit, de boekdrukkunst en het kompas te danken hebben, vonden de *Elementen* maar een raar boek, en het sloeg niet aan. Pas in 1856 werd de vertaling van de *Elementen* voltooid. De wiskunde ging in China haar eigen gang en pas de laatste honderd jaar wordt die geschiedenis langzamerhand ontsloten voor de belangstellenden in het Westen. De niet aflatende inspanningen van Sir Joseph Needham (1900–1995) en zijn medewerkers leidden tot het monumentale boek *History of Science and Civilization in China*. In 1959 verscheen deel 3, dat ook de wiskunde behandelt. Men kan verrast zijn door het feit dat ook de Chinese wiskunde een boek kent dat wel 'het boek' genoemd wordt. Het heet *De Negen Hoofdstukken over de Wiskunst* (Jiuzhang Shuanshu). Het boek is, als vele Chinese klassieken, anoniem en heeft ongeveer 100 jaar voor Christus zijn huidige vorm gekregen. In 263 na Christus heeft de belangrijke

Chinese wiskundige Liu Hui het boek voorzien van uitgebreid commentaar. Ook in de eeuwen daarna is het boek blijven inspireren en heeft het zijn lezers ertoe gebracht nieuwe inzichten te ontwikkelen. De beroemde Chinese reststelling, bijvoorbeeld, komt voor in het *Wiskundig Handboek van Meester Sun* dat dateert uit ongeveer 400 na Christus. Ook in de geschiedenis van de wiskunde in Vietnam, Korea en Japan speelt het boek een belangrijke rol.

Van de *Negen Hoofdstukken* verscheen onlangs een Engelse vertaling waarin ook het commentaar van Liu Hui is opgenomen. Het maken van dit boek was geen sinecure, eerder moet het, zoals Shen Kangshen in zijn nawoord schrijft, een 'koek van duizend man' genoemd worden. Het onderzoek naar de *Negen Hoofdstukken* werd in China geleid door Qian Baocong. In 1964 bezorgde hij een klassiek-Chinese uitgave, die de basis vormde voor het nu verschenen boek. Shen Kangshen zette het uiterst compacte klassieke Chinees om in modern Chinees. De moeilijke stap van modern Chinees naar leesbaar en betrouwbaar Engels zette hij met behulp van zijn beide co-auteurs.

De auteurs beginnen hun boek met een uitvoerige inleiding. Hierin vertellen zij iets over Chinese maten. Ook leggen zij uit dat de Chinezen eigenlijk al een positionele notatie voor de natuurlijke getallen hadden en rekenden met stokjes (figuur 1). Zij vergelijken de ontwikkeling van de wiskunde in China met die in Egypte, Babylon, India, Griekenland en Europa. Daarna behandelen zij de 246 vraagstukken van de Jiuzhang Shuanshu hoofdstuk

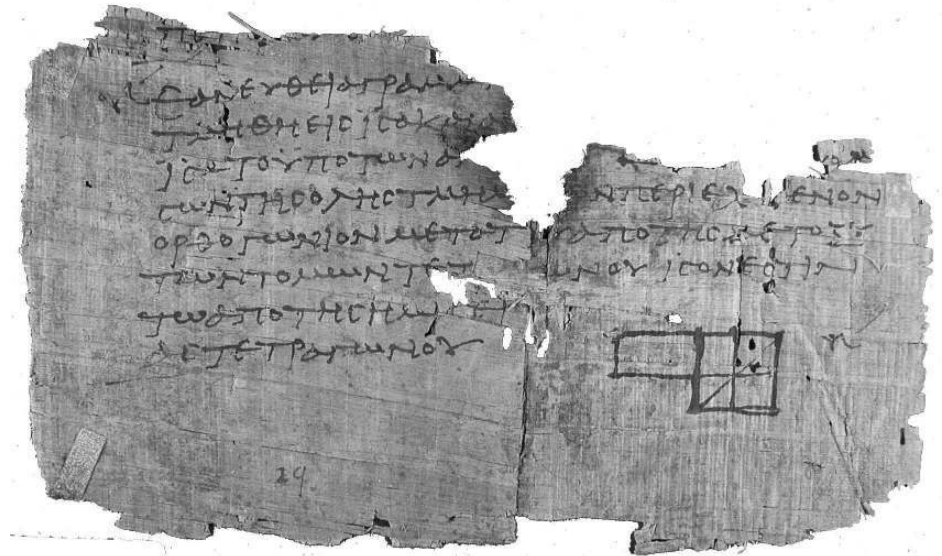
“Weten wat je begrijpt, en weten wat je niet begrijpt, dat is kennis.”  
Confucius, uit: *Analecta*, boek I

voor hoofdstuk.

De auteurs geven telkens een samenvatting van de inhoud van het Hoofdstuk, de tekst, het commentaar van Liu Hui, latere Chinese commentaren, en eigen voetnoten. Zij sluiten af met een extra hoofdstuk waarin zij het *Wiskundig Handboek van het Zee-eiland* behandelen. Dit Handboek is ook van de hand van Liu Hui. Het is een voortzetting van zijn commentaar bij het Negende Hoofdstuk en bespreekt landmeetkundige vraagstukken (figuur 3).

De titels van de Hoofdstukken verraden al dat de vraagstukken dikwijls een praktische inslag hebben. Tussen de regels door komen we van alles te weten over het leven in China, bijvoorbeeld over de verschillende soorten gierst en rijst die in de handel waren. Er zijn vragen over de inhoud van voorraadschuren, dijken en stadsmuren in allerlei vormen. Het boek werd gebruikt bij de opleiding van regeringsambtenaren. Ook de commentator Liu Hui lijkt begaan met problemen van bestuurlijke en organisatorische aard.

De stijl van de Jiuzhang Shuanshu is ruwweg als volgt: er wordt een aantal praktische vragen gesteld, daarop wordt het antwoord gegeven, zonder uitleg. Dan wordt een regel geformuleerd waarmee het antwoord op een vraag van de gegeven soort altijd gegeven kan



**Figuur 2** Een van de oudste en meest volledige diagrammen van de *Elementen* van Euclides. Het betreft hier een fragment van een papyrusrol, gevonden in de vuilnishopen van Oxyrhynchus. Nu is het in bezit van het museum voor archeologie en antropologie van de Universiteit van Pennsylvania. Het diagram betreft Propositie 5 van Boek twee van de *Elementen*. Het manuscript is gedateerd tussen het jaar 75 en 125 na Christus.

Bron: <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html>

worden. Ook nu geen uitleg of verklaring. Soms valt een didactische lijn in de rij van de opgaven te ontdekken. Maar pas met het commentaar van Liu Hui worden de Negen Hoofdstukken meer dan een receptenboek.

**Wederzijds aftrekken**

In Hoofdstuk 1, Rechthoekige gebieden, leren we breuken vereenvoudigen en het daarvoor nuttige algoritme om de grootste gemene deler van twee getallen te bepalen. Wij noemen dit algoritme (wederzijds aftrekken) het algoritme van Euclides. Het begrip ‘priemgetal’ komt in de Chinese wiskunde niet voor.

Uit vraagstuk 23 van Hoofdstuk 1 blijkt dat de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel gelijk gesteld werd aan 3. Dit bracht Liu Hui ertoe  $\pi$  te benaderen met behulp van een in de cirkel ingeschreven regelmatige 96-hoek (figuur 4). De auteurs vergelijken zijn resultaat met dat van Archimedes.

Hoofdstuk 2, Gierst en rijst, begint met een tabel waarin staat hoeveel eenheden gierst, graan, of sojabonen geruild kunnen worden tegen hoeveel eenheden van een andere stof, of van dezelfde stof maar van een andere soort of kwaliteit. Het schijnt dat men in China lange tijd niet over geld beschikte, alleen over zulke ruiltabellen. Daarna volgt een rij vragen die beantwoord kunnen worden met de zogenaamde Regel van Drieën: als  $a$  eenheden  $A$  evenveel waard zijn als  $b$  eenheden  $B$ , hoeveel eenheden  $B$  zijn dan evenveel waard als  $a'$  eenheden  $A$ ? Antwoord: vermenigvuldig  $a'$  met  $b$  en deel door  $a$ . Hoofdstuk 3, Verdelen in verhouding, bevat vragen van een vergelijkbaar type.

**Derdemachts wortel**

In hoofdstuk 4, Korte breedte, worden algoritmen beschreven om bij een gegeven natuurlijk getal, in tientallige notatie, de wortel en de derdemachtswortel te bepalen of te benaderen. Het hoofdstuk bevat ook de volgende niet-uitgelegde regel om van een bol waarvan de inhoud gegeven is de middellijn te bepalen:

*Leg het getal neer (in stokjes). Vermenigvuldig met 16, deel door 9. Neem de derdemachtswortel van de uitkomst, dat is de middellijn van de bol.*

Deze regel maakt van  $\pi$  ongeveer 3,375. Liu Hui merkt op dat de regel onjuist is. In een poging deze fout te verklaren, zie [5], denkt hij na over de inhoud van de bol en beschouwt hij de doorsnede van twee cilindres die de bol bevatten en aan de bol raken en loodrecht op elkaar staan. Deze figuur noemt hij ‘mouhefanggai’ (‘gecombineerde vierkante paraplu’s’) (figuur 5). Een latere commentator merkt op dat de inhoud van de mouhefanggai  $2/3$  is van de inhoud van de omgeschreven kubus van de bol. Een aardig feit is dat ook Archimedes, in ‘de Methode’, deze figuur bekijkt en tot dezelfde conclusie komt. Helaas is het deel van ‘de Methode’ dat Archimedes’ bewijs hiervan zou moeten bevatten, verloren gegaan. Net als Archimedes in ‘de Methode’ lijkt men in China iets als Cavalieri’s principe te gebruiken. De auteurs geven dit principe daarom de naam ‘principe van Hui-Zu’. Zij vermelden niet dat Archimedes dit principe alleen heuristische waarde toekent, zie [1].

**Getallen in stokjes neerleggen**  
De stokjes kunnen verticaal

I II III IIII T TT TTT TTTT

of horizontaal worden neergelegd.

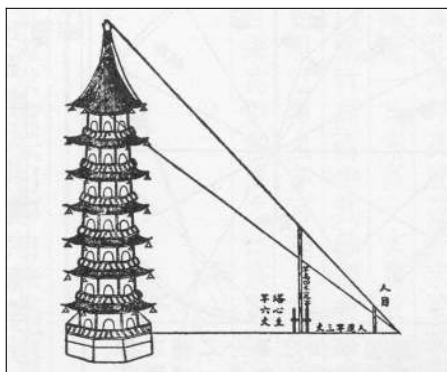
— = ≡ ≡ ≡ ≡ | | | |

Notatie in het tientallig stelsel door afwisselen van het verticale en het horizontale neerleggen. Het getal 19083 bijvoorbeeld ziet er zo uit:

| ≡ ≡ III



**Figuur 1**



Figuur 3

Hoofdstuk 5, Constructie-adviezen, behandelt inhoudsbepalingen. Een *yangma* is een pyramide met een rechthoekig grondvlak waarvan de top boven een van de hoekpunten van het grondvlak ligt. Hoofdstuk 5 bevat het volgende voorschrift:

*Regel voor een yangma:*  
*Vermenigvuldig de breedte met de lengte, vermenigvuldig dan met de hoogte, deel door 3.*

Liu Hui legt uit waarom deze regel juist is. Hij merkt eerst op dat het geval dat lengte, breedte en hoogte van de yangma gelijk zijn eenvoudig te begrijpen is: een kubus kan in drie van zulke yangma's verdeeld worden (figuur 6). In het algemene geval volgt hij een gedachtengang die doet denken aan de manier waarop de inhoud van het viervlak behandeld wordt in het twaalfde Element van Euclides.

We beginnen (figuur 7) met een rechthoekig blok *ABCDEFGH* en verdelen dat in twee zogenaamde 'qiandu's': *ABCDGH* en *ABFEHG*. De qiandu *ABCDGH* verdelen we in de yangma *ABCDH* en een rest-



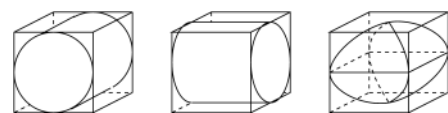
Figuur 4

figuur *BCGH* die 'bie'nao' genoemd wordt. Ons doel is nu aan te tonen dat de inhoud van de yangma *ABCDH* het dubbele is van de inhoud van de bie'nao *BCGH*. Want dan kunnen we concluderen dat de inhoud van de yangma *ABCDH* een derde is van de inhoud van het in het begin gegeven blok *ABCDEFGH*. We noemen de middens van *AB, BC, CD, DA, HA, HB, HC* en *HD* achtereenvolgens *P, Q, R, S, U, V, W, X*. Het snijpunt van *PR* en *QS* noemen we *Z*. De yangma *ABCDH* is nu verdeeld in vijf stukken, namelijk een blok *SZRDUVWX*, twee qiandu's: *APZSUV* en *ZQCRWV*, en twee kleine yangma's: *UVWXH* en *PBQZV*. We kunnen begrijpen dat de inhoud van de eerste drie stukken samen een vierde is van de inhoud van het in het begin gegeven blok. Nu gaan we ook de bie'nao *BCGH* in stukken verdelen. De middens van *HB, HC, BG, CG, BC* en *GH* noemen we achtereenvolgens *V, W, M, N, Q* en *O*. De bie'nao *BCGH* is nu in vier stukken verdeeld, namelijk twee qiandu's, *VMNWGO* en *VMNWQC* en twee kleine bie'nao's: *VWOH* en *BQMV*. We kunnen begrijpen dat de inhoud van de eerste twee stukken samen een achtste is van de inhoud van het in het begin gegeven blok. De volgende stap bestaat erin dat we de twee kleine yangma's, overgehouden bij het verdelen van de yangma, en de twee kleine bie'nao's, overgehouden bij het verdelen van de bie'nao, nog eens aan dezelfde behandeling onderwerpen als de yangma, respectievelijk de bie'nao zelf. De yangma valt dan uiteen in een combinatie van blokken en qiandu's waarvan de inhoud  $3/8$  is van de inhoud van het in het begin gegeven blok en vier heel kleine yangma's, en de bie'nao valt uiteen in een combinatie van qiandu's waarvan de inhoud  $3/16$  is van de inhoud van het in het begin gegeven blok en vier heel kleine bie'nao's. In enigszins vage termen suggereert Liu Hui dat we, door dit proces van benaderen voort te zetten, gedwongen worden tot de conclusie dat de inhoud van de yangma het dubbele is van de inhoud van de bie'nao.

De vragen in hoofdstuk 6, Eerlijke lasten, borduren voort op de problematiek van de hoofdstukken 1, 2 en 3. Hier is vraagstuk 20:

*Een wilde eend vliegt in zeven dagen van de zuidzee naar de noordzee, en een wilde gans vliegt van de noordzee naar de zuidzee in negen dagen. Neem aan dat de vogels op hetzelfde ogenblik vertrekken. Wanneer komen zij elkaar tegen?*

In hoofdstuk 7, Tekort en overschot, is sprake van de Regel van de Dubbele Foute Uit-



Figuur 5 De mouhefanggai, een doorsnede van twee loodrecht op elkaar staande in de kubus ingeschreven cylinders



Figuur 6 Eén kubus is op te delen in drie yangma's

komst. Deze regel berust op het feit dat we, indien we van een onbekende lineaire functie *f* in twee punten de waarde weten, in staat zijn het punt te bepalen waar *f* een gewenste waarde, bijvoorbeeld 0, aanneemt. Hier volgt vraagstuk 19:

*Een goed paard en een minder goed paard vertrekken van Chang'an naar Qi. Qi ligt 3000 li van Chang'an af. Het goede paard legt op de eerste dag 193 li af en verder elke dag 13 li meer dan de vorige dag; het minder goede paard legt op de eerste dag 97 li af en verder elke dag 1/2 li minder dan de vorige. Het goede paard komt als eerste aan in Qi en keert dan om, het minder goede paard tegemoet. Zeg nu na hoeveel dagen zij elkaar ontmoeten en welke afstand elk van beide dan heeft afgelegd.*

**Vijf schapen, vier honden**

In het zeer verrassende hoofdstuk 8, Rechthoekige opstellingen, worden stelsels lineaire vergelijkingen bestudeerd. De coëfficiënten worden in een matrix gezet en deze matrix wordt door elementaire bewerkingen in driehoeksvorm gebracht. Deze in China al duizenden jaren bekende procedure heet bij ons 'eliminatie volgens Gauss'. Ook wordt in dit hoofdstuk gewerkt met negatieve getallen. In zijn commentaar bij vraagstuk 3 beschrijft Liu Hui de gewoonte positieve getallen in rode staafjes neer te leggen en negatieve getallen in zwarte. Hier is vraagstuk 17:

*Neem aan: 5 schapen, 4 honden, 3 kippen en 2 konijnen kosten samen 1496 munten; 4 schapen, 2 honden, 6 kippen en 3 konijnen kosten 1175 munten; 3 schapen, 1 hond, 7 kippen en 5 konijnen kosten 958 munten; 2 schapen, 3 honden, 5 kippen en 1 konijn kosten 861 munten. Zeg nu wat de prijs is van een schaap, een hond, een kip en een konijn.*

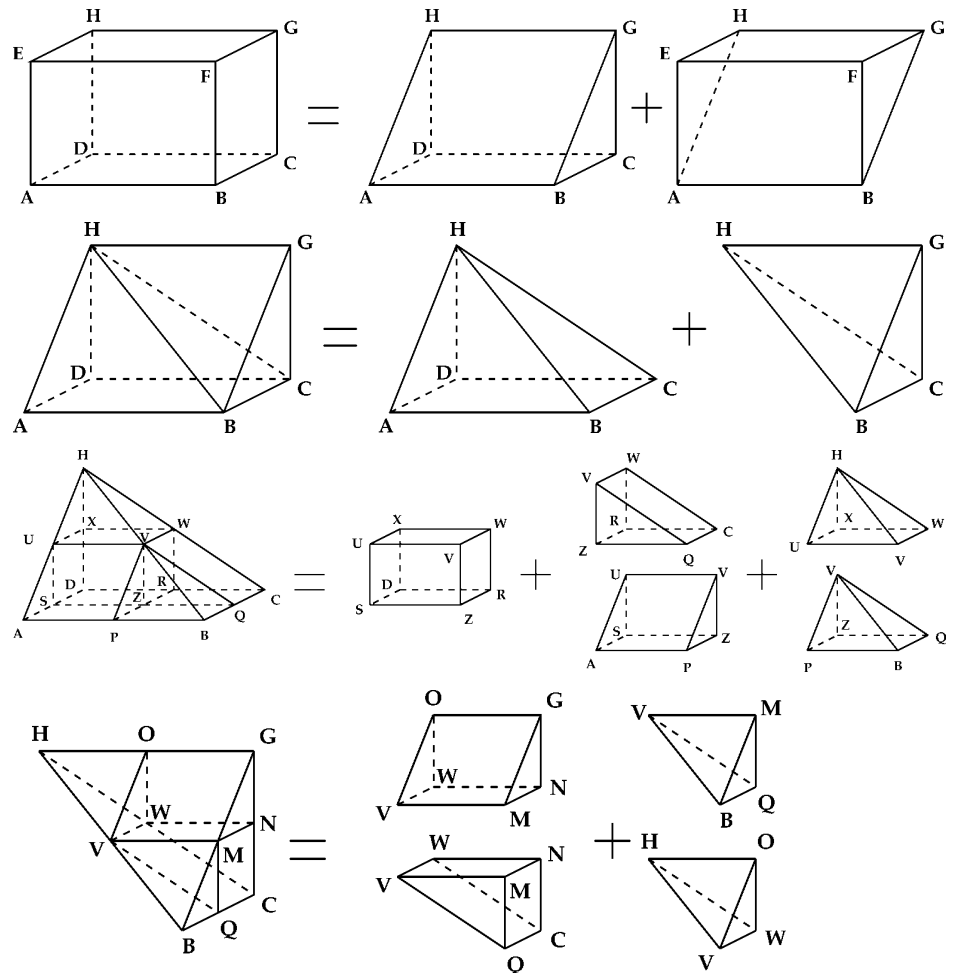
Hoofdstuk 9, Rechthoekige driehoeken, behandelt de stelling van Pythagoras (De Gouge Regel) als (onbewezen) rekenregel, bij-

voorbeeld om, wanneer twee zijden van een rechthoekige driehoek gegeven zijn, de derde te bepalen. Liu Hui doet een raadselachtige uitspraak die misschien suggereert dat de stelling kan worden bewezen door de vierkanten op de rechthoekszijden te verdelen en de stukken zo bij elkaar te leggen dat het vierkant op de schuine zijde ontstaat. Helaas is de bijbehorende figuur verloren gegaan.

### Onderwaardering

Het verschijnen van dit boek is een belangrijke gebeurtenis en wij moeten de auteurs diep dankbaar zijn voor al hun moeite. Het boek is onontkoombaar voor wie zich een beeld wil vormen van de ontwikkeling van de wiskunde in de wereld als geheel.

Het moet mij wel van het hart dat de auteurs in hun geestdrift voor de Negen Hoofdstukken te weinig oog lijken te hebben voor de diepe inzichten die de Griekse wiskunde bereikten. Zo noemen zij (op bladzijde 85) de behandeling van de oppervlakte van veelhoeken met behulp van het 'In-Uit Complementariteitsbeginsel' typisch Chinees terwijl het eerste Element van Euclides het begrip 'verdelings- en aanvullingsgelijk' zonder het zo te noemen voorbeeldig behandelt. Zij verwijten Archimedes (op bladzijde 104) dat hij niet-constructief redeneert. Dit verwijt is misplaatst. Dat de auteurs ertoe komen het te maken hangt samen met het feit dat zij Eudoxos' diepzinnige theorie van het begrip verhouding, zoals uiteengezet in het vijfde Element van Euclides, en het daarbij behorende axioma van Eudoxos-Archimedes, misschien niet goed begrijpen en in ieder geval onderwaarderen. Op bladzijde 61 beweren zij dat het vijfde element alleen spreekt over verhoudingen van lijnstukken terwijl het boek op een welhaast moderne manier abstracte 'grootheden' bespreekt. Zij zeggen ook, op bladzijde 277, dat Euclides' behandeling van de inhoud van het viervlak die volgens Archimedes aan Eudoxos moet worden toegeschreven eigenlijk minder goed is dan de behandeling van de inhoud van de yangma door Liu Hui. Opnieuw luidt het misplaatste bezwaar dat Euclides/Eudoxos uit het ongerijmde zou redeneren. En zij beweren dat Liu Hui beter aangeeft hoe je de inhoud en



**Figuur 7** Opdeling van een rechthoekig blok steeds kleinere delen. Regel 1: Eén blok is twee qiandu's. Regel 2: Eén qiandu is één yangma en één bie'nao. Regel 3: Eén yangma is één klein blok, twee kleine qiandu's en twee kleine yangma's. Regel 4: Eén bie'nao is twee kleine qiandu's en twee kleine bie'nao's.

in ieder geval 'in de praktijk' zou moeten bepalen. Deze opmerking lijkt mij onzinnig. Wel geven zij toe dat Euclides' resultaat algemener is, omdat het niet alleen over yangma's gaat maar over viervlakken en pyramides in het algemeen.

### Een fascinerende ervaring

De horzel die met zijn steek de zucht tot axiomatisch redeneren wekt, heeft in China weinig slachtoffers gemaakt. Een lang volgehouden betoog dat zich kan meten met bijvoorbeeld het eerste Element van Euclides treffen we er niet aan. Tegenhangers van Eudoxos en Archimedes zijn er niet. Het is een fascinerende

ervaring kennis te nemen van de geschiedenis van een 'andere' wiskunde, een andere stijl van denken en formuleren, die meer concreet en meer op de praktijk van het rekenen en construeren gericht is dan de onze, en misschien juist daardoor in sommige opzichten eerder succesvol was. Het zal nog lang duren voor wij de deugden van die andere wiskunde ten volle beseffen, maar we zijn op weg en met dit boek een hele stap verder. ◀

*The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion and Commentary*, edited by Shen Kangshen, John N. Crossley and Antony W.-C. Lun, Oxford University Press and Science Press, Beijing, 1999, xiv + 596 pages, £120.00, ISBN 019 854936 3

### Referenties

- 1 E.J. Dijksterhuis, Archimedes, translated by C. Dikshoorn, with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr, Princeton University Press, 1987.
- 2 J.-C. Martzloff, A history of Chinese Mathematics, Springer, Berlin etc., 1997.
- 3 J. Needham, with the collaboration of Wang Ling, Science and Civilization in China, Volume 3: Mathematics and the sciences of the heaven and the earth, Cambridge University Press, 1959.
- 4 The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary, by Sir Thomas L. Heath, Second Edition, revised with additions, in three volumes, Dover Publications, New York, 1956.