

**Jacob Perrenet**

Onderwijs Service Centrum  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven  
j.c.perrenet@tue.nl

**Hans Sterk**

Faculteit Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven  
sterk@win.tue.nl

# Blij met de vernieuwde Tweede Fase?

In 2001 heeft ongeveer een kwart van de eerstejaars wiskundestudenten die direct van het vwo komen het nieuwe programma van de Tweede Fase doorlopen; in 2002 bijna allemaal. De wiskunde-inhoud in de Tweede Fase is anders geworden in de profielen, de vorm van het wiskundeonderwijs is anders in het Studiehuis. Zijn wij als wiskundeopleiders eigenlijk wel blij met deze veranderingen? Wat merken we ervan en hoe passen we ons aan?

In dit artikel geven twee betrokkenen bij de opleiding Technische Wiskunde van de TUE inzicht in hoe de TUE deze vragen beantwoordt en roepen ze op om de aanpassingen en ervaringen bij de wiskundeopleiders aan andere universiteiten te inventariseren. Serviceonderwijs (wiskundeonderwijs aan studenten van andere opleidingen) is een verhaal apart, daar gaat dit artikel niet over.

De profielen Natuur en Gezondheid (N&G) en Natuur en Techniek (N&T) geven toegang tot het (technisch) universitaire wiskundeonderwijs. Het profiel N&G biedt het programma wiskunde B1, dat een deel is van het programma wiskunde B1, 2 binnen N&T. In het kort komen de veranderingen ten opzichte van het oude examenprogramma wiskunde B op het volgende neer. Verdwenen zijn een aantal onderwerpen uit de ruimtemeetkunde (bijvoorbeeld parameterrepresentaties van vlakken, translaties en inwendig product), limieten van

functies en cyclometrische functies. Erbij gekomen zijn, zowel voor N&G als voor N&T, combinatoriek en kansrekening, het werken met een grafische rekenmachine en integralen en differentiaal opstellen in een natuurkundige context. Exclusief voor N&T zijn de onderwerpen bewijzen in de vlakke meetkunde, afstanden en grenzen en rijen, inclusief het begrip convergentie.

De precieze vormveranderingen zijn moeilijker te omschrijven. Iedere leerling moet, individueel of groepsgewijs, meer projectachtige

activiteiten uitvoeren zoals het maken van praktische opdrachten of van een profielwerkstuk, maar verder heeft iedere school de vrijheid om in meer of mindere mate het Studiehuis in de bovenbouw in te voeren. Het Procesmanagement Voortgezet Onderwijs [1] ziet accenten binnen het onderwijs binnen het Studiehuis als volgt verschuiven. Het onderwijs is meer *vaardigheidsgericht*: het realiseren van een goed evenwicht tussen kennis, inzicht en vaardigheden in het onderwijsleerproces is gewenst; de nadruk ligt op vaardigheden van het leren zelf: het uitvoeren, het reflecteren en het communiceren. Er is sprake van meer *begeleid onderwijs*: er moet een nieuw evenwicht tussen les geven en begeleiding worden gevonden. Er is in grotere mate sprake van *differentiatie*: verschillen tussen leerlingen moeten worden herkend en gehonoreerd door het maken van bewuste keuzes voor leerinhouden en verwerking door leerlingen. Er moet meer *samenhang* in het onderwijs bestaan: het is van belang om een verbinding

ding te leggen tussen leerinhouden van verschillende vakken en om samenhang aan te brengen in het pedagogisch-didactisch handelen van het team. Tenslotte dient het onderwijs meer *procesgericht* te zijn; het onderwijs is niet alleen gericht op de vakinhoud, maar ook op het leerproces.

### Blij met inhoudelijke veranderingen?

De grootste blikvanger in het onderdeel wiskunde B1,2 uit het profiel Natuur en Techniek is ongetwijfeld het onderwerp 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' (zie ook [12]). De (profi)examens van de afgelopen jaren geven een beeld van wat men ongeveer eist: gelijkvormigheden, koordenvierhoeken, meetkundige plaatsen en kegelsneden, afstanden en grenzen met het voor de meesten nieuwe begrip Voronoi-diagram (zie voor de eindtermen [13]).

Natuurlijk gaat je hart sneller kloppen bij deze revival: ontwikkeling van gevoel voor en inzicht in meetkundige configuraties, leren bewijzen in deze inspirerende context; althans, wij docenten vinden die context inspirerend. Vooral de expliciete aandacht voor bewijzen is hartverwarmend en een hoopvolle indicatie dat fundamentele aspecten van de wiskundeopleiding niet (verder) uit het eerste jaar hoeven te verdwijnen maar hun natuurlijke plaats in curricula vinden.

Ongelukkig is het verdwijnen van het begrip limiet van een functie, waardoor een essentieel ingrediënt bij het introduceren van afgeleiden onder tafel geveegd is. Nu blijft het bij differentiequotienten en vervolgens zijn er plotseling afgeleiden.

Het onderdeel bewijzen in de vlakke meetkunde is ook geïsoleerd: de verbinding met de analytische kant wordt niet gelegd omdat zowel de (beginselen van de) analytische meetkunde als de vectormeetkunde uit het vwo-programma verdwenen zijn (iets van vectoren komt wel aan de orde bij natuurkunde); bewijzen komen bij andere leerstofonderdelen niet aan de orde. Daarnaast hoor je vwo-docenten wel verzuchten: waar doen we het voor, als jullie én niet voortbouwen op de meetkunde (meetkunde komt in ons basiscurriculum niet terug) én ook studenten met het profiel Natuur en Gezondheid toelaten. Het zal overigens wel bij een enkeling blijven die vanuit N&G instroomt. We plakken zo'n student het label 'deficiënt' op en geven eventueel wat extra onderwijs. Het gevaar bestaat dat wij zo ongewild bijdragen aan de ondergraving van het profiel N&T.

Daarnaast zullen we worden geconfronteerd met studenten met een grote differentia-

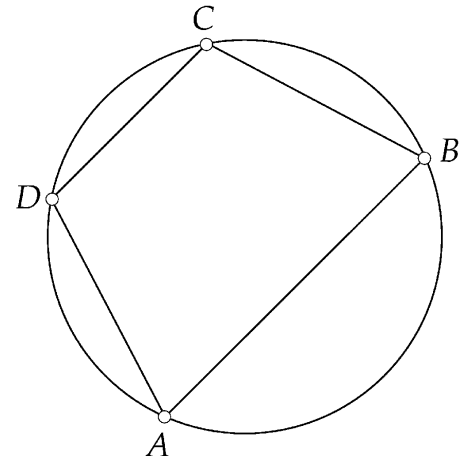
tie in achtergrond door de mogelijkheden die praktische opdrachten en profielwerkstukken bieden. Of dit voor een toegepaste opleiding gunstig is, weten we nog niet.

Een ander zorgelijk punt — iedereen die met eerstejaars te maken heeft zal het wel niet ontgaan zijn — waar is toch die parate kennis zoals  $\sin \pi/6$ ? Die lacune kan op zichzelf niet aan de vernieuwde Tweede Fase worden toegeschreven, maar rondvragen bij enkele vwo-docenten leert, dat die parate kennis en manipulatievaardigheid wel eens verder zouden kunnen afnemen. Een uitgebreide formulekaart (met onder andere resultaten uit de vlakke meetkunde) en een grafische rekenmachine staan scholieren ter beschikking bij al hun wiskundig handelen. Wij zullen daarom zelf duidelijk moeten maken welke parate kennis en manipulatievaardigheid wij wenselijk vinden en hoe wij dit in ons onderwijs onderbrengen. Om de taal van de wiskunde te spreken moet je een zekere vocabulaire hebben. De nadruk op vaardigheden heeft als keerzijde de verminderde (parate) kennis. Ook onderwijskundigen geven aan (bijvoorbeeld in [10]) dat professioneel probleemoplossen niet geleerd kan worden los van goed gestructureerde kennis van het betreffende domein. Opzoekvaardigheden alleen zijn niet voldoende. De vraag is uiteindelijk hoeveel en wat voor soort (parate) wiskundekennis voor eerstejaars wiskunde echt vereist is, misschien  $\sin \pi/6$  op zichzelf niet, maar wel het schema van de eenheidscirkel om de waarde in een handomdraai te produceren.

### Inhoudelijke veranderingen

We zijn begonnen met het afnemen van een 'instaptoets' aan het begin van het jaar (zoals reeds op de Vrije Universiteit gebeurt (zie [6]) om parate kennis en manipulatievaardigheid in te schatten en daarmee verwachtingen van onze kant vroegtijdig tot realistische proporties terug te brengen.

Om per student de vinger aan de pols te houden en aan hun parate kennis te schaven, nemen we wekelijks een kleine overhoring af bij onze eerstejaars over goed afgebakende onderwerpen, bijvoorbeeld de definitie van limiet of het begrip vectorruimte. Gedurende 5 à 10 minuten stellen wij vragen over dat onderwerp. Bijvoorbeeld: wat betekent  $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 1$ ? Is  $f$  in de buurt van 3 ongelijk 3? Welke axioma's gebruik je bij het uitwerken van  $(a + b)(\bar{v} + \bar{w})$ ? De waardering voor de overhoringen resulteert in een bonus bij het tentamen. Met zo'n gerichte opdracht kunnen studenten niet verdrinken in de op-



Uit het eindexamen wiskunde B1,2 vwo 2001-II. Bewijs: als een koordenvierhoek een trapezium is, heeft hij twee overstaande zijden die even lang zijn.

gegeven hoeveelheid stof en hebben wij een aanknopingspunt om te zien of studenten de theorie met beleid bekijken. Om dit proces te ondersteunen voegen we opgaven toe die studenten op het spoor zetten de theorie zo te bestuderen dat ze tot de kern van de zaak doordringen. Het dwingt ons ertoe te bedenken hoe we studenten nu eigenlijk met de theorie om willen laten gaan.

Na jaren waarin de onderwezen analyse gewoon te moeilijk bleek te zijn geworden is dit jaar het analyse-onderwijs van inhoud veranderd. Bij kansrekening en statistiek zullen de bakens wellicht verzet gaan worden in een andere richting, omdat het nieuwe vwo-programma daar wat sterker is geworden.

Wat de inhoudelijke kant betreft, vinden onze studenten afkomstig uit de vernieuwde tweede fase (het is overigens maar een handvol) dat het programma goed aansluit. Wel schrikken studenten zoals altijd van het tempo.

### Blij met vormveranderingen?

Bij de inhoudelijke veranderingen heeft het wiskundeveld meegepraat, bij de vormveranderingen minder. Uit de publicaties van verschillende didactici komt een gemengd beeld naar voren. Enerzijds zijn er didactici die de studiehuisaanpak, met grotere aandacht voor het zelfstandig leren, vertalen naar het wiskunde leren, bijvoorbeeld Kok [7], Lagerwerf en Korthagen [8], Boertien [2]. Anderzijds zijn er didactici die zich zorgen maken dat het contact met de leerkracht verdwijnt, bijvoorbeeld Bos [3], Groen [5] en Broekman [4]. Van Streun [11] diept de zorg verder uit. We staan kort stil bij hun argumenten.

Lagerwerf en Korthagen [8] voelen zich aangesproken door de nieuwe denkbeelden

<b>Profiel Cultuur en maatschappij</b> <i>Wiskunde a1</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Combinatoriek en kansrekening – Grafen en matrices – Statistiek en kansrekening	<b>Profiel Economie en maatschappij</b> <i>Wiskunde a1,2</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaalrekening met toepassingen – Discrete dynamische modellen – Lineair programmeren – Grafen en matrices – Statistiek en kansrekening – Keuze-onderwerpen
<b>Profiel Natuur en gezondheid</b> <i>Wiskunde b1</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaal- en integraalrekening – Continue dynamische modellen – Goniometrische functies – Normale verdelingen en toetsen van hypothesen – Keuze-onderwerpen	<b>Profiel Natuur en techniek</b> <i>Wiskunde b1,2</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaal- en integraalrekening – Continue dynamische modellen – Goniometrische functies – Normale verdelingen en toetsen van hypothesen – Keuze-onderwerpen – Voortgezette meetkunde – Voortgezette analyse

**Tabel 1** De vier profielen van de Tweede Fase van het vwo met de bijbehorende wiskundeprogramma's. Bron: www.nvww.nl

over onderwijs, zoals de grotere aandacht voor leren als proces, voor leren als actief bouwen van eigen denkbeelden en met grotere verantwoordelijkheid van de lerende zelf. Kok [7] constateert dat ook bij wiskunde B de leerling zich steeds minder bij de hand liet nemen, maar de docent moet wel aandacht geven aan systematische probleemaanpak en stappenplannen om het zelfstandig werk te ondersteunen. Het verst gaat Boertien [2]: hij accepteert de 'terugtrekkende leraar' (een term van Van Streun [11]), als een gegeven. Vanuit het CITO ontwikkelt hij zogenaamde voortgangstoetsen ter ondersteuning van het leerproces en de begeleiding: verzamelingen van leergang-onafhankelijke opdrachten gericht op brede toepassing van het geleerde met uitgebreide correctievoorschriften voor de leerlingen zelf. Deze zouden de rol over moeten nemen van de leerkracht die inzichtvragen stelt of extra opgaven aanbiedt, gericht op integratie van de leerstof, nadat de leerlingen standaardopgaven hebben gemaakt. Boertien merkt terecht op dat een nieuwe aanpak gevolgd door oude toetsen niet werkt. Echter, wat deed de leerkracht in de opgeheven rol eigenlijk verkeerd? Het is daarom dat Groen [5] zijn zorgen uit omtrent het Studiehuis: in het onderwijs van de wiskunde kan en moet volgens hem niet zo veel veranderen. Zelfstandig werk kwam al veel voor in de klas. Adviezen over studievaardigheden werden al impliciet gegeven. Een groter gebruik van studiewijzers moet niet betekenen dat de interactie met de leerkracht verdwijnt. Ook Bos [3] maakt zich ongerust over

de gedachteloze inzet van op zelfwerkzaamheid geschreven materiaal. Zelfstandig werken is nog geen zelfstandig leren. Leerlingen moeten leren doelen te stellen, te plannen, te monitoren en te evalueren (metacognitie). Leraren moeten daartoe leerlingen vragen naar hun werkwijze, soms hardop denkend zelf met een probleem worstelen, leerlingen de eigen resultaten op diagnostische toetsen laten analyseren, overzichten en schema's laten maken van de leerstof en zelf proefwerkvragen laten bedenken. En Broekman [4] vindt het een verarming van het wiskundeonderwijs wanneer de docent zich steeds op de achtergrond zou moeten houden en geen uitdagende initiatieven meer zou mogen nemen om leerlingen te inspireren. Van Streun [11] ten slotte acht de studiehuisaanpak (lees: zelfstandig leren) wel geschikt voor leren gericht op reproductie, maar minder voor leren gericht op productief denken: het bereiken van inzicht, overzicht, probleemoplossingsbekwaamheden en onderzoeksvaardigheden.

Alles goed en wel, maar de gemiddelde wiskundeleraar zal volgens ons ongetwijfeld zeer beïnvloed worden door het beleid van de school als geheel, waarbij de vakken mogelijk uniform benaderd worden. De vlucht in wat Van Streun noemt 'de terugtrekkende leraar', die zijn klas niet meer als geheel ziet, lijkt ons een doorgeschoten reactie. Dit is ook niet bedoeld door de Stuurgroep Tweede Fase, die, nog vóór het PMVO [1], aan de wieg stond van het Studiehuis. De bedoeling was niet opheffing van het klassikale onderwijs,

maar wel een vermindering, en wel met het doel de aandacht van de leerkracht meer te richten op speciale groepen leerlingen (begeleiding op maat).

Wiskundeonderwijs moet volgens ons een mengvorm zijn van klassikaal onderwijs, werken in groepen en individueel werken. Bij het klassikaal onderwijs is de docent nodig voor het geven van een samenhangend overzicht van de stof, het demonstreren van realistisch probleemoplossen (inclusief vastlopen en opnieuw beginnen), het voeren van een socratische dialoog. Ook is de docent er om uit te stralen dat wiskunde leuk en waardevol is. Bij het werken in kleine groepen, denk bijvoorbeeld aan projectwerk, is de rol van de docent voornamelijk coach, verder opdrachtgever, expert en beoordelaar; hetzelfde voor individueel werk, enerzijds minder frequent, anderzijds meer toegespitst op de individuele leerling. Verder volgen we Schoenfeld ([9]) in zijn visie, dat juist de onderdompeling van leerlingen in een wereld van wiskundige cultuur het meest leerzaam is (in tegenstelling tot de onnatuurlijke schoolcultuur). Zowel docenten wiskunde in het vwo als in het wetenschappelijk onderwijs willen we Schoenfelds artikel ter inspiratie sterk aanbevelen.

#### Vormveranderingen, wat doen we ermee?

Niets doen lijkt op het eerste gezicht gerechtvaardigd omdat het Studiehuis werd ingevoerd om juist de aansluiting te verbeteren tussen vwo en hoger onderwijs. Toch kunnen we maar beter op twee fronten werken aan de brug tussen vwo en hoger onderwijs om voeling te hebben met wat zich in het vwo afspeelt. Trouwens, ook binnen universiteiten zijn vernieuwingen gaande die gebaseerd zijn op onderwijskundige inzichten, soortgelijk aan de inzichten die aan het Studiehuis ten grondslag liggen. Aan de TUE is dat Ontwerpgericht Onderwijs (OGO), gericht op het versterken van de kenmerken professionaliserend, activerend, samenwerkend, schepend, integrerend en multidisciplinair in de opleidingen. Binnen de opleiding Technische Wiskunde is men echter gewend een eigen koers te varen bij de invulling van de opleiding. Jaren eerder zijn hier bijvoorbeeld de zogeheten Modelleerprojecten ingevoerd: open, niet per se in wiskundige termen geformuleerde opdrachten bestemd om door tweetallen studenten te worden gemaakt. Onderwijskundige vernieuwingen van buitenaf slaat men kritisch en vaak sceptisch gade – een opsomming als die van het PMVO zoals hierboven spreekt weinig vakbroeders aan. Hun voornaamste rol is dat er tot stelling nemen

aangezet wordt. Soms blijken zulke nieuwe ideeën in een of andere vorm toch (al) een plaats te hebben gekregen of in gang gezette veranderingen een extra zetje te hebben gegeven.

Concrete aanleiding om over vormveranderingen na te denken, waren gesprekken met vwo-docenten uit de regio. Hun verwachting is dat de studiehuisstudent sterker is op het gebied van zelfstandigheid, plannen, ijver (met name bij betere leerlingen, door de praktische opdrachten), vaardigheden met betrekking tot informatie zoeken, samenwerken, presenteren en Informatie en Communicatie Technologie (ICT), maar zwakker op het gebied van parate kennis, rekenen en algebraïsch manipuleren, misschien zelfs redeneervaardigheid. Daarnaast verwachten ze een toename van calculerend gedrag, mede door de steeds drukkere agenda van de leerling en de ruim aanwezige afleidingsmogelijkheden. Bij ons, aan de universiteit, zouden colleges vooral moeten dienen om studenten te inspireren en uit te dagen en wellicht zouden het er minder moeten zijn; wij zouden bewust moeten opzoeken wat voor parate kennis we willen realiseren en welke rol we geven aan (ICT)hulpmiddelen, en voort moeten bouwen op de praktische opdrachten.

De eerste plek waar we aan de slag zijn gegaan is het wiskundepracticum. Het wiskun-

depracticum in het eerste jaar beslaat meerdere middagen en is gekoppeld aan diverse vakken (afhankelijk van het trimester), onder meer analyse en lineaire algebra. In de geschiedenis van het wiskundepracticum is herhaaldelijk met een huiswerkboussysteem en met proeftentamens gewerkt; nu komt ook groepswerk aan bod: studenten werken in drietallen aan opgaven. Per sessie is een ander groepslid verantwoordelijk voor het inleveren van de opgaven aan het eind van de middag (een duidelijke deadline dus). Om warm te draaien voor zo'n middagsessie geven we studenten vooraf, als huiswerk, een serie eenvoudige opgaven op die bedoeld zijn voor eerste verwerking van de stof en het opbouwen van routine (deze opgaven worden niet ingeleverd). Het ingeleverde werk wordt beoordeeld voor elke groep als geheel. Tevens vinden, als eerder gemeld, overhoringen plaats (dat kan dus met die geringe studentenaantallen). Bij voldoende resultaat voor een en ander wordt een bonus voor het tentamen gegeven. Het collegeonderwijs in de bijbehorende vakken is onveranderd gebleven. Bij het in te leveren werk houdt de deadline er behoorlijk de vaart in; natuurlijk, soms treedt er toch afschuifgedrag op of wordt er wat overgeschreven. De mondelinge sessies zijn voor ons heel boeiend. Studenten denken al gauw dat 'ongeveer weten' plus talent meer dan ge-

noeg is en gaan met de billen bloot. Zo'n minisessie fungeert dan en passant als studiebegeleiding en wordt door studenten ook als leerzaam ervaren.

Bij deze vorm rapporteren de studenten afkomstig uit de vernieuwde tweede fase geen kloof met hun eerdere manier van werken.

### Een diffuus beeld en een oproep

Het beeld dat uit vorm- en inhoudsveranderingen naar voren komt is diffuus: er is veel vrijheid voor scholen bij de invulling van het Studiehuis, er zijn veel mogelijkheden voor uitstapjes via keuze-onderwerpen, praktische opdrachten en profielwerkstukken. Kortom, we verwachten een gemêleerd gezelschap. We zijn bepaald niet radicaal anders te werk gegaan, maar lijken alleszins redelijk aan te sluiten bij de vernieuwde Tweede Fase, al is onze populatie te klein om conclusies te trekken. Toch bekruipt ons wel eens een onbehaaglijk gevoel omdat er ook geluiden uit het middelbaar onderwijs zijn dat we met compleet andere studenten te maken zullen krijgen. Merken we dat niet omdat we er al goed op inspringen, of zien we iets over het hoofd? Daarom hier de vraag aan andere wiskundeopleiders om studiehuisstudenten en oudstijlers te vergelijken. ↵

### Referenties

- 1 Procesmanagement Voortgezet Onderwijs (1996), *Studiewijzers: de spoorboekjes voorbij*. <http://www.pmvo.nl/downloaden>
- 2 H. Boertien (2001), 'Voortgang bijhouden in het studiehuis, hoe doe je dat?', *Euclides* 76/5, pp. 192–195.
- 3 M. Bos (1996), 'Zelfwerkzaamheid? Zelfstandig leren!', *Euclides* 72/1, pp. 15–18.
- 4 H. Broekman (2001), 'De essentie van het leren van wiskunde... zonder inspirerende docent?', *Euclides* 77/2, pp. 42–44.
- 5 W.E. Groen (1999), 'Zorgen bij het studiehuis wiskunde'. In: *Meningen over het Studiehuis – deel 2*; *Nieuwe Wiskrant* 17/4, p. 15.
- 6 W.E. Groen (2001), 'Parate wiskundekennis en rekenvaardigheid', *Nieuwe Wiskrant* 20/3, pp. 50–52.
- 7 D. Kok (1997), 'Zelfstandig leren en de wiskundeleraar', *Nieuwe Wiskrant* 17/1, pp. 5–10.
- 8 B. Lagerwerf en F. Korthagen (1999), 'Van Model DA naar het VAARDIG-model', *VELON Tijdschrift voor lerarenopleiders* 20/3, pp. 28–36.
- 9 A.H. Schoenfeld (1987), 'What's All the Fuss About Metacognition'. In: A. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum, London, pp. 189–215.
- 10 H.G. Schmidt en J.H.C. Moust (1998), *Probleemgestuurd Onderwijs. Praktijk en Theorie*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- 11 A. van Streun (2001), 'Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs ervoor?'. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 1, pp. 42–50.
- 12 B. Zwaneveld (2001), 'Het wiskunde B1,2 examen'. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/2 nr. 2, pp. 148–155.
- 13 <http://www.nvww.nl/Eindtermen2.html>