Frans Boshuizen
Divisie Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit
ING Group, Corporate Reinsurance
Postbus 810, 1000 AV Amsterdam
frans.boshuizen@ing-re.nl

Peter Spreij
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
spreij@science.uva.nl

Rekenen aan hypotheken

Meer dan honderd jaar geleden vond menig wiskundige zijn beroep in de verzekeringswiskunde. Sindsdien is er veel veranderd. De financiële markten zijn groter en sneller geworden en worden bestuurd door snelle computers die complexe modellen kunnen doorrekenen. Financiële wiskunde neemt de laatste tien jaar een veel grotere plaats in op de universiteiten en daar wordt ook weer meer gedacht aan de financiële beroepspraktijk. Frans Boshuizen en Peter Spreij beschrijven allerlei geavanceerde technieken die gebruikt worden bij financiële instellingen om risico's te meten en beheersen.

Financiële instellingen zoals banken, verzekeringsmaatschappijen, treasury afdelingen van internationaal opererende ondernemingen proberen zich op allerlei manieren in te dekken tegen financiële risico's. Deze risico's kunnen van allerlei aard zijn. Denk bijvoorbeeld aan fluctuaties van wisselkoersen, grote schadeclaims bij noodweer, of aan waardeverandering van beleggingsportefeuilles, die zeer van belang zijn voor pensioenfondsen die hun verplichtingen op het gebied van pensioenaanspraken moeten nakomen.

Welke van de genoemde voorbeelden ook van toepassing is, altijd zal een kwantitatieve analyse van marktgegevens en wiskundige modellen de grondslag vormen voor het bepalen van prijzen en het onderbouwen van risicobeheersing. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de laatste tijd veel wiskundigen of personen met een andere exacte of kwantitatieve achtergrond — econometristen, statistici, maar ook fysici en sterrenkundigen — een werkkring vinden in de financiële sector.

Naast werk van statistische aard wordt ook gebruik gemaakt van analytische methoden uit andere delen van de wiskunde, bijvoorbeeld de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen. Omdat de te analyseren problemen vaak te complex zijn om een analytische 'gesloten vorm' oplossing te berekenen, worden veel numerieke methoden (numeriek integreren/differentiëren) gebruikt.

Ook eenvoudigere situaties dan de eerder genoemde voorbeelden zijn denkbaar. Bijvoorbeeld, risico's die financiële instellingen aangaan bij het verstrekken van hypotheken aan klanten. In dit artikel gaan we nader in op een aantal wiskundige aspecten die om de hoek komen kijken bij het vaststellen van prijzen die banken, of andere hypotheekverstrekkers, hun klanten berekenen.

1 Rente en verdiscontering

Als we geld uitlenen of op een bankrekening zetten, ontvangen we daarvoor rente. Stel dat we beginnen met een kapitaal k_0 en dat we aan het eind van n op elkaar volgende perioden het kapitaal k_n ontvangen. Over elk van deze perioden bestaat een rente van $\rho_k \times 100\%$. Dan is $k_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\rho_k)k_0$. Als we deze periodes kort nemen, zeg met een lengte h, dan zal ook de rente over zo'n periode van h afhangen. In dat geval schrijven we ρ_k^h. We kiezen voor evenredigheid van ρ_k^h met de lengte van de periode, dus bijvoorbeeld $\rho_k^h = hr_k$. Denken we nu aan r_k als waarden van een functie van een reële variabele $r(\cdot)$, dan ligt het voor de hand $r_k = r(kh)$ te nemen. Op dezelfde manier beschouwen we ook het cumulatieve kapitaal k_n als interpolaties van een reële functie $k(\cdot)$. We vervangen dan k_n door $k(hn)$ en krijgen dus de uitdrukking $k(hn) = k(0)\prod_{k=1}(1+hr(kh))$. Nemen we logaritmen, dan ontstaat er

$$\log k(hn) = \log k(0) + \sum_{k=1}^{n} \log(1+hr(hk)) \approx \log k(0) + \sum_{k=1}^{n} h\, r(hk).$$

De som benaderen we door de integraal $\int_0^t r(s)ds$, met als gevolg dat we bij benadering $k(t) = k(0)\exp(\int_0^t r(s)\,ds)$ krijgen voor $h \downarrow 0$ en $nh \to t$.

We kunnen de zaken ook omkeren. Als we op een tijdstip T in de toekomst een kapitaal van een gulden willen sparen, dan moeten we op een eerder tijdstip t daarvoor een bedrag $p(t,T) = \exp(-\int_t^T r(s)\,ds)$ inleggen, ervan uitgaande dat $r(\cdot)$ bekend is. Het bedrag $p(t,T)$ wordt ook wel de prijs van een discount of zero-coupon obligatie genoemd. Zero-coupon duidt op het feit dat een dergelijke obligatie niet tussentijds rente uitkeert, maar alleen de hoofdsom aan het einde van de looptijd. De functie r wordt aangeduid met de naam *korte rente* of *short rate*.

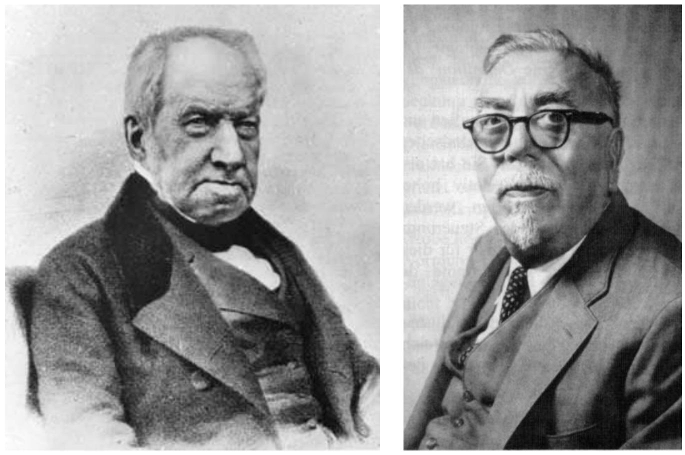
Het zal duidelijk zijn dat soortgelijke overwegingen ook betrekking hebben op hypotheken, van welke soort dan ook, met dien verstande dat het geld voor de aankoop van een huis door de consument geleend moet worden, waarover banken rente berekenen.

Dat deze rente afhangt van de looptijd van de hypotheek, of liever van de periode waarover een rentepercentage afgesproken wordt, is iedereen bekend. Bij een rentevaste periode van vijf jaar ligt het percentage vaak hoger dan voor een periode van twee jaar. Terwijl voor de klant de te betalen rente voor een zekere periode vast ligt, is de situatie voor banken geheel verschillend. Zij sluiten immers dagelijks grote aantallen hypotheken af, moeten het uitgeleende bedrag zelf financieren en hebben daarbij steeds te maken met de marktrente die hun die dag berekend wordt en daarmee ook met de schommelingen die de rente ondervindt. Ook hebben banken nog te maken met verschillende rechten die verstrekt worden aan de klanten. We noemen hier het recht op vervroegd aflossen en de meeneem-optie bij verhuizen. Deze rechten zorgen er voor dat de kasstromen die banken ontvangen uit hun hypothekenportefeuille niet helemaal zeker zijn, maar afhankelijk van toekomstige rente-ontwikkelingen. We komen hier uitgebreid op terug in paragrafen 5 en 6.

Voor het in kaart brengen van de onzekerheid over de ontwikkeling van de korte rente hanteren we een *stochastisch model*. Er zijn in de literatuur verscheidene modellen gepostuleerd. Sommige ervan lenen zich voor een betrekkelijk eenvoudige analytische aanpak, voor andere moet de toevlucht tot simulaties genomen worden. In het bestek van dit verhaal kiezen we voor een eenvoudig analytisch te hanteren model. Dit model werd geintroduceerd door Hull en White in 1987 (zie [7]). Meer is hierover te vinden in bijvoorbeeld de boeken van Björk [2] of Pelsser [10].

2 Een wiskundig model

Voor het beschrijven van de onzekerheid van de renteontwikkeling is het voldoende dat we kansen kunnen bepalen over de waarden die de rente op toekomstige tijdstippen kan aannemen. Impliciet is dit het gevolg van het modelleren van de ontwikkeling van de rente in de tijd door middel van een *stochastische differentiaalvergelijking*. We introduceren wat notatie en begrippen. Van fundamenteel belang is het zogeheten Wiener-proces (vernoemd naar de wiskundige Norbert Wiener (1894–1964), die het bestaan ervan als welgedefinieerd wiskundig object aantoonde [13]). Dit *stochastische* proces duiden we aan met W. Al eerder is dit proces geïntroduceerd in een financiële context door Louis Bachelier (1870–1946) in zijn dissertatie [1], waarop hij als promovendus van Henri Poincaré aan de Sorbonne promoveerde. Ook wordt de naam Brownse beweging als synoniem gebruikt voor het Wiener-proces. Deze naam verwijst naar de Schotse botanist Robert Brown (1773–1858) die in 1827 als eerste het beweeglijke gedrag van pollen in water als het gevolg van voortdurende botsingen met watermoleculen waarnam.



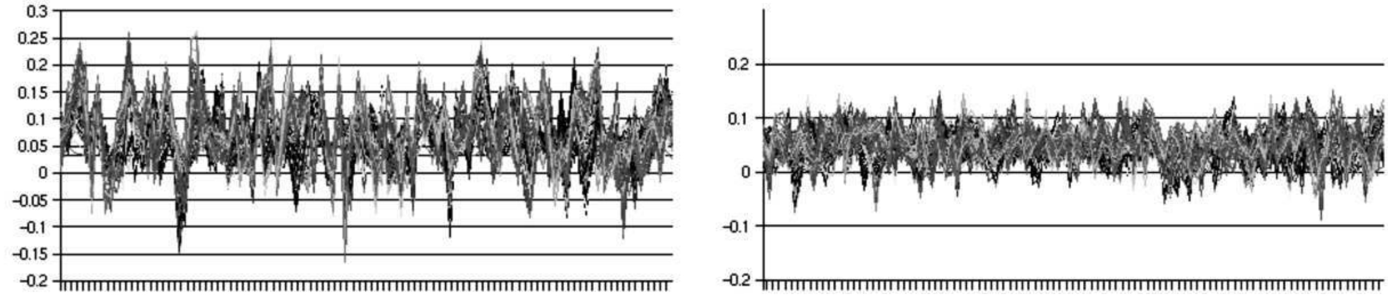
Figuur 2 De botanist Robert Brown (1773–1858) en de wiskundige Norbert Wiener (1894–1964). Naar hen zijn de Brownse beweging en het Wiener-proces — verschillende namen voor eenenhetzelfde stochastische proces — genoemd.

De waarde van W op een tijdstip t geven we aan met W_t. Alle W_t zijn nu stochastische variabelen. Een van de belangrijkste kenmerken van het Wiener-proces W is dat *incrementen* $W_t - W_s$ voor $t > s$ normaal $N(0, t-s)$ verdeeld zijn en stochastisch onafhankelijk van alle waarden van W voor tijdstip s. Bovendien zijn de paden $t \mapsto W_t$ van het Wiener-proces continue functies. Het is zelfs zo dat het opleggen van deze eigenschappen aan een stochastisch proces impliceert dat we met een Wiener-proces te maken hebben.

De tijdsperiode die we beschouwen zetten we op $[0, T]$. Het begintijdstip is het moment dat de klant een offerte accepteert. Met r_t duiden we de korte rente op tijdstip t aan. We presenteren nu een model voor r dat tot gevolg heeft dat r_t voor elke t een stochastische variabele wordt. Zij α een gegeven reëelwaardige functie op $[0, T]$ (verderop meer hierover) en θ een niet-negatieve constante, de zogeheten 'mean-reversion speed'. In het model van Hull en White wordt de rente beschreven door de oplossing van de stochastische differentiaalvergelijking

$$dr_t = (\alpha(t) - \theta r_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \tag{1}$$

waarbij dW_t het increment $W_{t+dt} - W_t$ voorstelt. Een discrete tijd approximatie van deze vergelijking behandelen we in paragraaf 3; hieruit valt tevens te destilleren hoe deze vergelijking geïnterpreteerd dient te worden. We maken het typografische onderscheid door in stochastische grootheden de tijdsparameter t als subindex weer te geven (zoals r_t) en bij deterministische variabelen deze tussen haakjes te schrijven (zoals $\alpha(t)$). Omdat we de



Figuur 1 100 HW-paden met $\theta = 0.1$ (links) en $\theta = 0.4$ (rechts)

rente nu stochastisch gemaakt hebben, schrijven we dus — anders dan in paragraaf 1 — r_t in plaats van $r(t)$.

In figuur 1 zien we het effect van de 'mean-reversion speed' in het Hull & White model. In de figuur staan voor $\theta = 0.1$ en $\theta = 0.4$ 100 gesimuleerde paden geplot. Het is meteen duidelijk dat hoe hoger de θ des te sneller de rentepaden 'teruggetrokken' worden naar het gemiddelde niveau.

De theorie van de stochastische differentiaalvergelijkingen en van de stochastische integratietheorie, waarvan de grondbeginselen door K. Itô in de jaren veertig van de twintigste eeuw geformuleerd zijn, onderscheidt zich qua calculusregels in het algemeen van de gewone differentiaalrekening. Dit wordt geïllustreerd door de zogenaamde Itô-regel (zie [9]). Recent is bekend geworden dat wat nu bekend staat als de Itô-regel al in 1940 is opgeschreven in een recent geopenbaard manuscript van Wolfgang Döblin (1915-1940) dat in een verzegelde envelop is bewaard in het archief van de Académie des sciences in Parijs. Zie [5] voor een verhandeling van de bizarre geschiedenis en een gedrukte versie van het origineel en ook elders in dit blad. Het van de gewone calculus afwijkende gedrag is essentieel een gevolg van het feit dat de paden van het Wiener-proces weliswaar continu zijn, maar anders buitengewoon grillig, namelijk van onbegrensde variatie over eindige intervallen. Het is voor ons doel echter niet nodig om hier dieper op in te gaan. Lezers die hierover meer willen weten verwijzen we naar bijvoorbeeld Karatzas & Shreve [9] of Chung & Williams [6]. Voor vergelijking (1) valt aan te tonen dat we onze toevlucht kunnen nemen tot methoden uit de theorie van de gewone differentiaalvergelijkingen. Gegeven een beginvoorwaarde r_0 (die we deterministisch nemen, immers we kennen de rente op dit moment) is deze stochastische differentiaalvergelijking expliciet op te lossen. De oplossing waarvan we een slordig bewijs geven in het onderstaande kader, is

$$r_t = e^{-\theta t}(r_0 + \int_0^t e^{\theta s}\alpha(s)\,ds + \sigma\int_0^t e^{\theta s}\,dW_s). \tag{2}$$

Het gevolg van bovenstaand model is (zie paragraaf 3) dat r_t op elk tijdstip normaal verdeeld is, want alleen de laatste (stochastische) integraal in (2) is een toevalsvariabele, die we zien als een (oneindige) som van onafhankelijke normalen. Deze hebben allemaal verwachtingen nul, zodat de verwachting van r_t gelijk is aan $e^{-\theta t}r_0 + \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\alpha(s)\,ds$. De variantie is wat lastiger te bepalen. Aangetoond kan worden dat $\operatorname{Var} r_t = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta t})$. Bovendien kunnen we voor elk tweetal tijdstippen t en s eenvoudig de covariantie tussen r_t en r_s uitrekenen. Voor $t > s$ krijgen we $\operatorname{Cov}(r_t, r_s) = e^{-\theta(t-s)}\operatorname{Var} r_s$. Het is nu een koud kunstje om voor elk n-tupel $(t_1, \ldots, t_n)$ de verdeling van $r_{t_1}, \ldots, r_{t_n}$ te karakteriseren. Deze is (multivariaat) normaal en verwachting en covariantiematrix kunnen we met de zojuist gegeven formules bepalen.

Samenvattend, als gevolg van de beschrijving met een stochastische differentiaalvergelijking zijn we in staat om de kansverdeling van het proces r te beschrijven, waarmee we de onzekerheid over het verloop van r in kaart hebben gebracht.

Het oplossen van de stochastische differentiaalvergelijking (1)

De methode die we gebruiken is die der variatie van de constante, bekend uit de theorie van de inhomogene lineaire differentiaalvergelijkingen. Hoewel opgemerkt was, dat de stochastische-calculusregels afwijken van wat we uit de gewone calculus kennen, hebben we hier met een situatie te maken waarvan aan te tonen valt dat het onderscheid wegvalt.

Beschouw eerst de homogene differentiaalvergelijking $dx_t = -\theta x_t dt$. De oplossing kennen we: $x_t = e^{-\theta t}$ bij begintoestand $x_0 = 1$. Laten we nu eens als oplossing voor de stochastische differentiaalvergelijking $r_t = x_t y_t$ proberen. Hier is x_t de oplossing van het 'homogene' deel en y_t is een nog onbepaald stochastisch process. Laten we nu $r_t = x_t y_t$ gaan differentiëren:

$$\begin{aligned} dr_t &= y_t dx_t + x_t dy_t \\ &= -\theta x_t y_t dt + x_t dy_t \\ &= -\theta r_t dt + x_t dy_t. \end{aligned}$$

Als we nu naar de oorspronkelijk vergelijking voor r_t kijken, dan zien we dat dy_t gelijk moet zijn aan $x_t^{-1}(\alpha(t)dt + \sigma dW_t)$ $= e^{\theta t}\alpha(t)dt + \sigma e^{\theta t}dW_t$. Als we de laaste vergelijking integreren aan beide zijden van het '='-teken, en we nemen aan dat r_t op tijdstip 0 de beginwaarde r_0 aanneemt, dan verkrijgen we vergelijking (2).

We hebben nu met behulp van een stochastisch model de korte rente beschreven. In een discreet model als in paragraaf 3 wordt beschreven, is dit vaak de 1-maands rente (rente op geldleningen met duur 1 maand). Zoals eerder gezegd worden hypotheekrentes vaak voor lange tijd (van 1 tot 20 jaar) vastgelegd. Het mooie van modellen als (1) is dat we een 'gesloten vorm' vergelijking voor lange rentes uit kunnen rekenen in termen van de direct gemodelleerde korte rente. Met een lange rente bedoelen we het rendement op een langlopende lening (bijvoorbeeld staatsobligatie). Het eenvoudigst is om naar het rendement van de zero-coupon obligatie uit paragraaf 1 te kijken. De relatie tussen de prijs $p(t, T)$ van een zero-coupon obligatie op tijdstip t met een looptijd $T - t$ en het rendement $R(t, T)$ van dit instrument, de zero-coupon rente, kan als volgt gedefiniëerd worden: $R(t, T) := -\log p(t, T)/(T - t)$ waarbij $p(t, T)$ gegeven wordt door $p(t, T) = \mathbf{E}_t\left(\exp(-\int_t^T r_s ds)\right)$. Het subscript t bij de verwachting betekent dat we de verwachting nemen gegeven de informatie van r_s tot en met tijdstip t. Voor de experts: de verwachting wordt genomen onder de risico-neutrale kansmaat.

De grafiek van $R(t, T)$ als functie van T (t vast) wordt wel de spot- of zero-coupon yield curve genoemd. Een populaire klasse van rentemodellen is de klasse van zogenaamde affiene modellen. Bij deze modellen bestaat er een lineair verband tussen de zero-coupon rentes $R(t, T)$ en de korte rentes r_t. Het Hull en White model behoort ook tot deze klasse en men kan na enig rekenwerk laten zien dat er functies $A(t, T)$ en $B(t, T)$ bestaan zodanig dat

$$R(t, T) = A(t, T) + B(t, T)r_t. \tag{3}$$

De functie $B(t, T)$ wordt gegeven door

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)}.$$

De functie $A(t, T)$ is vrij gecompliceerd en kan gevonden worden in paragraaf 5.2 van Pelsser [10]. Zo zien we dus, dat we via een model voor de korte rente r_t ook formules kunnen krijgen voor de lange rentes $R(t, T)$.

Als we in de praktijk vergelijkingen als (1), (2) en (3) willen simuleren op de computer, dan zullen we ook discrete versies van de vergelijkingen moeten hebben. In de volgende paragraaf wordt kort ingegaan op het discretiseren van de continue vergelijkingen in deze paragraaf. Met name vergelijking (4) is zeer nuttig en geeft direct aan hoe korte rentes gesimuleerd kunnen worden.

3 Discrete benadering

Stochastische differentiaalvergelijkingen zijn op te vatten als limieten van (stochastische) differentievergelijkingen. De aanpak die we hierbij volgen, verloopt parallel aan die van paragraaf 1. We illustreren dit aan de hand van de eerder geponeerde vergelijking

$$dr_t = (\alpha(t) - \theta r_t)\, dt + \sigma dW_t.$$

Over een klein tijdsinterval ter lengte h vinden we dat bij benadering geldt

$$r_{t+h} - r_t = (\alpha(t) - \theta r_t)h + \sigma(W_{t+h} - W_t).$$

Laten we nu t steeds een geheel veelvoud van h zijn, zeg $t = nh$, dan krijgen we met $r^h_n = r_{nh}$, $\alpha^h_n = \alpha(nh)$ en $\Delta W^h_{n+1} = W_{(n+1)h} - W_{nh}$

$$r^h_{n+1} = r^h_n + (\alpha^h_n - \theta r^h_n)h + \sigma\Delta W^h_{n+1}. \tag{4}$$

Merk op dat ΔW^h_{n+1} normaal verdeeld is met verwachting nul en variantie h. De laatste vergelijking is recursief eenvoudig op te lossen:

$$\begin{aligned} r^h_n = {} & (1-\theta h)^n \cdot \\ & \cdot \left(r_0 + \sum_{k=1}^{n} (1-\theta h)^{-k}\alpha^h_{k-1}h + \sum_{k=1}^{n}(1-\theta h)^{-k}\sigma\Delta W^h_k\right). \end{aligned} \tag{5}$$

We zien nu eenvoudig dat r^h_n normaal is met verwachting

$$(1-\theta h)^n\Big(r_0 + \sum_{k=1}^{n}(1-\theta h)^{-k}\alpha^h_{k-1}h$$

en variantie

$$\sigma^2(1-\theta h)^{2n}\sum_{k=1}^{n}(1-\theta h)^{-2k}h.$$

Laten we nu $h \downarrow 0$ en $nh \to t$, dan convergeert de verwachting van r^h_n naar

$$e^{-\theta t}\Big(r(0) + \int_0^t e^{\theta s}\alpha(s)\, ds\Big),$$

omdat $(1-\theta h)^n \to e^{\theta t}$ en we de (Riemann) som kunnen vervangen door de corresponderende integraal. Analoog convergeert de variantie naar

$$\sigma^2 e^{-2\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}ds = \sigma^2(1-e^{-2\theta t})/2\theta.$$

De aldus verkregen limieten voor verwachting en variantie zijn precies wat we in paragraaf 2 al berekend hadden voor r_t. Op soortgelijke wijze kunnen we nu ook iets over convergentie van r^h_n uit (5) zeggen, zonder deze beweringen een preciese vorm te geven: r^h_n convergeert (in kans) naar r_t uit (2), waarbij we dW_t hebben geschreven voor de 'limiet' van ΔW^h_k.

4 Statistiek voor rentemodellen

In het model van vergelijking (1) zijn de reële parameters θ en σ, alsmede de functie α nog niet gespecificeerd. In de praktijk probeert men deze onbekende parameters te vinden door het gebruikte rentemodel te calibreren op marktdata. De eerst stap is als volgt: De functie $\alpha(t)$ wordt zo gekozen dat de prijs $\mathbf{E}\exp(-\int_0^t r_s\, ds)$ van een zero-coupon obligatie met looptijd t overeen komt met de prijs die vandaag in de markt geldt. In de krant kun je de prijzen zien van 'gewone' coupon obligaties uitgegeven door de Nederlandse staat. Hieruit is op eenvoudige wijze de prijzen van zero-coupon obligaties af te leiden.

De parameters θ en σ kunnen verkregen worden door het model te calibreren op prijzen van rente-opties (caps, floors, swaptions). Dit gaat door eerst een aantal prijzen te verzamelen in de huidige markt, dan de prijzen van dezelfde instrumenten uit te rekenen in het model (dus nog als functie van θ en σ), en daarna, bijvoorbeeld met behulp van de kleinste kwadraten methode, de parameters θ en σ zo te kiezen dat de marktprijzen zo goed mogelijk benaderd worden. Dat hierbij allerlei standaardvragen uit de statistiek omtrent de kwaliteit van de verkregen resultaten opdoemen, zal duidelijk zijn. In het kader van dit artikel gaan we hier niet nader op in.

5 Rentemodellen bij analyses van hypothekenportefeuilles

Nu we een wiskundig model geïntroduceerd hebben, gaan we nader in op de vraag waarom financiële instellingen complexe rentemodellen gebruiken bij het beheersen van risico's van hypothekenportefeuilles. Er zijn twee redenen aan te voeren:

1. Zoals gezegd in paragraaf 1 is er een verschil tussen de hypotheekrente zoals klanten die zien, en de marktrente die financiële instellingen zien als zij de hypotheken moeten financieren. Marktrentes fluctueren dagelijks en hypotheekrentes zijn voor langere periode constant.
2. In de praktijk is het niet zo dat banken altijd de aflossingen en rentes met zekerheid ontvangen. Dit heeft te maken met bepaalde herfinancieringsrechten die klanten krijgen aangeboden in het hypotheekcontract. Er is vaak een verband aan te wijzen tussen het wel of niet uitoefenen van deze rechten en de stand van de rente. Enkele van deze rechten worden hieronder besproken.

We hebben hierboven herhaaldelijk de term 'rechten' laten vallen. Deze rechten worden in de financiële wereld veelal *opties* genoemd. Deze opties komen in allerlei soorten en maten voor een worden vaak met een geografische naam aangeduid (bijvoorbeeld Europese, Amerikaanse, Russische, Aziatische opties). Deze naamgeving heeft evenwel niets met een geografische achtergrond te maken, slechts met een verschil in het moment waarop een klant van zijn recht gebruik kan maken. Bijvoorbeeld, bij een Europese optie is dit het geval op een van te voren bepaald moment, bij een Amerikaanse optie daarentegen staat het de klant vrij binnen een vastgestelde periode op elk moment dat hem goeddunkt zijn recht uit te oefenen.

DE OFFERTE-OPTIE. In een hypothekenofferte ontvangt de klant een hypothekentarief dat hij gedurende een zekere periode — zeg een maand — mag (niet moet, vandaar dat we spreken van een optie) accepteren. Dit betekent dat als de marktrente omhoog gaat, en de bank dus hogere financieringskosten heeft, de klant

nog steeds de geoffreerde rente gaat betalen bij acceptatie van de offerte. Nu komt het — voor de klant — mooiste gedeelte van de offerte-optie: als de hypotheekrente in de periode tussen offreren en passeren bij de notaris omlaag gaat, dan verlaagt de bank automatisch de rente in de offerte tot het dan geldende nieuwe hypothekentarief. Het woord 'optie' hier is ietwat misleidend, omdat de klant zelf niet in actie hoeft te komen om dit recht uit te oefenen.

De meeneemoptie. Als een klant verhuist, moet de hypotheek volledig afgelost worden. Het huis als onderpand van de hypotheek vervalt namelijk. Als de klant een nieuwe hypotheek nodig heeft voor het nieuwe huis dan biedt de bank of verzekeringsmaatschappij de volgende mogelijkheid: de klant mag de oude hypotheek 'meeverhuizen' of de klant mag een nieuwe offerte vragen. Als de huidige rente lager is dan zijn oude tarief dan zal de klant een nieuwe hypotheek nemen. In het andere geval, dat de rente intussen gestegen is, zal de klant de oude hypotheekvoorwaarden 'meeverhuizen' naar zijn nieuwe hypotheek.

De optie vervroegd af te lossen. Klanten hebben tijdens de looptijd van de hypotheek de mogelijkheid deze hypotheek vervroegd af te lossen. Een gedeelte kan zelfs zonder boete vervroegd worden afgelost. Dit kan interessant zijn, indien de hypotheekrente flink gedaald is en de hypotheek elders voordeliger gefinancierd kan worden. (Vanuit het gezichtspunt van de klant moeten overigens ook belastingaspecten die kleven aan een vervroegde aflossing en herfinanciering grondig bestudeerd worden.)

De rentebedenktijd-optie. Sommige hypotheekvormen hebben een zogenaamde rentebedenktijd ingebouwd. Deze rentebedenktijd houdt in dat klanten, veelal in het laatste jaar van de hypotheek, de mogelijkheid krijgen om alvast het nieuwe hypothekentarief voor de volgende rentevaste periode te nemen. Dit kan gunstig zijn voor de klant als hij of zij denkt dat de huidige rente wel erg laag is en alleen maar kan stijgen.

Wat veel mensen doen bij het kiezen van de eerste hypotheek is het nemen van een hypotheek met een 1-jarige rentevast periode en gedurende dat hele eerste jaar een rentebedenktijd. De klant kan dan gedurende dat hele eerste jaar een gunstig moment kiezen om te switchen naar een hypotheek met een langere rentevaste looptijd. We hebben hier een mooi voorbeeld van een optie in Amerikaanse stijl. Voor de experts en fijnproevers: een hypotheek is dus eigenlijk een Forward starting loan met look back faciliteit, die bovendien putable is.

Het volgende valt dus op bij bovenstaande opties: het uitoefenen hangt af van de huidige stand van de rente, het gedrag van de klant en externe omstandigheden (bijvoorbeeld het winnen van een loterij, waardoor een klant zijn gehele schuldrest in één keer aflost).

Rentemodellen, zoals besproken in paragraaf 2, worden gebruikt voor een aantal doeleinden:

a. De onzekere kasstromen behorende bij hypotheken met bovengenoemde ingebouwde opties kunnen gemodelleerd worden.
b. Nadat de kasstromen gemodelleerd zijn, kunnen hypothekenportefeuilles gewaardeerd (dat wil zeggen van een prijs voorzien) worden en — belangrijker — de ontwikkeling van de portefeuillewaarde kan in de tijd gevolgd worden.
c. Maatregelen kunnen worden genomen om de waardeveranderingen van de hypothekenportefeuille als gevolg van veranderingen in de rente zoveel mogelijk te reduceren. Dit wordt bij financiële instellingen wel hedgen genoemd.

6 Een waarderingsvraagstuk

In deze paragraaf zullen we ons richten op het waarderingsvraagstuk (b) uit het einde van de vorige paragraaf. We gaan er hierbij vanuit dat het om afgesloten hypotheken gaat, zodat de offerteoptie hier niet gemodelleerd behoeft te worden en we richten ons alleen op het geval waarin we met vervroegde aflossingen te maken hebben. Het gaat er al met al dus om hypotheken te voorzien van een prijs die aan de klant berekend zal worden, terwijl we niet van te voren weten wanneer klanten vroegtijdig aflossen en hoe groot die aflossing bedraagt. Om de onzekerheid van de kasstromen uit de hypothekenportefeuille en de onzekerheid van de rente met elkaar te verbinden zijn zogenaamde vervroegde-aflossingsmodellen nodig. Verderop presenteren we een eenvoudig, maar in de praktijk vaak gebruikt, model. Zelfs voor dit model zal blijken dat een analytische formule voor de aan de klant door te bereken prijs in de regel niet voorhanden is. We bespreken vervolgens een simulatiemethode om toch een numerieke waarde aan de hypotheek toe te kennen en we lichten toe wat de invloed van de verschillende parameters in het model is op de te berekenen prijs.

Voordat we aan de hand van een vervroegd-aflossingsmodel trachten prijzen te berekenen, laten we eerst zien hoe de kasstromen (rente en aflossingen) lopen van de klant naar de hypotheekverstrekker zonder dat we vervroegde aflossingen en andere opties in ogenschouw nemen. We gaan uit van een eenvoudige annuïteiten hypotheek. Dit is een hypotheek waarbij de klanten (tijdens de rentevaste periode) maandelijks een constant bedrag aan rente plus aflossing betalen aan de hypotheekverstrekker. Gaan we uit van een te lenen bedrag B dat in N termijnen afbetaald moet worden tegen een vaste rente r per termijn, zodanig dat per termijn n de som van de betaald rente i_n en de aflossing a_n constant is, de *annuïteit*, dan kunnen we a_n en i_n als volgt bepalen.

Zet de schuldrest op tijdstip n op S_n, dan is dus $S_0 = B$ en $S_N = 0$. Verder geldt $i_n = rS_{n-1}$ en $a_n = a - i_n$, waarbij a de annuïteit. Dit leidt tot de volgende vergelijking: $S_n = (1+r)S_{n-1} - a$. Eenvoudig rekenwerk leidt tot

$$a = \frac{r(1+r)^N S_0}{(1+r)^N - 1} \quad \text{en} \quad S_n = \frac{(1+r)^N S_0 (1-(1+r)^{n-N})}{(1+r)^N - 1}.$$

Er is een uitgebreide literatuur beschikbaar over vervroegde-aflossingsmodellen. Zie bijvoorbeeld [12] and [11]. In de literatuur worden deze modellen *prepayment models* genoemd. Een populair en eenvoudig model wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$v_t = \alpha + \beta\,(r_t^{ma\,10j} - r_t^{nu\,10j}) + \gamma\,\max\{r_t^{ma\,10j} - r_t^{nu\,10j}, 0\} \quad (6)$$

Hier is v_t het percentage vervroegde aflossingen (op jaarbasis als percentage van uitstaande schuldrest), $r_t^{nu\,10j}$ en $r_t^{ma\,10j}$ respectievelijk de 10-jaars rente op tijdstip t en het 10-jarig voortschrijdend gemiddelde van de 10-jaars rente op tijdstip t.

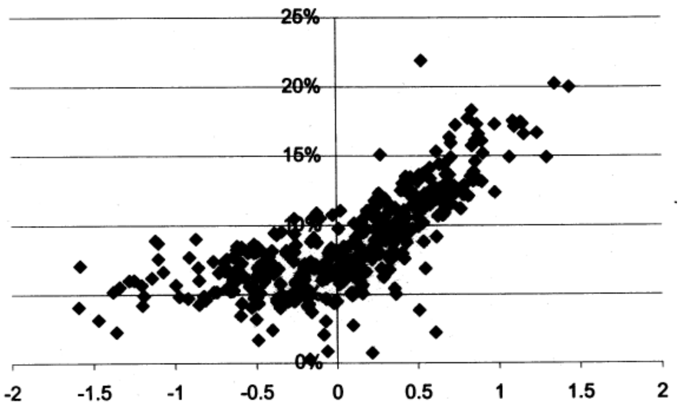
Figuur 3 laat een patroon zien dat vaak in de praktijk wordt waargenomen. Afgebeeld staat het vervroegde-aflossings percentage op jaarbasis (verticale as) tegen het verschil van een voortschrijdend gemiddelde van de 10-jaars rente en de actuele 10-jaars rente (op moment van de waarneming). De data in dit plaatje zijn fictief en niet gebaseerd op data van hypothekenportefeuilles van bestaande financiële instellingen.

Als we nu teruggaan naar de bovenstaande notatie dan zien we dat de schuldrest op tijdstip n als volgt berekend wordt: $S_0 = B$, $S_n = S_{n-1} - a_n - v_n S_{n-1}$, waarbij a_n de reguliere aflossing is en v_n het vervroegde-aflossingspercentage. Verder geldt dat de kasstroom (cash flow) naar de bank toe op tijdstip n gegeven wordt door $CF_n = a_n + v_n S_{n-1} + i_n$, waarbij i_n de rentecomponent $r\,S_{n-1}$ is. Analytische formules voor S_n zijn niet te verkrijgen omdat de vervroegde-aflossingscomponent een lastige vorm heeft en bovendien van de rente afhangt.

Het is nu belangrijk om in te zien dat de kasstromen afhankelijk zijn van de onderliggende marktrentebewegingen. Bovendien zijn ze 'pad-afhankelijk', dat wil zeggen, ieder andere rentebeweging naar tijdstip t toe kan tot en andere reeks kasstromen $CF_1, ..., CF_t$ leiden. Met behulp van de rentemodellen beschreven in paragraaf 3 kunnen de onzekere kasstromen gewaardeerd worden. In theorie gaat dit via de vergelijking

$$V_T = \mathbf{E}\left(\sum_{t=1}^{T} \exp(-\int_0^t r_s\,ds) CF_t(r_s, s \le t)\right). \quad (7)$$

Hier is V_T de waarde van de hypotheek (of portefeuille) op tijdstip T, en $CF_t = CF_t(r_s, s \le t)$ zijn de onzekere kasstromen die de portefeuille genereert op de tijdstippen $t = 1, \ldots, T$. Merk op dat CF_t afhangt van de hele historie van de rente tot op tijdstip t (via verband korte en lange rentes gegeven in (3)).



Figuur 3 Verschil voorschrijdend gemiddelde en huidige 10-jaars rente versus vervroegd-aflossingspercentage

In de praktijk is het zeer lastig, zo niet onmogelijk, om de bovenstaande formule analytisch uit te rekenen. Veelal worden simulatie-methoden gebruikt om een nauwkeurige benadering te geven van formule (7). In termen van het discrete model van paragraaf 3 gaat dit als volgt:

1. Simuleer een reeks korte rentes $r_1^h, ..., r_N^h$ met bijvoorbeeld $h = 1/12$ (stappen van 1 maand).
2. Bereken benodigde lange rentes met behulp van de relatie in formule (3).
3. Bereken de vervroegde-aflossing percentages (die afhankelijk zijn van berekende lange rentes, en de reeks kasstromen $CF_1, CF_2, \ldots$).
4. Verdisconteer de kasstromen met de gesimuleerde korte termijn rentes:
$$\exp(-\sum_{i=1}^{n} h\, r_i^h)\, CF_n(r_1^h, ..., r_n^h) \quad (8)$$
en tel de verdisconteerde kasstromen bij elkaar op.
5. Doe (1) tot en met (4) een groot aantal, zeg 1000, keren en neem als schatting voor de waarde van de portefeuille het gemiddelde van de som van de verdisconteerde kasstromen in (8).

Bij bovenstaande recept moeten we enige kanttekeningen plaatsen. De eerste is dat bij gebrek aan data de meeneem-optie en de optie om vervroegd af te lossen meestal in een model gegoten worden. De tweede kanttekening is dat voor de rentebedenktijd-optie sec modellen gehanteerd kunnen worden die lijken op de vervroegde-aflossingsmodellen. We merken nog op dat de rentebedenktijd-optie eigenlijk een Amerikaans call optie is (geschreven door de bank). Tenslotte stellen we vast, dat in een rentemodel vaak de lange rente op staatsobligaties gemodelleerd wordt. In een verfijnde versie van het model zou het verband tussen de markt- en de hypotheekrentes ook beschreven moeten worden. Een 10-jaars rendement op staatsobligities verandert natuurlijk vaker dan de 10-jaars hypotheekrente. Vaak volgt de hypotheekverstrekker de marktrente op enige afstand.

In tabel 4 zien we de resultaten van een simulatie. De karakteristieken van de hypotheek staan in tabel 1. We nemen aan dat de 10-jaars marktrente op de kapitaalmarkt 5.2% is (het hypotheektarief ligt dus 0,8% hoger dan de marktrente). Het aflossingspatroon van de hypotheek is een annuïteit en de hypotheek wordt in 30 jaar afgelost. We hebben deze hypotheek gewaardeerd met behulp van een Hull en White model en met een vervroegde-

Hoofdsom	100
Rente	6%
Looptijd	30 jaar
Rentevaste looptijd	5 jaar
Type	Annuïteit

Tabel 1 Modelhypotheek

	θ	σ
Basis	0.1	1.0%
Hoog	0.1	3.0%
Laag	0.1	0.5%

Tabel 2 Parameters Hull & White model

	α	β	γ
Basis	7%	0.1	0.7
Nul	0%	0	0
Hoog	14%	0.2	1.4
Laag I	3.5%	0.05	0.35
Laag II	0%	0.1	0.7

Tabel 3 Parameters vervroegd-aflossingsmodel

Vervr.-aflossingsmodel/rente	Laag	Basis	Hoog
Basis	103.62	103.53	102.09
Nul	104.13	104.13	104.13
Laag I	-	103.80	-
Laag II	-	103.79	-
Hoog	-	103.05	-

Tabel 4 Uitkomsten waardering modelhypotheek

aflossingsfunctie als in formule (6). In tabel 2 staan de waarden voor θ en σ. We hebben θ constant gehouden en σ laten variëren. 'Hoog' en 'Laag' zijn dus modellen met hoge respectievelijk lage beweeglijkheid van de rente. 'Basis' zit er tussen in. In tabel 3 staan vijf verschillende drietallen voor de parameters α, β en γ in formule (6).

We lichten de uitkomsten van tabel 4 nader toe. We zien dat zonder opties, dus met vervroegde-aflossingsparameters gelijk aan nul, de hypotheek voor de verstrekker 104,13 waard is. Dit is meer dan de hoofdsom van 100 omdat de winstmarge van de hypotheekverstrekker in de 104,13 verdisconteerd is.

Omdat de kasstromen van de hypotheek zeker zijn (parameters vervroegd-aflossingsmodel op nul) heeft de beweeglijkheid van de rente geen invloed op de waarde als we het vervroegd-aflossingsmodel 'uitzetten'. Kijken we nu naar het basistripel vervroegde-aflossingsparameters dan zien we dat de waarde van de hypotheek (wederom voor de verstrekker) hoger wordt, naarmate de beweeglijkheid van de rente lager is. Dit komt omdat dan de kans dat de optie voor de klant voordeel oplevert kleiner is.

Bij de parameters 'Laag I', 'Laag II' en 'Hoog' in het vervroegd-aflossingsmodel bekijken we de resultaten van de waardering alleen voor het basistripel parameters in het Hull & White model. In de regel is het zo dat de hypotheek minder waard wordt voor de verstrekker als de parameter γ hoger wordt. Klanten gaan dan immers hun hypotheek aflossen en wellicht herfinancieren als de rente laag is. De parameter α heeft een dubbele werking op de waarde van de hypotheek. Een hoge α kan gunstig zijn voor de verstrekker in een klimaat met hogere rente dan bij verstrekking van hypotheek, maar is juist ongunstig in geval van lagere rente dan bij de verstrekking. Om te bekijken of hogere α een hogere of lagere waarde voor de modelhypotheek impliceert, moeten we weten met welke kans het gebruikte rentemodel hogere of lagere rentes gaat simuleren. In vergelijking met het basistripel zien we dan de modelhypotheek meer waard is in situaties 'Laag I' en 'Laag II'. De extreem hoge γ in 'Hoog' verklaart dat de modelhypotheek minder waard is dan voor de basiswaarden van α, β en γ.

7 Tot slot

In de gepresenteerde analyse is gekozen voor een populair rentemodel (Hull en White), dat zich leent voor een analytische aanpak met voor een deel formules in gesloten vorm. Er bestaan echter veel meer rentemodellen, waarvan sommige bepaalde karakteristieken van het verloop van de rente beter weergeven. In [10], [3] of [2] is hiervan een overzicht te vinden. Voorts hebben we een aantal gedragingen van klanten, en de verschillende mogelijkheden tot het uitoefenen van sommige opties niet volledig gemodelleerd. Het ontwikkelen van rentemodellen is een levendig onderwerp van onderzoek waarin nog bij lange na niet het definitieve woord gesproken is.

Referenties

1 L. Bachelier (1900), 'Théorie de la spéculation', *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, tome 17, Paris, Gauthier-Villars.

2 T. Björk (1998), *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford University Press.

3 D. Brigo and F. Mercurio (2001), *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer Finance, Heidelberg.

4 Robert Brown (1828), 'A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies', *Philosophical Magazine (2nd series)* **4**,161–173.

5 Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I - Mathematics, 331, Issue 12, Part 2, December 2000

6 K.L. Chung and R. Williams (1997), *Introduction to Stochastic Integration, Second Edition (3rd Printing)*, Birkhäuser.

7 J. Hull and A. White (1987), 'The pricing of options on assets with stochastic volatilities', *Journal of Finance* **42** (2), 281–300.

8 K. Itô (1944), 'Stochastic integral', *Proc. Imperial Acad. Tokyo* **20**, 519–524.

9 I. Karatzas and S. Shreve (1991), *Brownian motion and Stochastic calculus*, Springer.

10 A. Pelsser (2000), *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Springer.

11 S.F. Richard and R. Roll (1989), 'Prepayments on fixed-rate mortgage-backed securities', *Journal of Portfolio Management*, Spring 1989, 73-82.

12 E.S. Schwartz and W.N. Torous (1989), 'Prepayment and the valuation of mortgage-backed securities', *Journal of Finance* **44** (2), 375–392.

13 N. Wiener (1923), 'Differential space', *J. Math. Phys.* **2**, 131–174.